$y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$ Ed22

Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, senza distinguere tanti sottocasi,

prendo come soluz dello complessa una funz del tipo

$y(t) = p(t)\, e^{\lambda t}$

($p(t)$ polinomio)

$y' = e^{\lambda t}(\lambda p + p')$

$y'' = e^{\lambda t}(\lambda^2 p + \lambda p' + \lambda p' + p'')$

Sostituisco in

$$y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$$

$$\cancel{e^{\lambda t}}(\lambda^2 p + 2\lambda p' + p'' + a\lambda p + ap' + bp) = A\,\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$p'' + p'(2\lambda + a) + p\,\cancel{(\lambda^2 + a\lambda + b)} = A$$

se $2\lambda + a \neq 0$ $\quad p' = \frac{A}{2\lambda + a}$ $\quad p = \frac{At}{2\lambda + a}$

se $2\lambda + a = 0$ $\quad p'' = A \Rightarrow p' = At$
$\Rightarrow p = At^2.$

Ed 23

si può lavorare così anche con

$$y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}\cos\omega t \ldots$$

Dico $\bar{y}(t) = e^{\lambda t} p(t)$, $p(t)$ incognita.

$$p'' + p'(2\lambda + a) + p(\lambda^2 + a\lambda + b) = A\cos\omega t$$

ecc.

Applichiamo questo metodo all'esercizio lasciato in sospeso ieri

$$y'' + 2y' + 3y = 3e^{-t}\cos\sqrt{2}t$$

1) ...

2) omog. ass ha sol $z(t) = e^{-t}(c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t)$

$$p'' + p'\cancel{(-2+2)} + p(1-2+3) = 3\cos\sqrt{2}t$$

$$p'' + 2p = 3\cos\sqrt{2}t$$

questa ha sol dell'omog associata del tipo $z = c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t$

Ed 24

Allora una sol particolare sarà

$$\bar{\mu}(t) = k\, t \,\mathrm{sen}\sqrt{2}t$$

$$\bar{\mu}'(t) = k\left(\mathrm{sen}\sqrt{2}t + \sqrt{2}\,t\cos\sqrt{2}t\right)$$

$$\bar{\mu}''(t) = k\left(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t + \right.$$
$$\left. - 2t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t\right)$$

Sost. in:

$$\bar{\mu}'' + 2\bar{\mu} = 3\cos\sqrt{2}t$$

$$k\left(2\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \cancel{2t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t}\right.$$
$$\left. + \cancel{2t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t}\right) = 3\cos\sqrt{2}t$$

$$k\cdot 2\sqrt{2} = 3 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\bar{\mu}(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\, t\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t$$

$$\bar{y}(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\, t e^{-t}\,\mathrm{sen}\sqrt{2}t .$$

---

Maggiori dettagli nel file messo in rete alla data 12/1 prima di RIEPILOGO. Un commento al Metodo di variaz. delle costanti lì illustrato in ultima pagina si trova qui nelle prossime 2 pagine.

Ed 25

# Metodo di variaz. delle costanti

$$y'' + ay' + by = f(t)$$ $f(t)$ cont. $a, b \in \mathbb{R}$

Sia $z(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t)$

l'integrale generale dell'om. associata.

Cerco una possibile sol. della completa tra quelle della forma

$$\bar{y}(t) = c_1(t) z_1(t) + c_2(t) z_2(t)$$

Calcolo $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ (vedi in rete)

sostituisco nella completa

$$\sum_{i=1,2} \left[ c_i'' z_i + c_i' (2 z_i' + a z_i) \right] = f(t)$$

SUPPONGO

$$\boxed{\sum_{i=1,2} c_i' z_i = 0}$$

derivo l'equaz e trovo:

$$\sum_{i=1,2} \left( c_i'' z_i + c_i' z_i' \right) = 0$$

Ne consegue che l'eq. differenziale diventa

$$\boxed{\sum_{i=1,2} c_i' z_i' = f(t)}$$

$$\begin{cases} z_1 c_1' + z_2 c_2' = 0 \\ z_1' c_1' + z_2' c_2' = f(t) \end{cases}$$

Sist. lineare con coefficienti $z_1, z_2, z_1', z_2'$ e incognite $\underline{c_1', c_2'}$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} c_1' + \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2' \end{pmatrix} c_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{le sol esistono!}$$

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{-z_2 f(t)}{z_1 z_2' - z_2 z_1'} \\ c_2' = \dfrac{z_1 f(t)}{z_1 z_2' - z_2 z_1'} \end{cases}$$

poi però bisogna INTEGRARE e può essere complicato!

# ESERCIZI

Ed27

I) Risolvere

$$y'' - 4y' + 3y = te^{3t}$$

1°) EDL 2° ord. coeff. cost. completa
non ha termine noto del tipo
polin. o $te^{2t}\cos\omega t$ ecc.

2°) Sol. omog associata:

$$z'' - 4z' + 3z = 0$$

eq. caratt: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1, 3$

Int. gen. omog: $z(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t}$

3°) Ricerca della sol. part.:

La cerco tra quelle della forma

$$\boxed{\bar{y}(t) = p(t)e^{3t}}$$

per potermi ricondurre a un'eq. diff lin... con termine noto polinomio

$$\bar{y}'(t) = e^{3t}(3p + p')$$

$$\bar{y}''(t) = e^{3t}(9p + 3p' + 3p' + p'')$$

$$\cancel{e^{3t}}\Big(p'' + 6p' + 9p + \\ -4p' - 12p + \\ +3p\Big) = t\cancel{e^{3t}}$$

$p'' + 2p' = t$. Pongo: $p' = at + b$

Ed28

$p'' = a$ : $a + 2at + 2b = t$

$(2a-1)t + a + 2b = 0 \quad \forall t$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a-1 = 0 & a = 1/2 \\ a+2b = 0 & b = -1/4 \end{cases}$

$p' = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \implies p = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t$

$\bar{y} = \frac{1}{4}(t^2 - t)e^{3t}$ Verificate!

4°) Integr. gen. della completa:

$y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - t)e^{3t} + c_1 e^t + c_2 e^{3t}$

FINE!

---

Ib) Si risolva il probl. di Cauchy

$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = te^{3t} \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

Seguo la trafila 1° ⟶ 4°. Poi

$y'(t) = \frac{1}{4}e^{3t}(3t^2 - 3t + 2t - 1) + c_1 e^t + 3c_2 e^{3t}$

$y(0) = 0 \cdot e^0 + c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = \frac{1}{4}e^0(-1) + c_1 e^0 + 3c_2 e^0 = -\frac{1}{4} + c_1 + 3c_2 = 1$

Ed29

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+3c_2=\frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-c_2 \\ 2c_2=\frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1=-\frac{5}{8} \\ c_2=\frac{5}{8} \end{matrix}$$

La sol. del probl. di Cauchy è

$$y(t)=\frac{1}{4}(t^2-t)e^{3t}-\frac{5}{8}e^t+\frac{5}{8}e^{3t}$$

---

II Risolvere $y''+2y'+y=te^{-t}$

1°) EDL 2° ord coeff cost completa ....

2°) Sol omog associata $z''+2z'+z=0$

eq. caratt $\tau^2+2\tau+1=0$

$\tau=-1$

$\to z(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$

3°) Ricerca sol. part. $\bar{y}=p(t)e^{-t}$

$\bar{y}'=e^{-t}(-p+p')$

$\bar{y}''=e^{-t}(p-p'-p'+p'')$

$\cancel{e^{-t}}(p''-\cancel{2p'}+\cancel{p}+\cancel{2p'}-\cancel{2p}+\cancel{p})=t\cancel{e^{-t}}$

$p''=t \Rightarrow p'=\frac{t^2}{2} \Rightarrow p=\frac{t^3}{6}$

$\bar{y}=\frac{t^3}{6}e^{-t} \Rightarrow$ 4°) $y(t)=\frac{t^3}{6}e^{-t}+c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$

Risolvere

Ed30

III $y'' + 9y = t - e^t$

1°) EDL 2° ord. coeff. cost completa con termine noto misto

2°) omog. assoc. $z'' + 9z = 0$

eq. caratt: $r^2 + 9 = 0$ $\quad r = \pm 3i$

Sol:

$z(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$

3°) Cerco una sol per

$y'' + 9y = t$

e una sol per $y'' + 9y = e^t$

$\bar{y}_1 = at + b$

$\bar{y}_1' = a$

$\bar{y}_1'' = 0$

$\Rightarrow 0 + 9at + 9b = t$

$\begin{cases} 9a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$y_1 = \frac{1}{9} t$

$\bar{y}_2 = k e^t$

$\bar{y}_2' = k e^t = \bar{y}_2''$

$\Rightarrow k e^t + 9 k e^t = e^t$

$10k = 1 \quad k = \frac{1}{10}$

$y_2 = \frac{1}{10} e^t$

una sol part per l'eq data è $\frac{1}{9} t - \frac{1}{10} e^t$

$\Rightarrow$ int. generale:

$$y(t) = \frac{1}{9}t - \frac{1}{10}e^{t} + c_1\cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$$

ESERCIZI di COMPITO

$$y'' - 5y' + 6y = te^{t}$$

$$y'' - 6y' + 5y = te^{2t}$$

$$y'' + 3y' + 2y = 2\operatorname{sen} 4t$$

$$y'' + 3y' - 4y = 2e^{t}\cos 3t$$

$$y'' + y = e^{t}(t^2 - 1)$$

$$y'' - 2y' + y = e^{t}$$

$$y'' + y' - 2y = e^{t} + t$$

$$y'' + y = \cos 3t$$

$$y'' + 3y' = \cos 3t$$

$$y'' + 2y' + 3y = 2t^2 - 1$$