$$f(t) = \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}}$$. Stabilire se

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt$$ converge.

$f(t)$ è definita purché $t>0$ poiché questo è il dominio di $t^{5/2}$ e in tale dominio il den. è certam $\neq 0$

Dove è definita $f(t)$ è continua in quanto rapporto di funz cont. con $D \neq 0$ ($\forall t$ del dom.).

$\int_1^b f(t)\,dt$ con $b \in (0,+\infty)$ esiste. Quindi

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt}_{\text{? IMPR. 2ª specie}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt}_{\text{IMPR. 1ª specie}}$$

asintotici per $t \to 0+$ (e per $t \to +\infty$)

$$\frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}} \underset{\uparrow}{\sim} \frac{t^2}{t^{5/2}} = \frac{1}{t^{1/2}} \longrightarrow +\infty$$

per $t \to 0^+$, $\operatorname{sen} t \sim t$ funz non limitata in $(0,1]$

$$\int_{0^+}^{1} \frac{dt}{t^{1/2}} \quad \text{è convergente}$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto asintotico anche $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ converge

Per $t \to +\infty$ non posso calcolare un asintotico poiché $\lim_{t \to +\infty} (\operatorname{sen} t)^2$ non esiste

$$0 \leq \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{t^{5/2}} \leq \frac{1}{t^{5/2}}$$

per il criterio del confronto mediante diseq. visto

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{5/2}}\,dt \quad \text{converge}$$

anche $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Calcolare $\int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{t \to +\infty} -t e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0}$$

deve convergere poiché $x e^x$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza negativa di x

$$\int x \underbrace{e^x dx}_{\text{F.D.}} = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$$

$$F(z) = \int_z^0 x e^x dx = \left[(x-1)e^x\right]_z^0 = -e^0 - (z-1)e^z$$

$$\lim_{z \to -\infty} \left(-1 - \underbrace{(z-1)e^z}_{\downarrow \, 0}\right) = -1$$

M.A. 10.8 (4)

$$\int_{0^{+}}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+\sqrt{x}}{x+x^3\ln(1+2x)}\,dx$$

I.D. l'integranda $\left\{\begin{array}{l} N: \; x \geq 0 \text{ perché } \exists \text{ la def } \sqrt{x} \\ D: \; x(\underbrace{1+x^2\ln(1+2x)}_{\geq 1}) \Rightarrow x \neq 0 \end{array}\right.$

$(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+\sqrt{x}}{x\left(1+x^2\ln(1+2x)\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-\cancel{1}+\sqrt{x}}{x\left(1+x^2\ln(1+2x)\right)} =$$

$\sqrt{x}$ infinitesimo di ord. inf. e quindi prevale

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x\left(1+o(1)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$

$\Rightarrow \int_{0^+}^{e} f(x)\,dx$ converge per il criterio del confronto asintotico, visto che

$\int_{0^+}^{e} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

$\int_{e}^{+\infty} f(x)\,dx$? converge perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+\sqrt{x}}{x\left(1+x^2\ln(1+2x)\right)} =$$ le costanti sommate a ∞ sono ininfluenti

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}}{x^3\ln(2x)} =$$ $\sqrt{x^2}$ è ∞ di ord sup a $\sqrt{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^3(\ln x+\ln 2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x^3\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2\ln x} = 0$$ ← l'integr di I specie potrebbe convergere

$f(x) \sim \frac{1}{x^2\ln x}$ $\quad A = \int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\ln x}$ converge?

$0 < \frac{1}{x^2\ln x} < \frac{1}{x^2}$ in $(e, +\infty)$ e dato che $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ conv anche A conv. $\Rightarrow$ crit. c.A. anche ...

$$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)}}$$

In $(0,+\infty)$ la funzione è def. poiché $t>0$ e quindi $t+2>2 \Rightarrow \sqrt{\ }$ è def. in quanto il radicando è ≥ 0. e quindi anche il den è $\neq 0$.

Inoltre è continua poiché rapporto con den $\neq 0$ di $\sqrt{\ }$ composizioni di funzioni continue.

Si vede che $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$ ($\Rightarrow f(t)$ non limitata) $\Rightarrow$ l'integrale è improprio di I e II specie

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0^+}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$$

per $t\to+\infty$ $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t^2}} = \frac{1}{t}$ che ha int. impr. di I specie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ divergente $\Rightarrow$ anche $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ <u>diverge</u>.

per $t\to 0^+$ $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}}$ poiché $\int_{0^+}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge anche $\int_{0^+}^{1} f(t)\,dt$ <u>converge</u>

e quindi $\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,dt$ DIVERGE