INF e SUP di un insieme. Verifiche esplicite.

$$A = \left\{ \frac{2n-3}{n} = a_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ interi positivi} \right\}$$

1) è sup. limitato?
2) è inf. limitato?
3) è dotato di Sup (?) → Max.
4) è dotato di Inf (?) → min.

Osservo che $a_n = \frac{2n-3}{n} = 2 - \frac{3}{n}$
Ora, al crescere di n, $\frac{3}{n}$ decresce (assume i valori $3, \frac{3}{2}$, $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{3}{4}$, ecc.) mentre $-\frac{3}{n}$ cresce $\Rightarrow$ $\forall n: a_n \geq a_1 = 2-3$.
Inoltre $-\frac{3}{n} < 0$ e quindi $\forall n$: $a_n = 2 - \frac{3}{n} < 2$. Dunque:

$$\forall n: \ -1 \leq a_n < 2$$

cioè l'insieme A è inf. limitato
e sup. limitato
⇕
limitato

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ Sup A, Inf A (TEORIA: assioma di completezza di $\mathbb{R}$)

Voglio cercarli. Ricordo che:
$S = \text{Sup} A$ è il più piccolo dei maggioranti di A
cioè:

- $\forall a_n \in A$ risulta $a_n \leq S$
  S: Maggiorante
- $\forall y \in \mathbb{R}$ t.c. risulti $a_n \leq y$
  si ha $S \leq y$
  S è il + piccolo dei magg.

Similmente per Inf A.

Ho visto che -1 è un minorante di A e 2 è un maggiorante di A. È VERO che $\operatorname{Inf} A = -1$ e $\operatorname{Sup} A = 2$?

Esamino il caso di Sup A. Il numero 2 non sarebbe Sup A se non fosse il più piccolo dei maggioranti. Quindi mi chiedo: PUÒ ESISTERE $y < 2$ t.c. $\underline{\forall n} = 1, 2, 3 \ldots$ si abbia

$$(*) \qquad a_n = \frac{2n-3}{n} < y \quad ?$$

Cioè può esistere $y < 2$ t.c.

$\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ si abbia $2 - \frac{3}{n} < y$?

$$\Longleftrightarrow \forall n: \ \frac{3}{n} > 2 - y \quad ?$$

NO. Infatti anche se prendo y molto vicino a 2, ad esempio $y = 2 - \frac{1}{10^k}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$ grande quanto voglio) esiste certamente un $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ che soddisfa la disuguaglianza opposta

$$\underbrace{\frac{3}{n}}_{>0} < 2 - y = \underbrace{\frac{1}{10^k}}_{>0}$$

Basta prendere

$$\frac{n}{3} > 10^k \Longleftrightarrow n > 3 \cdot 10^k$$

Quindi $\exists n$ per cui $(*)$ è falsa: cioè $(*)$ non è vera $\forall n$.

Quindi concludo che $S = 2$ è Sup A ma non è max A poiché $2 \notin A$.
Analog. per -1 (ma è più facile poiché $-1 \in A \ldots$); $-1 = \min A$ poiché $-1 \in A$.

$f: \underset{\text{Dom.}}{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dico che f è una funzione DISPARI se

$\forall\, x \in A$ si ha $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

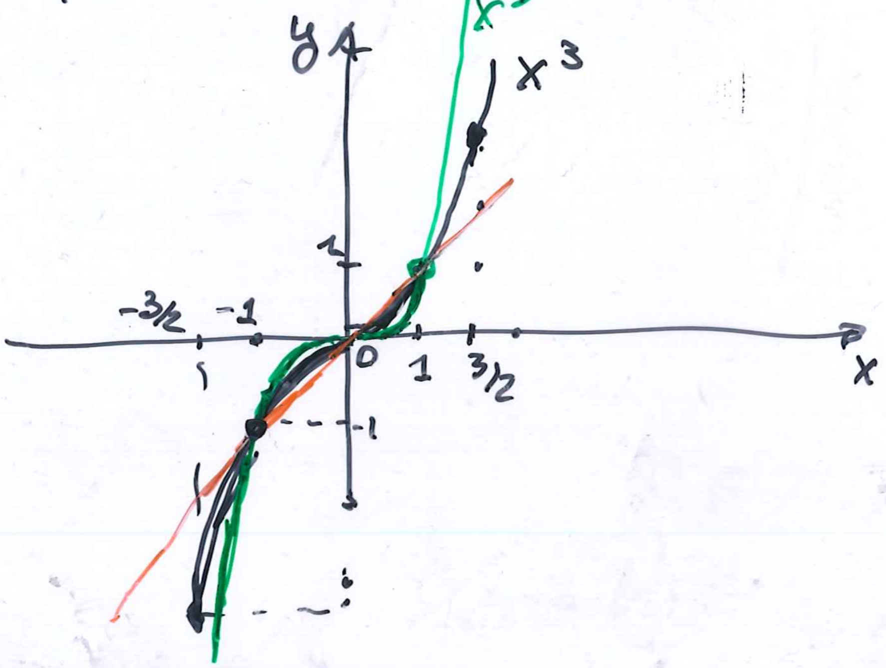
Ovviamente il dominio A deve essere simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPI

① $f(x) = x^3$

I.D. : $\mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x)$



$f(1/2) = 1/8$

$f(3/2) = \frac{27}{8}$

Questa, come ogni funzione dispari, ha grafico simmetrico rispetto all'origine.

② $f(x) = x^{2k+1}$ con $k \geq 0$, intero

Stessa situazione se ad es. prendo $k=2$ $\quad (f(x) = x^5)$

$f(3/2) = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32} \sim 8$ $\quad$: x $x > 1$ $\quad x^5 > x^3$

$f(1/2) = 1/32$ $\quad$ se $0 < x < 1$ $\quad x^5 < x^3$

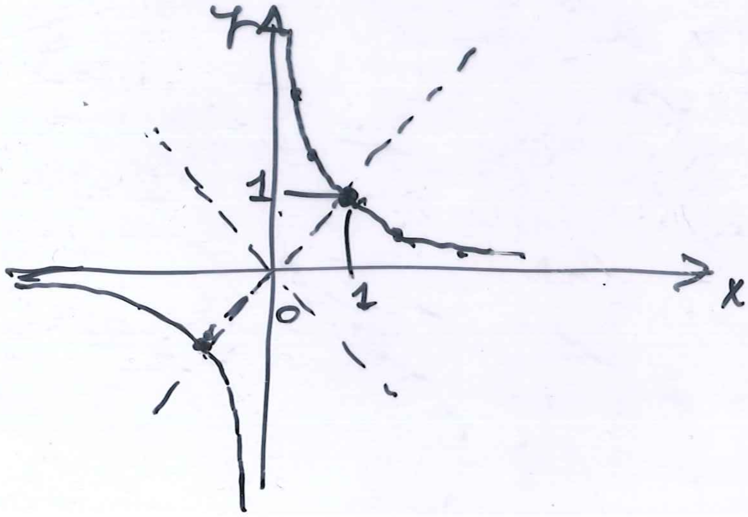
(3) $f(x) = \frac{1}{x}$

I.D. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: Per trovarla osservo che $\exists x$ tale che

$\bar{y} = \frac{1}{x} \overset{\text{Risolvo rispetto a } x}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1}{\bar{y}}$

$\Leftrightarrow \bar{y} \neq 0$



$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} =$

$= -f(x)$

è dispari.

Immagine nel caso di x^{2k+1}?

Per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$

Cerco x t.c. $x^{2k+1} = \bar{y}$ $\quad (x^3 = \bar{y})$

$x = \sqrt[2k+1]{\bar{y}}$

posso trovarlo poiché so che l'equazione

$$x^n = \bar{y}$$

è risolubile $\forall \bar{y} > 0$ (e $n \geq 1$) e la soluzione è unica se cerco $x > 0$.

Se $\bar{y} = 0$ la soluzione è $x = 0$. E se $\bar{y} < 0$?

Se n pari (come già visto) non ci sono soluzioni; se n dispari sfrutto il fatto che $x^n = -\bar{y}$ ha soluzione (positiva) $\bar{x} = \sqrt[n]{-\bar{y}}$ e poi osservo che

$(-\bar{x})^n = (-1)^n (\bar{x})^n = -(\sqrt[n]{-\bar{y}})^n = -(-\bar{y}) = \bar{y} \Rightarrow$ cioè $-\bar{x}$ è soluzione di $x^n = \bar{y}$.

$$|x-1| \le 7$$

Per risolverla ho almeno 2 strade.

A) Ricordo che

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \ge 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Quindi spezzo la disuguaglianza in due sistemi

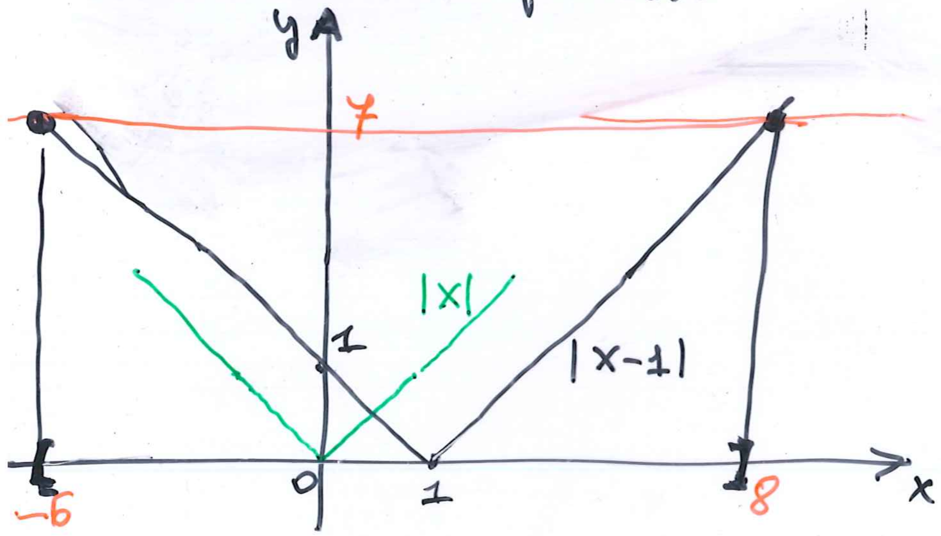
$$(1)\ \begin{cases} x-1 \le 7 \\ x \ge 1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 1-x \le 7 \\ x < 1 \end{cases}$$ e unisco le soluzioni

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1,8] \qquad \begin{cases} x \ge -6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-6, 1)$$

$\Rightarrow$ soluzioni $[-6, 8]$

E' abbastanza faticoso



B) traccio il grafico e confronto con $y=7$

$f(x) = |x-1|$

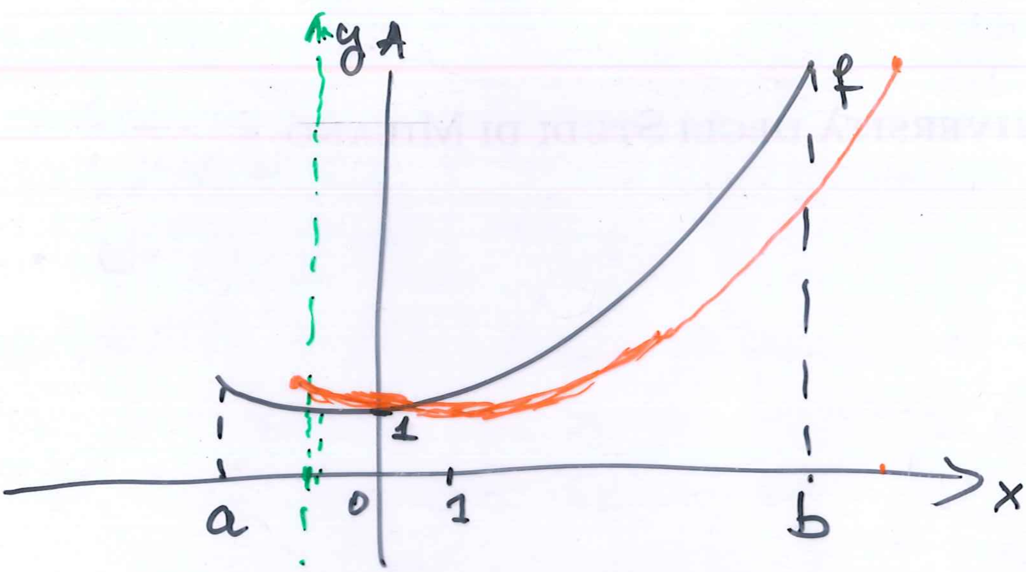
ha il grafico a fianco. Ho composto nell'ordine:

$$x \xmapsto{(\,)-1} x-1 \xmapsto{|\,|} |x-1|$$ e questo significa rileggere il grafico del val. assoluto spostando l'asse y di 1 in verso opposto a x.

L'intervallo soluzione è quello compreso tra le 2 soluz. dell'eq. $|x-1|=7$

VEDIAMO IN GENERALE COME SI TRASFORMA IL Grafico di una funzione del tipo

$$f(x-1)$$



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

1°) $f(x-1)$ dove è definita? $[a+1, b+1]$

2°) qual è la sua immagine? $= \mathrm{Im} f$

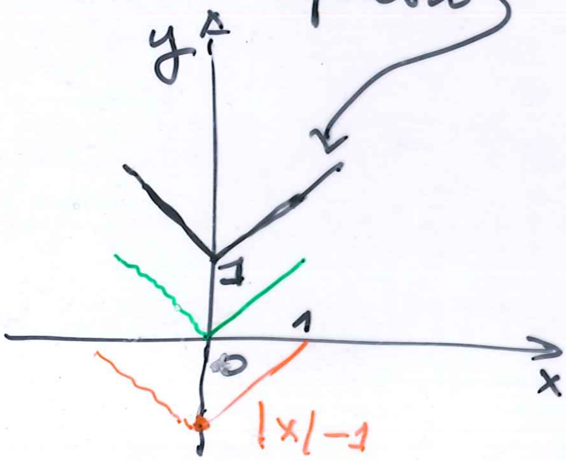
3°) qual è il suo grafico?

$$x \xmapsto{(\,)-1} x-1 \xrightarrow{f} f(x-1)$$

devo spostare dominio e grafico di 1 unità nella ~~ad~~ direzione e nel verso dell'asse x se voglio il grafico nel sistema di riferimento di $f(x)$

In generale il grafico di $f(x+k)$ è TRASLATO di quello di $f(x)$ nella direz. dell'asse x, di $|k|$ unità, nel verso di x se $k<0$, in quello opposto se $k>0$.

Invece il grafico di $|x|+1$ è questo



In generale $f(x)+\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

- è definita là dove lo è f
$$\left(x \xmapsto{f} f(x) \xrightarrow{(\,)+\alpha} f(x)+\alpha \right)$$
- ha immagine ha l'immagine di f traslata di α nella direz. e verso ~~..~~ dell'asse y se $\alpha>0$, e verso opposto se $\alpha<0$

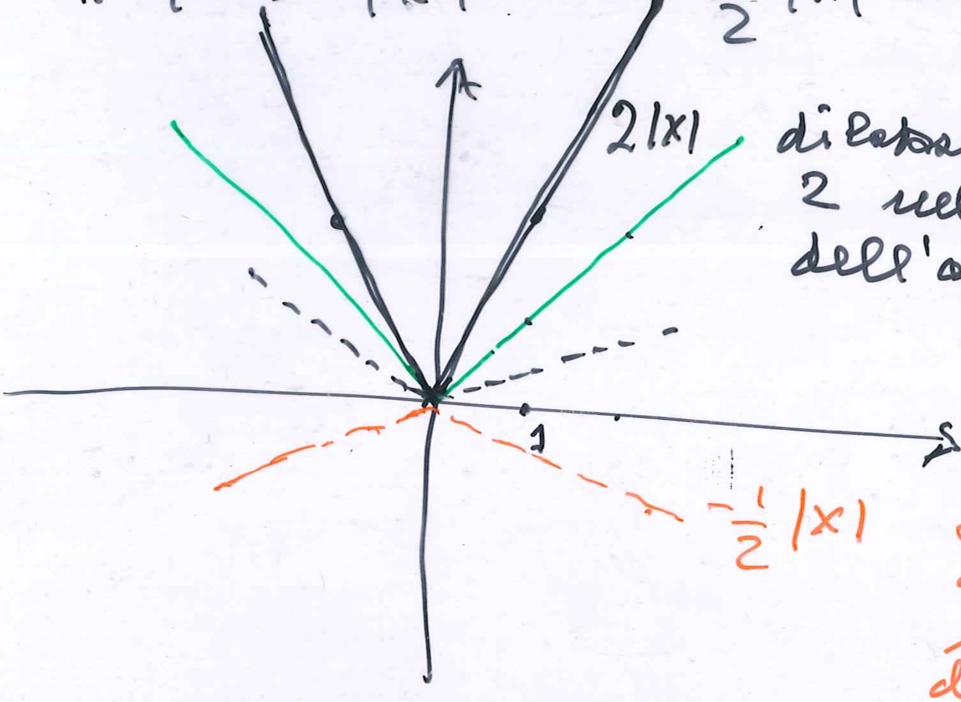
$$f(x) = 2|x|$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}|x|$$

Invece questo è l'effetto di applicare una "dilatazione" "dopo" aver applicato il valore assoluto

$$x \xrightarrow{|\ |} |x| \xrightarrow{2\cdot(\ )} 2|x| = f(x)$$

$$x \xrightarrow{|\ |} |x| \xrightarrow{\frac{1}{2}(\ )} \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{-(\ )} -\frac{1}{2}|x| = g(x)$$



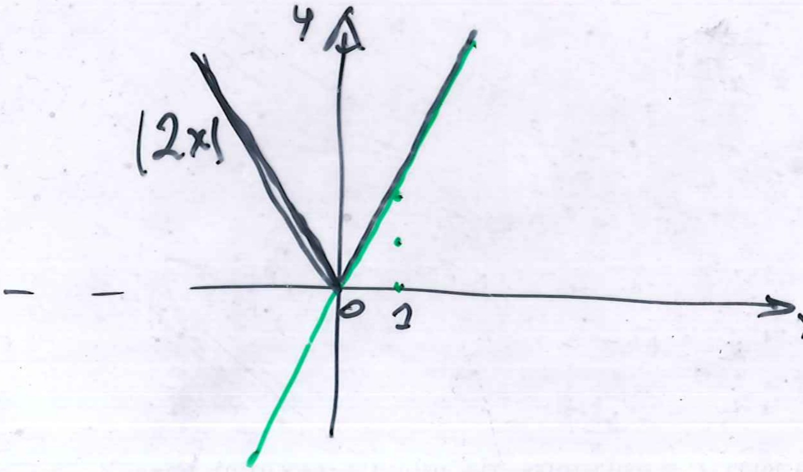
dilatazione di un fattore 2 nella direz. e verso dell'asse y

dilatazione di un fattore $\frac{1}{2}$ nella direz. dell'asse y e verso opposto.

e questo è l'effetto di applicare "prima" la dilatazione:

$$h(x) = |2x|$$

$$x \xrightarrow{2(\ )} 2x \xrightarrow{|\ |} |2x|$$

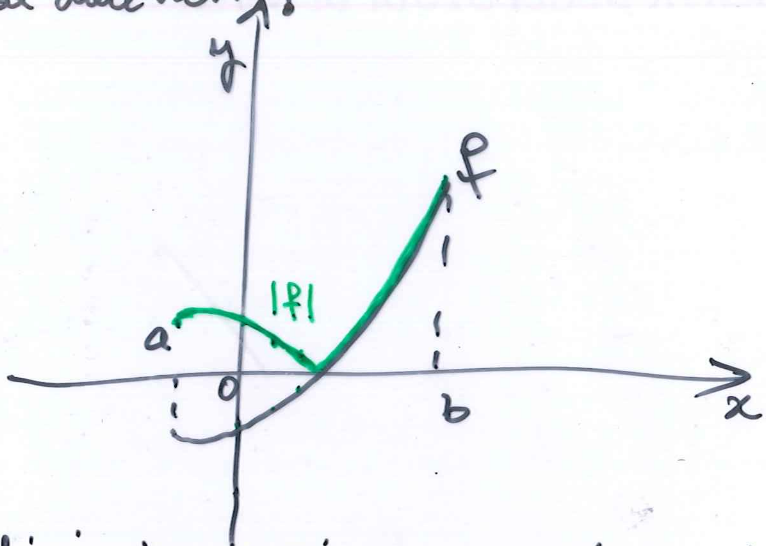


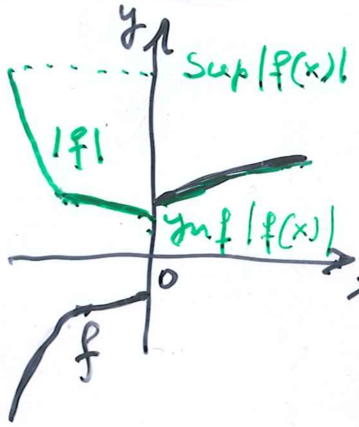
(ribaltamento rispetto all'asse x della parte del grafico con ordinate < 0)

In generale:

$f(x)$ composta con il modulo?

Dipende dall'ordine!





I grafici riportati sopra corrispondono alla composizione:

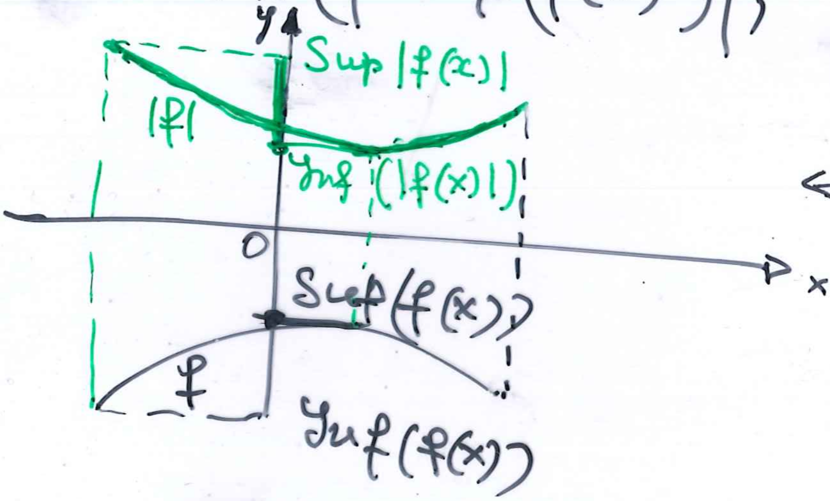
$g(x) = |f(x)|$ $\qquad x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{|\ |} |f(x)|$

il grafico è ottenuto da quello di $f(x)$ ribaltando rispetto all'asse x i punti del grafico che giacciono nel semipiano delle $y < 0$

$Im(|f(x)|) = ?$ Sicuramente $\subseteq [0, +\infty)$

Se f è limitata chi è $Sup(|f(x)|)$?

è $\max(|Sup(f(x))|, |Inf(f(x))|)$



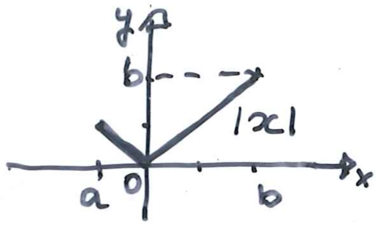
Spiega perché può essere complicato trovare $Sup(|f|)$ e $Inf(|f|)$

Altro ordine di composizione

$g(x) = f(|x|)$, cioè $x \overset{|\cdot|}{\longmapsto} |x| \xrightarrow{f} f(|x|)$

Innanzitutto il dominio di $g(x)$ può essere molto diverso da quello di $f(x)$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$



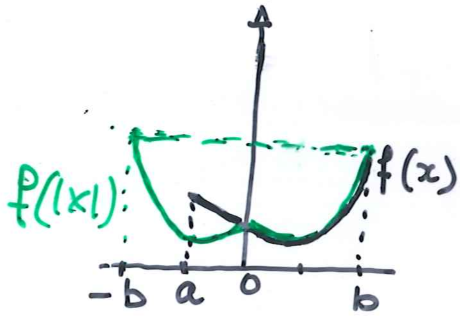
$\boxed{\text{Se } a<0<b \text{ e } |a|<|b|}$

$f(|x|)$ ha dominio $[-b,b]$

(Infatti $\forall x \in [-b,b]$, $|x| \in [0,b]$ e quindi si può calcolare $f|x|$)

GRAFICO

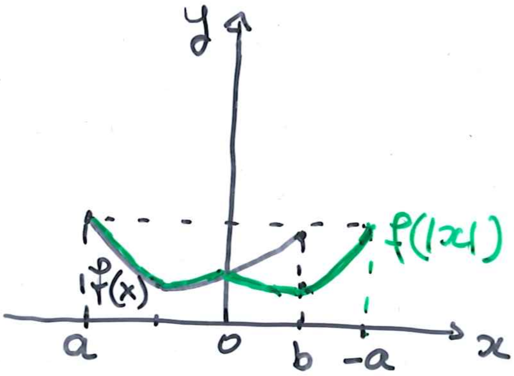
è ottenuto unendo il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[0,b]$ con il suo simmetrico rispetto all'asse y nell'intervallo $[-b,0]$



$\boxed{\text{Se } a<0<b \text{ e } |a|>|b|}$

$f(|x|)$ ha dominio $[a,-a]$

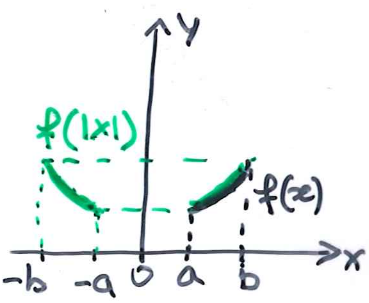
e grafico simile al precedente ma ottenuto a partire dal grafico di $f(x)$ in $[a,0]$



$\boxed{\text{Se } 0<a<b}$

$f(|x|)$ ha dominio $[-b,-a] \cup [a,b]$

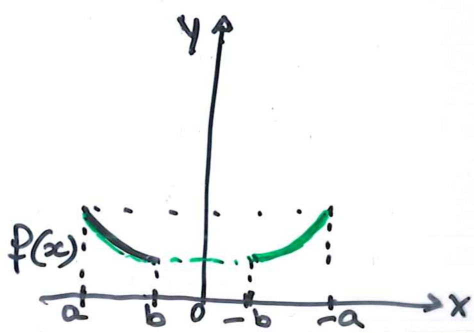
e grafico ottenuto unendo il grafico di $f(x)$ e quello del suo simmetrico rispetto all'asse y.



$\boxed{\text{Se } a<b<0}$

$f(|x|)$ ha dominio $[a,b] \cup [-b,-a]$

e grafico come sopra.



IN TUTTI I CASI IL RISULTATO È UNA FUNZIONE PARI.