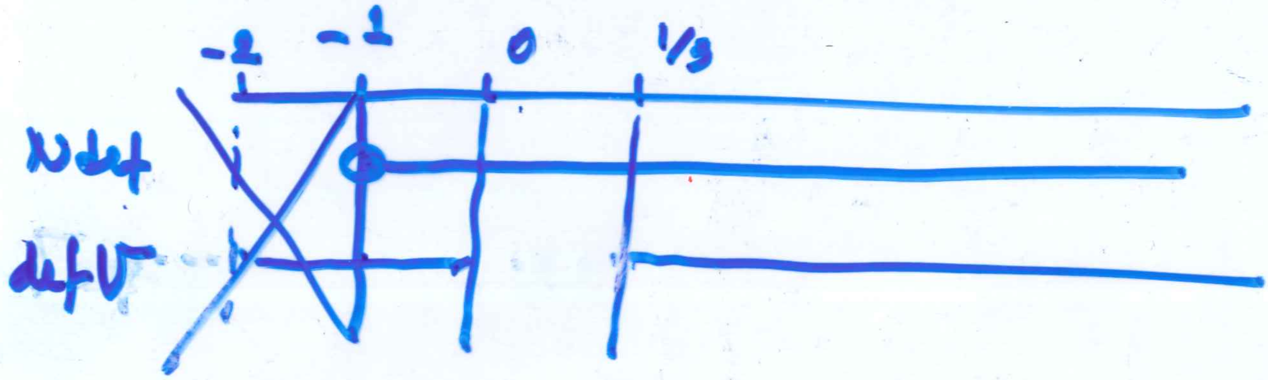
1) $$g(t) = \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t(t+2)(3t-1)}}$$

I.D. di $g(t)$: $\begin{cases} t+1>0 \\ t(t+2)(3t-1)>0 \end{cases}$



$g(t)$ è def in $(-1,0) \cup (1/3, +\infty)$

è cont. in $(-1,0)$

e in $(1/3, +\infty)$

$$G_1(x) = \int_1^x g(t)\,dt$$ funz integrale definita in $(1/3, +\infty)$

$$G_2(x) = \int_{-1/2}^x g(t)\,dt$$ funz integrale definita in $(-1, 0)$

Integrali impropri = limiti delle funz integrali agli estremi dell'I.D.

(2

① $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t(t+2)(3t-1)}}\,dt$ converge o diverge?

per $t \to +\infty$

$$g(t) \sim \frac{\ln t}{\sqrt{3t^3}}$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{3t^3}}\,dt$ converge? Se sì converge anche $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.

$$\frac{\dfrac{\ln t}{\sqrt{3}\cdot t^{3/2}}}{\dfrac{1}{t^k}} = \frac{\ln t}{\sqrt{3}\; t^{3/2-k}}$$

se prendo $k = \frac{5}{4}$ (>0) : $\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}>0$

quindi da un lato

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t/\sqrt{3}\,t^{3/2}}{1/t^{5/4}} = 0$$ per confronto di infiniti

visto sopra

dall'altro

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{5/4}}\,dt$ converge poiché l'esp. di t è > 1

$\Rightarrow$ (criterio del confronto mediante limiti) posso dire, $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{3t^3}}\,dt$ converge

② $\int_{-1/2}^{0^-} g(t)\,dt$ converge?

$$g(t) = \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t(t+2)(3t-1)}} \qquad t \in (-1, 0)$$

per $t \to 0^-$ a chi è asintotica $g(t)$?

se voglio, posso sostituire $s = -t$

$$g(s) = \frac{\ln(1-s)}{\sqrt{+s(2-s)(+3s+1)}} \qquad s \in (0, 1)$$

$$s \to 0^+ \qquad g(s) \sim \frac{-s}{\sqrt{2 \cdot 1 \cdot s}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s}$$

$$\lim_{s \to 0^+} g(s) = 0 = \lim_{t \to 0^-} g(t)$$

limite finito $\Rightarrow$ l'integrale non è improprio di II specie poiché la funz. è limitata in $[-\frac{1}{2}, 0)$ e quindi basta un integr. generalizzato (certam. convergente)

$$G_1(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t(t+2)(3t-1)}}\,dt$$

è una funz. integrale

1) Qual è il suo I.D.? $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

2) dove è crescente?

$G_1'(x)=g(x)$ per il

TEOR. FOND. DEL CALCOLO

Dove $g(x)>0$? $\quad \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x(x+2)(3x-1)}}>0$

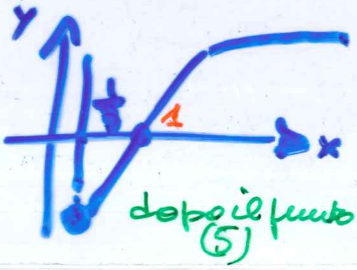
$\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(1+x)>0\\ x\in(1/3,+\infty)\end{cases}$ cioè sempre

Quindi $G_1(x)$ è crescente in $(1/3,+\infty)$

3) Zeri della funzione $G_1(x)$? (ne ha al più 1 poiché è monotona)

$G_1(1)=0$ poiché è $\int_1^1 g(t)\,dt=G_1(1)$

4) Segno



$G_1(x)>0$ per $x>1$

$G_1(x)<0$ per $x\in(1/3,1)$.

(5

3) limiti agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} G_1(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t(t+2)(3t-1)}}\,dt$$

è convergente quindi il limite è finito.

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} G_1(x) = -\int_{\frac{1}{3}^+}^{1} g(t)\,dt$$

è improprio?

per $t \to \frac{1}{3}^+$

$$g(t) \sim \frac{\ln 4/3}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}(3t-1)}} =$$

Sì

$$= \frac{3}{\sqrt{7}} \ln\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3t-1}} \to +\infty$$

$$\int_{\frac{1}{3}^+}^{1} \frac{1}{\sqrt{3t-1}}\,dt = \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} \left[\frac{2}{3}\sqrt{3t-1}\right]_x^1 \text{ finito}$$

$$3t-1 = s \Rightarrow 3\,dt = ds$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{3t-1}} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{2}{3}\sqrt{s} + c$$

per il criterio del confronto anche $\int_{1/3^+}^{1} g(t)\,dt$ è finito e quindi anche il suo opposto che è il limite cercato.

2) $g(t) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}} - e^{-\sqrt{t}}}$

dominio — $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ e^{\sqrt{t}} \neq e^{-\sqrt{t}} \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ \sqrt{t} \neq -\sqrt{t} \quad \text{cioè } t \neq 0 \end{cases}$

Dominio: $(0, +\infty)$

per $t \to +\infty$

$g(t) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}} - \underbrace{e^{-\sqrt{t}}}_{\to 0}} \sim \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}}$

$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}}\,dt$ converge?

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2}{e^{\sqrt{t}}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{t})^4}{e^{\sqrt{t}}} = 0$

Visto che $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\,dt$ converge, anche

$\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}}}\,dt$ conv. (criterio del conf. con i limiti)

e per il crit. del cfr. asintotico anche $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.