FUNZIONI NUMERICHE (REALI DI VARIABILE REALE)

Esempi

- spostamento di un grave lasciato cadere (da una altezza h) in dipendenza del tempo:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

- Volume di una sfera in dipendenza del suo raggio

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- Trasformazioni isoterme (di una mole di gas ideale)

$$p(V) = RT \cdot \frac{1}{V}$$

(p = pressione, V : volume, T = temperatura assoluta : costante, R = 1.986 cal/grado)

Tutte queste "leggi" sono definite per ogni valore reale di t, r e per ogni valore non nullo di V, ma hanno significato (cioè rappresentano un problema reale) solo se escludo i valori negativi.
Cioè, nei problemi concreti non basta una legge per descrivere una funzione.
Qualcosa di analogo si vedrà a fine corso quando si cercheranno le funzioni soluzione di un'eq. differenziale che abbiano grafico che passa per un certo punto del piano e si vedrà che in alcuni casi bisognerà considerare i valori assunti dalla legge solo su un intervallo.

FORMALIZZIAMO

Elementi essenziali per poter parlare di funzione:

- un insieme "di partenza" A : DOMINIO della funzione
- un insieme "di arrivo" B : CODOMINIO della funzione

Non ho la pretesa di prendere in esame solo oggetti che provengono da A
Dico solamente se devo pensare che la funz. prenda valori reali ($B=\mathbb{R}$) o complessi ($B=\mathbb{C}$) o interi ($B=\mathbb{Z}$) ecc.

- una legge f che a ogni elemento x del DOMINIO associa 1 e 1 sol elemento y del CODOMINIO ($\rightarrow$ UNIVOCITÀ)

Queste 3 cose insieme definiscono una funzione che descriverò simbolicamente così:

$$f : A \longrightarrow B.$$

L'elemento x che varia nel dominio A è detto variabile INDIPENDENTE
L'elemento y corrispondente di x è detto variabile DIPENDENTE.
Si usa scrivere $f(x)=y$.
ATTENZIONE: la legge f deve essere univoca
Il più grande dominio su cui la legge f è dotata di senso è detto INSIEME di DEFINIZIONE (o campo di esistenza) di f.

Sia $f: A \to B$ una funzione.

Chiamo IMMAGINE di f il sottoinsieme degli elementi $y \in B$ tali che per almeno un $x \in A$ risulti $y = f(x)$.

In simboli

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{ y \in B \mid \underset{\text{esiste}}{\exists} x \in A \text{ per cui } f(x) = y \}$$

Per poter parlare di grafico di f è necessario premettere la nozione di CARTESIANO di 2 insiemi A e B: è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di elementi, il primo tratto di A, il secondo tratto da B. Si denota con $A \times B$.

In simboli:

$$A \times B = \{ (a, b),\ a \in A,\ b \in B \}$$

Il grafico di $f: A \to B$ è il sottoinsieme di $A \times B$ formato dalle coppie $(a, f(a))$:

$$G(f) = \{ (x, y) \in A \times B \text{ con } y = f(x) \} =$$
$$= \{ (x, f(x)),\ x \in A \}$$

Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (eventualmente coincidenti con $\mathbb{R}$) si ha l'ordinaria nozione di grafico.

N.B. Se $A = B = \mathbb{R}$ invece di scrivere $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si scrive $\mathbb{R}^2$

ESEMPI

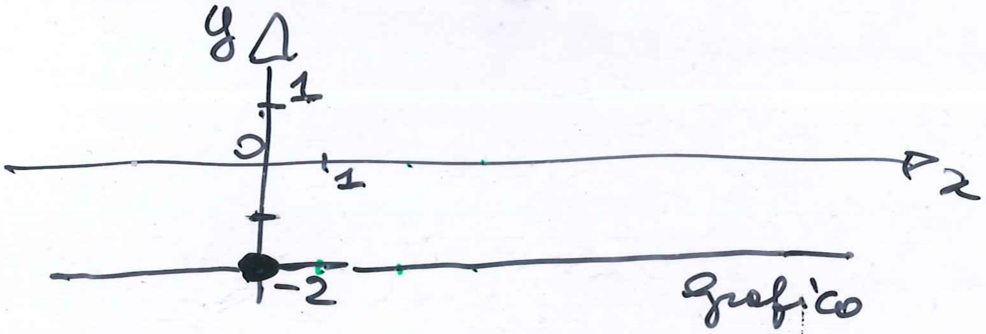
① $f(x) = -2$ Legge univoca!

$\forall x \in \mathbb{R}$ associo $y = -2$

dominio A : $\mathbb{R}$
codominio B : $\mathbb{R}$

$\text{Im} f = \{ y \in B \mid \exists x : f(x) = y \} \ni -2$

$= \{-2\}$



$y = -2$

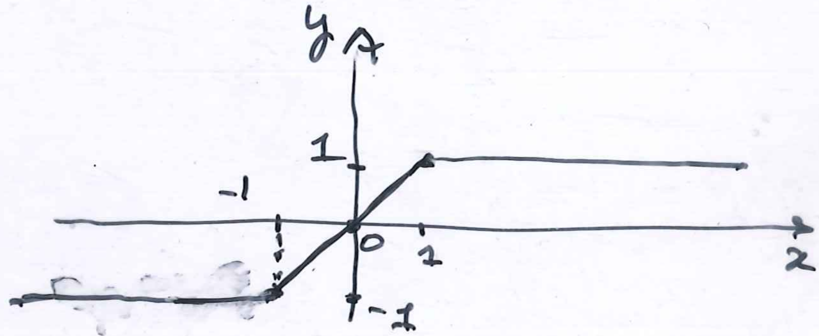
② $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ x & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Definita a tratti

DOMINIO : $\mathbb{R}$

CODOMINIO : $\mathbb{R}$

IMMAGINE : $[-1, 1]$



(3)

IN GENERALE:

$f(x) = 4 - 2x$ $\qquad$ $f(x) = ax + b$

x compare con grado 1 → LINEARE (??)

DOM. = CODOM = $\mathbb{R}$

Immagine = $\mathbb{R}$

Se prendo un qualunque $\bar{y} \in \mathbb{R}$ $\exists$ un $\bar{x}$ ($\in \mathbb{R}$ DOM.) t.c.

$$\bar{y} = 4 - 2\bar{x} \quad ?$$

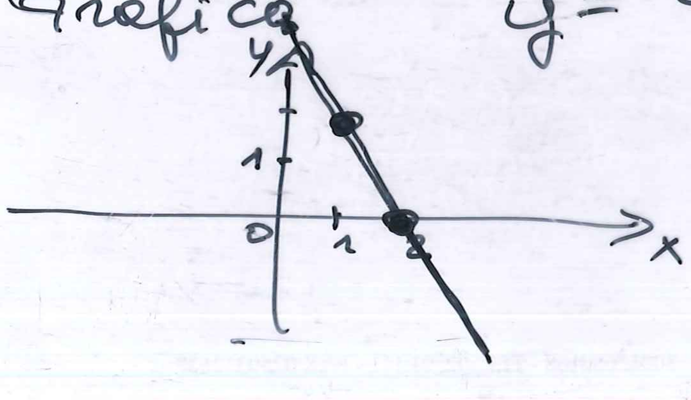
Risolvo l'eq. in x

$$2x = 4 - \bar{y}$$
$$x = 2 - \frac{1}{2}\bar{y}$$

Ad es. se $\bar{y} = 0$ $\quad x = 2$

$\bar{y} = 2$ $\quad x = 1$

Grafico $\quad y = 4 - 2x$ è l'eq. di una retta. Calcolo 2 suoi punti:



x	2	1
f(x)	0	2

e li congiungo

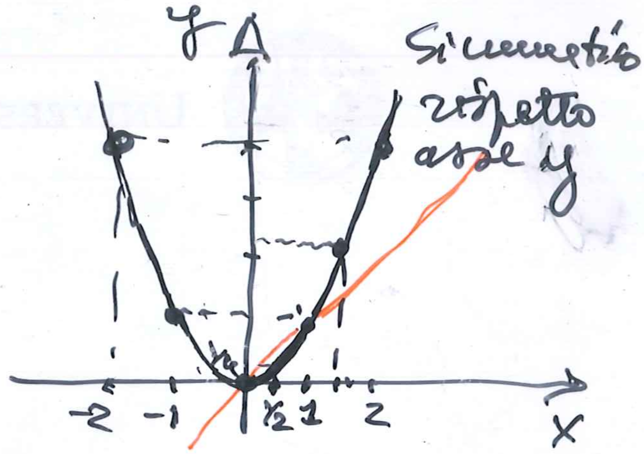
④ $f(x) = x^2$

DOMINIO : $\mathbb{R}$

CODOMINIO : $\mathbb{R}$

IMMAGINE : $[0, +\infty)$

$\boxed{\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad f(\bar{x}) = f(-\bar{x})}$



x	0	1	2	1/2	3/2
$f(x)$	0	1	4	1/4	9/4

Definizione: dico che

$$f : \underset{\mathbb{R}}{\overset{A}{\cap}} \to \underset{\mathbb{R}}{\overset{B}{\cap}}$$

è una <u>funzione pari</u> se $\forall a \in A$ si ha

$$f(-a) = f(a)$$

È necessario che il dominio A sia un insieme "simmetrico rispetto all'origine"

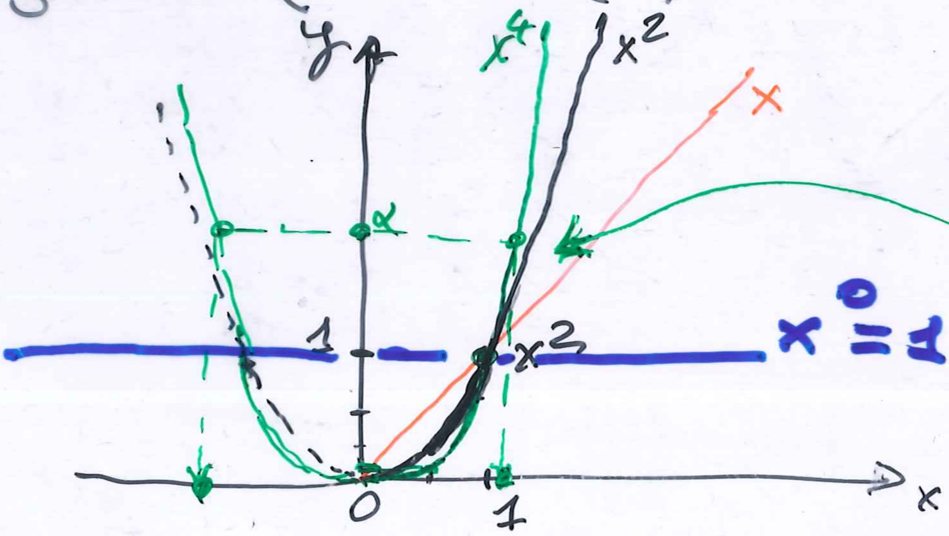
Ad es. $[-2, -1] \cup [1, 2]$

$(-2, -1] \cup [1, 2)$ ecc.

(5) $f(x) = x^{2k}$ k intero ≥ 0 → grafico SIMM. risp. asse y.

sono tutte funzioni pari con dominio $\mathbb{R}$

immagine se $k>0$ $\left(x^{2k} = (x^k)^2 \geq 0 \right)$: $[0, +\infty)$



$x^{2k} = \alpha$ Ha soluzioni? Quante ne ha?

Se $\alpha \geq 0$ ha soluzioni (poiché $\operatorname{Im}(x^{2k}) = [0, +\infty)$)

Se $\alpha < 0$ non ha soluzioni

Conseguenze pratiche. Se $x \in \mathbb{R}$

$x^2+1=0$ non ha soluzioni!

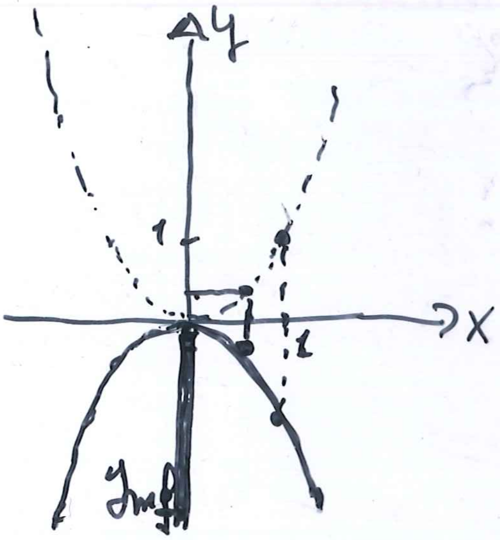
$x^2+1 \geq 1$ SEMPRE!

Se $\alpha \geq 0$ quante soluz. ci sono?

sono 2 per $\alpha > 0$; 1 per $\alpha = 0$

VEDI IL GRAFICO

⑥ $f(x) = -x^2$ $\qquad g(x) = x^2$



dominio $\mathbb{R}$

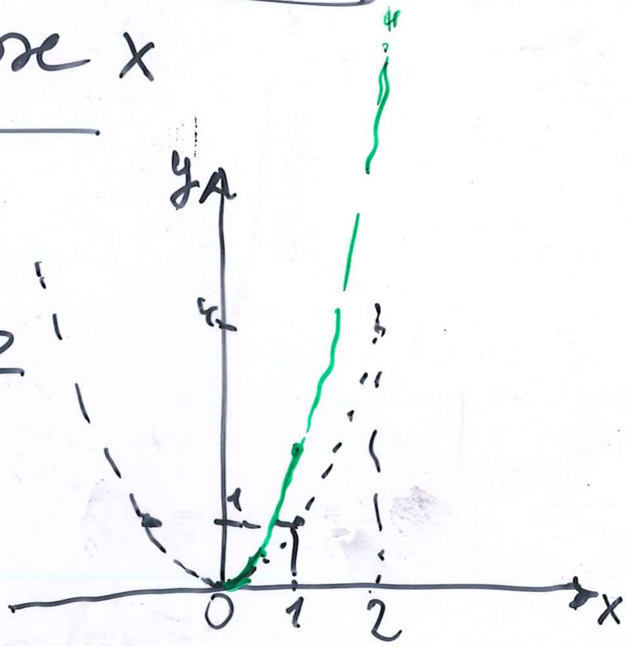
immagine $(-\infty, 0]$

In generale il grafico di $f(x) = -g(x)$ ha lo stesso dominio, l'immagine simmetrica rispetto all'origine (siamo sull'asse y!) e grafico simmetrico del grafico di $g(x)$ rispetto all'asse x

⑦

$f(x) = 2x^2$

fattore di dilatazione 2 lungo l'asse y



⑧

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \quad \frac{3}{4}$

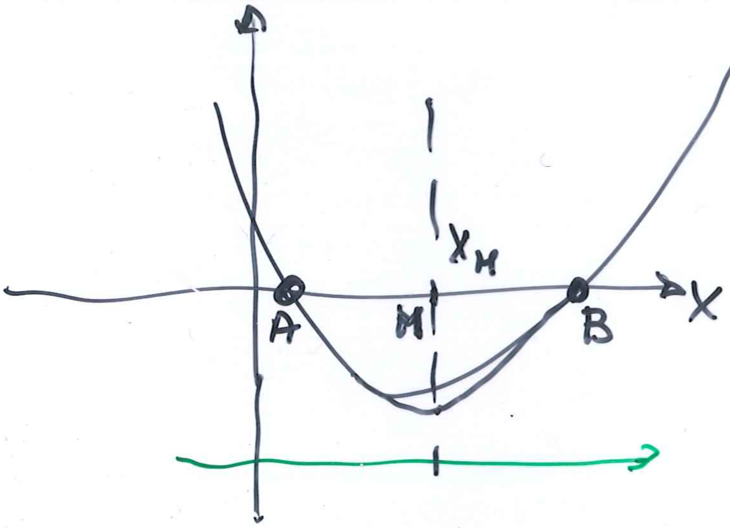
DOMINIO $\mathbb{R}$

IMMAGINE ? → Grafico: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

l'eq. rappresenta una parabola convessa con asse // asse y

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

IDEE SU COME TROVARE L'IMMAGINE di questa funzione.
Se la parabola taglia l'asse x in A e B l'asse di simmetria taglia x nel punto medio M di AB



$AM = MB$

$x = x_M$

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ ove x_A, x_B sono le soluz. di

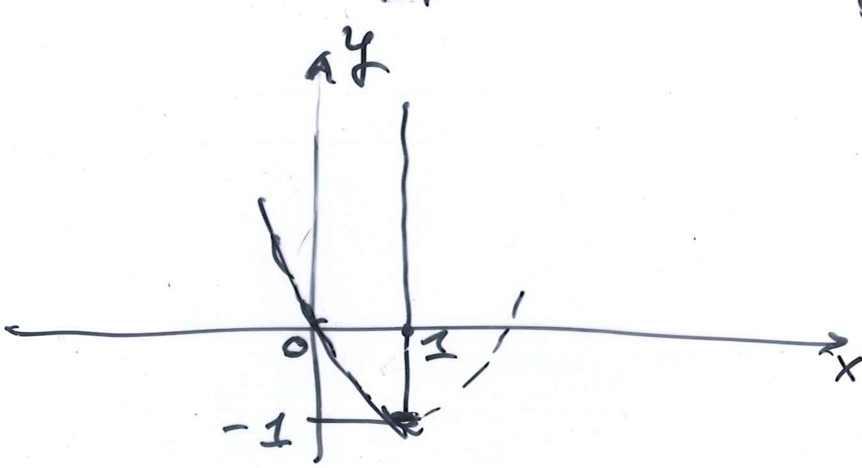
$ax^2 + bx + c = 0$

(se parto da $f(x) = ax^2 + bx + c$)

$x_A + x_B = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-b}{2a}$

$x_M = \dfrac{+1/2}{2 \cdot 1/4} = +1$ $\qquad$ asse: $x = 1$

ordinata del vertice $f(1) = -1$



$\mathrm{Im} f = [-1, +\infty)$

poiché la parabola, essendo convessa, giace tutta nel semipiano superiore individuato dalla retta passante per il vertice e parallela all'asse x: $y = -1$

Risolviamo una disequazione

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

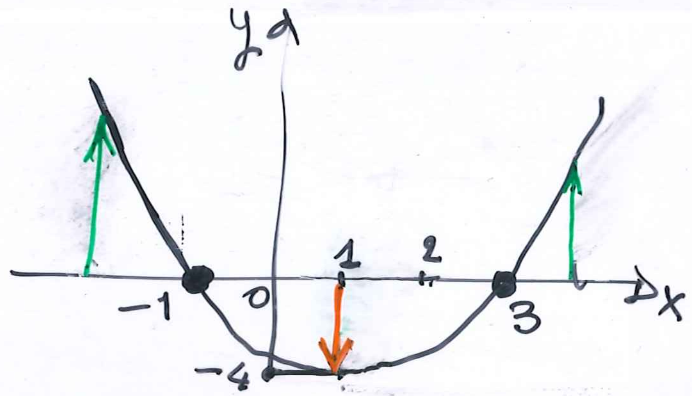
Lo facciamo studiando il grafico di x^2-2x-3.

1°) trovare gli zeri della funzione

$$g(x) = x^2 - 2x - 3$$

cioè gli x t.c. $g(x)=0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x=-1 \text{ o } x=3$$



2°) per studiare il segno osserviamo che la parabola è convessa e quindi ha un andamento come quello in figura. Ne segue

$g(x)>0$ esternamente agli zeri, cioè in

$$(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$$

$g(x)<0$ internamente agli zeri, cioè in

$$(-1,3).$$