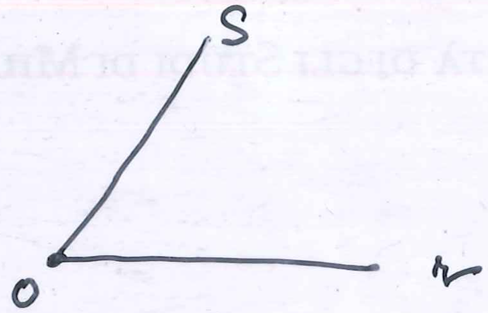
Angolo



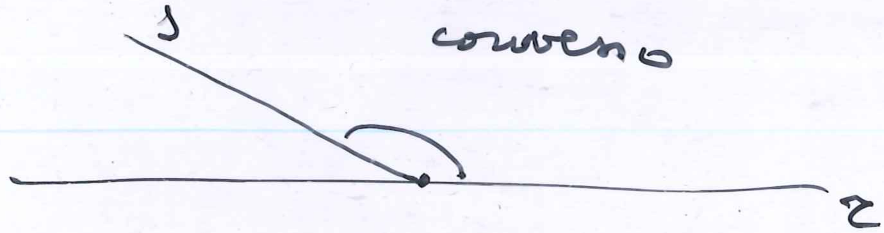
Visione della geometria elementare

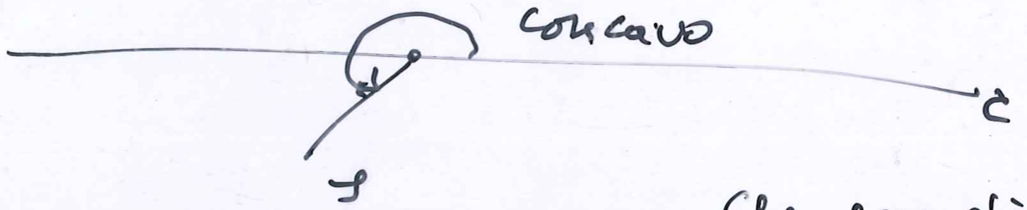
ciascuna delle 2 parti in cui la coppia di semirette r, s suddivide il piano.

se r è opposta di s : angolo piatto. Invece:

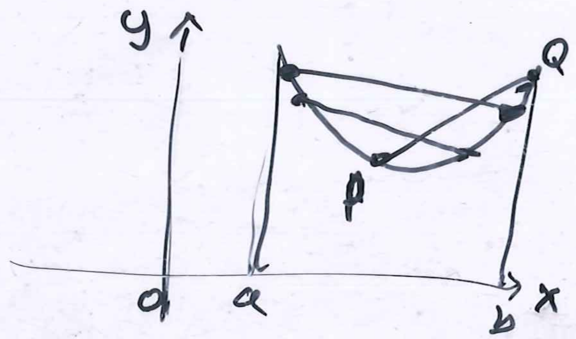
giro 

seconcavo
↳ seconvesso angolo nullo.



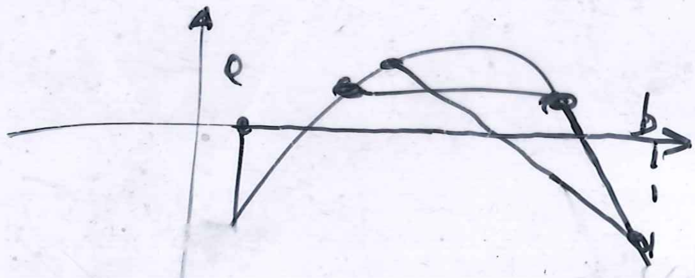


Che cosa c'è dietro le parole CONVESSO e CONCAVO?



convesso

Nel caso dei grafici: per ogni coppia P, Q di punti del grafico il segmento PQ giace "SOPRA" o "SOTTO" il grafico



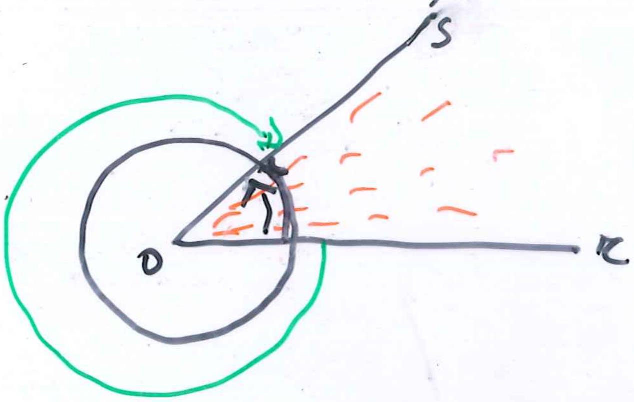
concavo

È come se si pensasse alla regione superiore delimitata dalle rette $x=a$, $x=b$ e dal grafico e si chiedesse che il segmento PQ sia interno a tale regione (nel caso CONVESSO) ecc.

Misura di angoli

gradi $\longrightarrow$ radianti

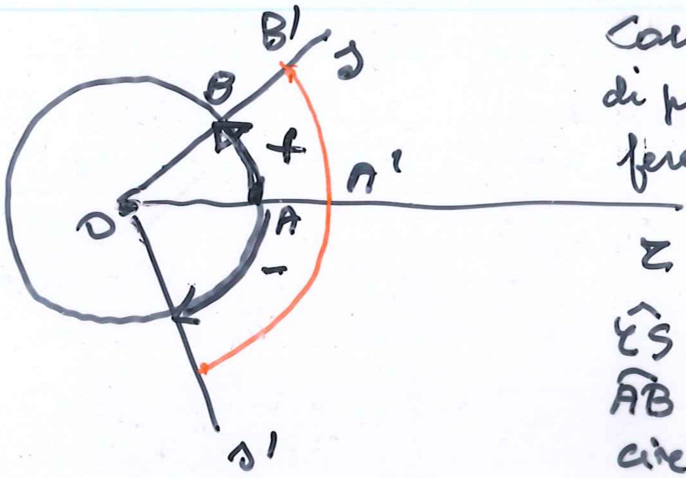
(e loro frazioni: descrizione non "continua")



Per introdurli passo a una <u>visione</u> <u>dinamica</u> <u>dell'angolo</u>
Parte di piano spazzata da una semiretta di origine O per andare da r a s

Ma la semiretta si muove in verso ANTIORARIO o in verso ORARIO?

E per caso arriva a s dopo aver percorso diversi giri in verso antiorario o orario? Devo tenerne conto.



Come? Fisso r come semiretta di partenza. Traccio una circonferenza con centro nell'origine O della semiretta e raggio $\overline{OA} = R$.
$\widehat{rs}$ è proporzionale all'arco $\widehat{AB}$ tagliato da r e s sulla circonferenza.
Se prendo un'altra circonferenza con centro O e raggio $\overline{OA'} = R'$ l'arco $\widehat{A'B'}$ è diverso da $\widehat{AB}$ ma si sa che

$$\frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\widehat{A'B'}}{\overline{OA'}}$$

Questo rapporto tra arco e raggio (che è un numero <u>senza</u> <u>unità</u> <u>di misura</u>) è un INVARIANTE dell'angolo e si adatta bene a darne una misura: la misura in RADIANTI.
Se la semiretta si muove in verso antiorario daremo a tale misura il segno +, se in verso ORARIO il segno −.

Corrispondenze fra misure in gradi e radianti: 3

angolo giro: 2π

$$2\cdot 3.14 < 2\pi < 2\cdot 3.15$$

(2π è la lunghezza della circonferenza di raggio 1)

angolo piatto : π (è la metà del giro)

retto : $\frac{\pi}{2}$ (è la metà del piatto)

gradi	360	180	90	45	60	30
rad	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

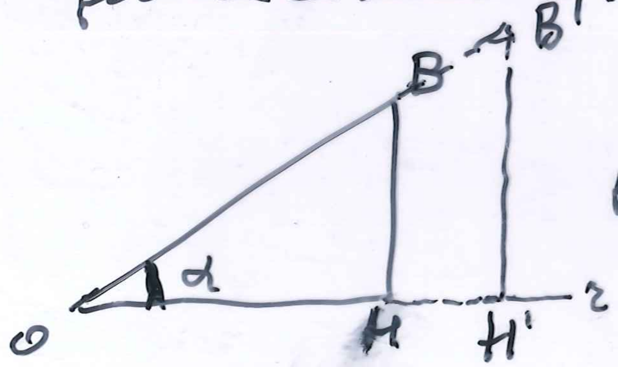
in generale:

$$180 : \alpha^{\circ} = \pi : \alpha^{rad}.$$

Di solito
Cerco la misura in radianti di un angolo prendendo la circonf. che ha centro nel vertice dell'angolo e raggio 1:

in questo modo $\frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\widehat{AB}}{1}$ = lunghezza di $\widehat{AB}$ presa dell'unità di misura

Ora leghiamo l'angolo ad un'altra forma di misura: Considero due punti B, B' su s e ne faccio la proiezione ortogonale su r.



Ho 2 triangoli rett. simili $\Rightarrow$ rapporti fra i lati costanti

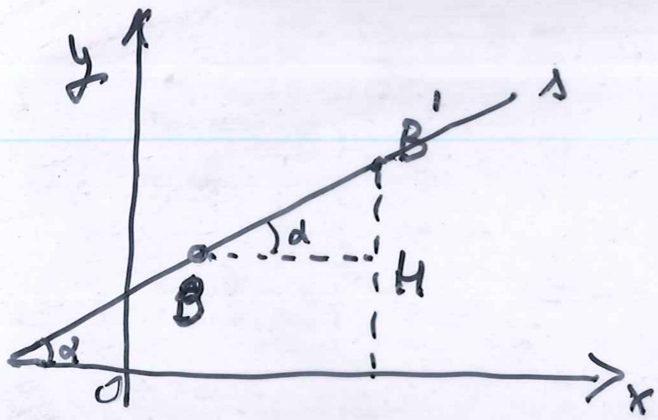
Definisco

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} \qquad \frac{\text{cateto adiacente } \alpha}{\text{ipotenusa}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} \qquad \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{ipotenusa}}$$

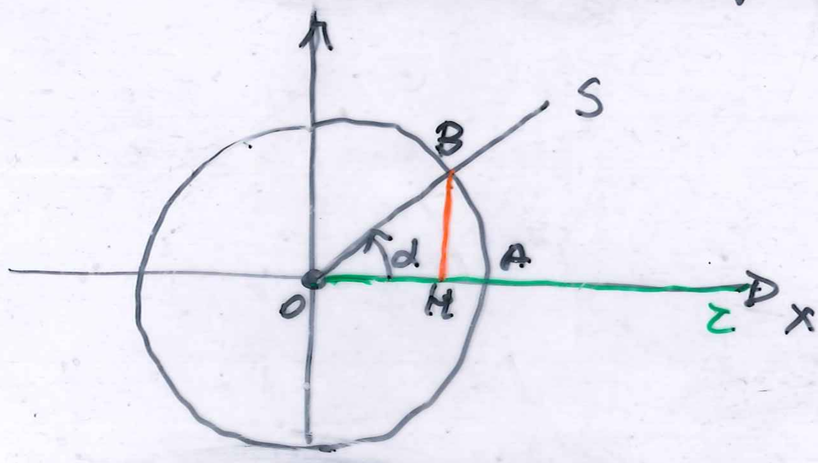
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opposto a } \alpha}{\text{cateto adiacente a } \alpha} = \frac{\overline{BH}}{\overline{OH}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Ma ha anche un suo significato geometrico



Se $B=(x_0,y_0)$, $B'=(x_1,y_1)$ sono due punti di s e $BH \parallel x$, $B'H \parallel y$, nel triangolo BHB' rettangolo in H leggo la $\tan\alpha$ come $\frac{B'H}{BH} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ cioè $\tan\alpha$ è il coeff. angolare della retta per B e B' che contiene la semiretta s

Il grosso limite dell'introduzione di seno coseno e tangente attraverso il triangolo rettangolo è che l'angolo deve per forza essere acuto. Generalizzo osservando che se traccio un sistema di riferimento tale che



O = origine (vertice) dell'angolo

la semiretta delle $x \geq 0$ è uno dei lati dell'angolo

y è la retta per O e $\perp x$

e considero gli archi tagliati sulla circonf. di centro O e raggio 1, NEL CASO di ANGOLO ACUTO si ha

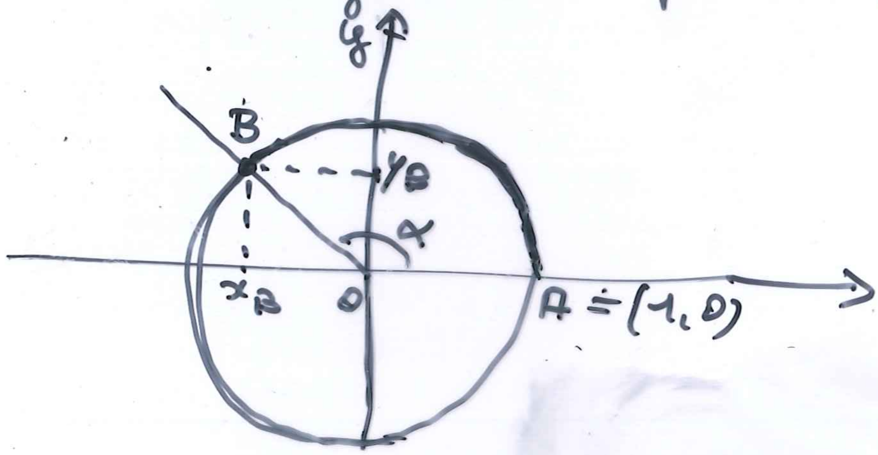
$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OB}} = \overline{OH} \text{ (senza unità di misura)}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \overline{BH} \text{ (senza unità di mis.)}$$

e:

$\overline{OH}$ è l'ascissa di B | privo di unità di mis.

$\overline{BH}$ è l'ordinata di B

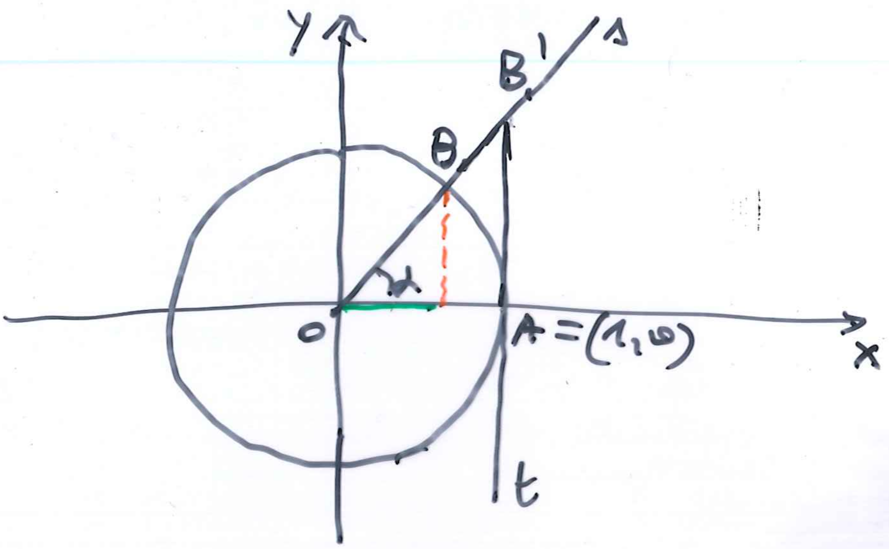
Quindi in generale definisco:



$\cos\alpha = x_B$

$\operatorname{sen}\alpha \doteq y_B$

(ove B è il punto in cui s interseca la circonferenza goniometrica, cioè centrata nell'origine e di raggio 1)



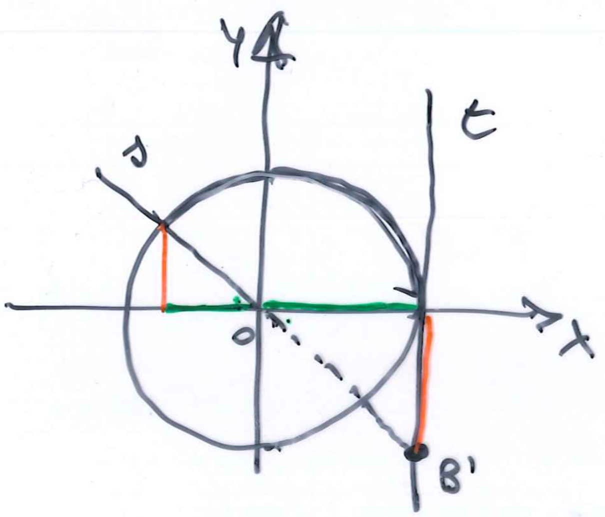
Invece:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Oppure osservo che se t è la retta tangente in A alla circonferenza, t taglia s in un punto B' che forma con O e A un triangolo rettangolo e

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AB'}}{\overline{OA}} = \overline{AB'} \text{ (senza misura)}$$

= ordinata di B'



Allora per dare la def. generale di tangente di α, traccio la tangente t in $A = (1,0)$ alla circonferenza.

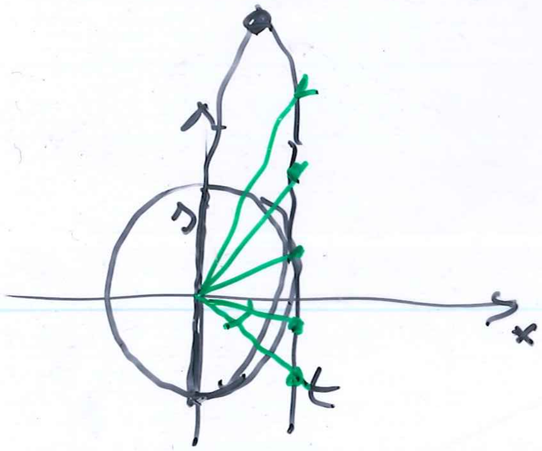
- Se la semiretta s interseca t in B, chiamo $\tan\alpha$ l'ordinata di B
- se non la interseca, prolungo la semiretta in modo da avere una retta che intersechi t in B' e chiamo $\tan\alpha$ l'ordinata di B'

Proprietà delle funzioni trigonometriche

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ho detto che sono $\operatorname{sen}\alpha$
$\cos\alpha$
$(\tan\alpha)$

$\Rightarrow$ ho definito $\exists$ funzioni di cui

$\operatorname{sen}\alpha$
$\cos\alpha$ | sono definite $\forall \alpha \in \mathbb{R}$



mentre $\tan\alpha$ non è definita se s viene a coincidere con una delle 2 semirette che giacciono su y (t è parallela a s... si intersecano all'∞). Allora $\tan\alpha$ è definita in

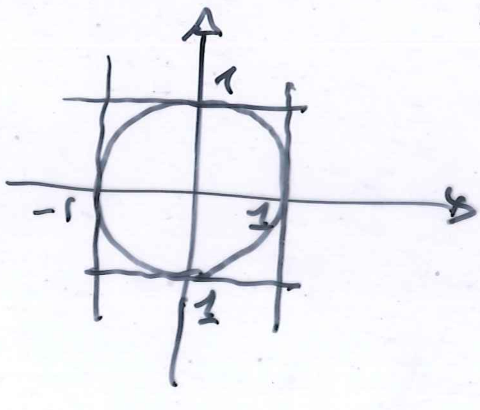
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ove

$\mathbb{Z}$ sono i numeri interi relativi cioè sull'insieme (unione di infiniti intervalli aperti):

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi\right)$$

1°) $x^2+y^2=1 \Rightarrow (\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha)^2=1$

2°)



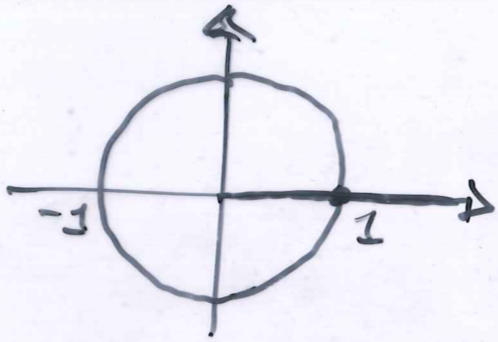
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $|\cos\alpha| \leq 1$

$|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1$

cioè $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sono due funzioni LIMITATE

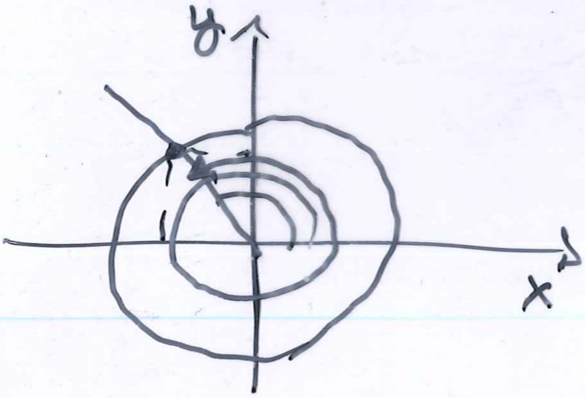
Valore massimo di $\cos\alpha$: 1

minimo " : -1



$\cos 0 = 1$

$\cos \pi = -1$



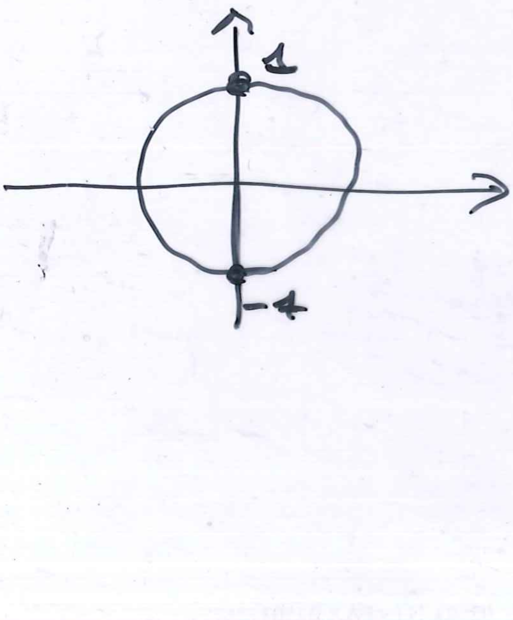
3°) Ma $\forall \alpha : \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$

cioè $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ sono funzioni periodiche (di periodo ... 2π (??))

$\Rightarrow$ Cos assume valore max. anche nei punti $\alpha = 0 + k(2\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$

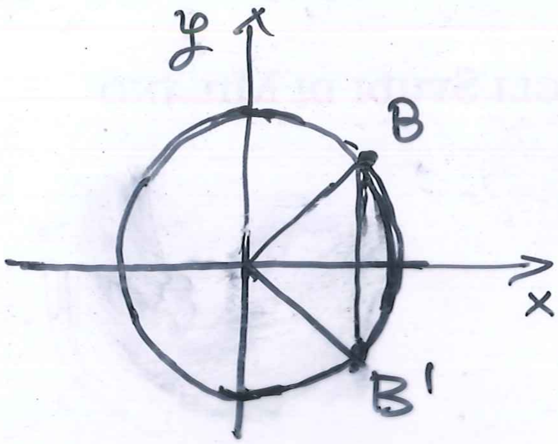
e minimo nei punti $\alpha = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$



Sen α assume val. max $= 1$ in $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

assume val. minimo $= -1$ in $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

4°)

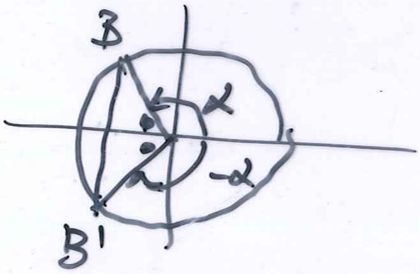


$\cos\alpha = x_B$

$\operatorname{sen}\alpha = y_B$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$



$\cos\alpha$ è una funzione pari

$\operatorname{sen}\alpha$ è una funzione dispari

$\Rightarrow$ è opportuno utilizzare come intervallo "base" per la periodicità un intervallo centrato nell'origine: ciò permette di sfruttare le simmetrie

Prenderò quindi

$(-\pi, \pi]$ come intervallo fondamentale

$\downarrow$ gli altri sono i suoi TRASLATI

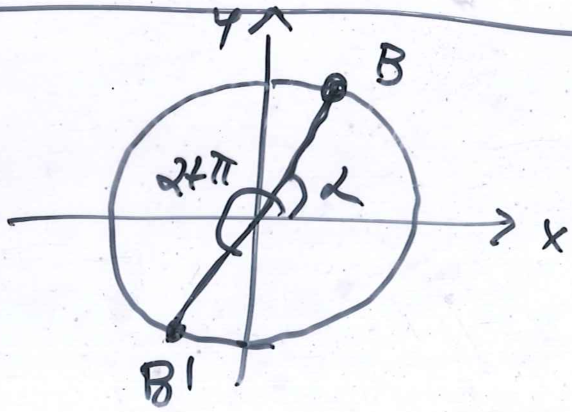
$\downarrow$

$(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$

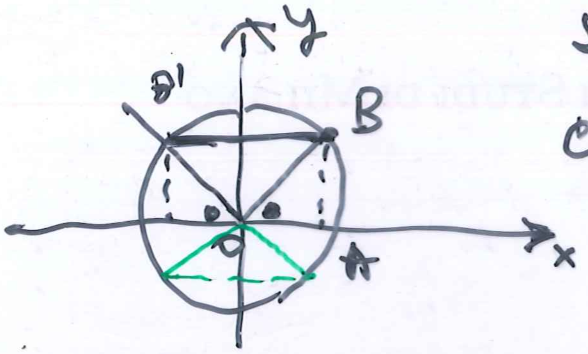
5°)

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$



6°)

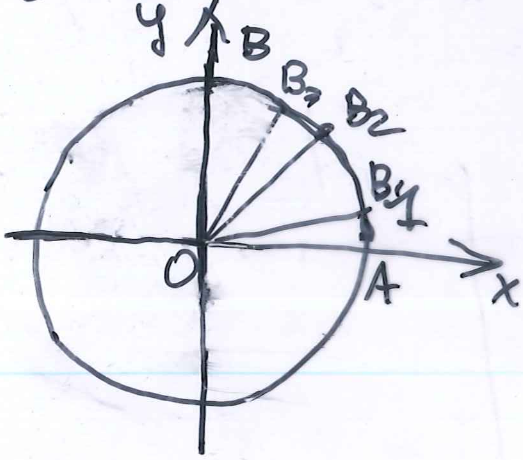


$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

(tanto se $\alpha \in [0,\pi]$ che se $\alpha \in (-\pi, 0)$ o agli intervalli traslati di questi di multipli di 2π

7°) Monotonia



in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\operatorname{sen}\alpha$ risulta crescente (vedi ordinate)

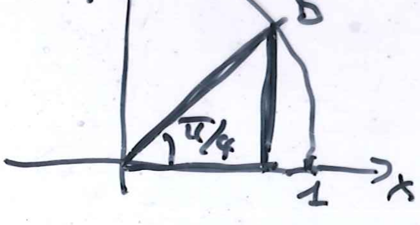
in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos\alpha$ risulta decrescente (vedi ascisse)

in $[\pi/2, \pi]$ $\operatorname{sen}\alpha$ decresce

in $(\pi/2, \pi]$ $\cos\alpha$ decresce (cresce in val. ass.)

Valori

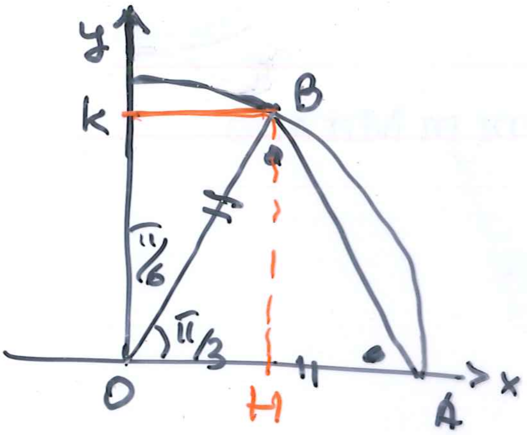
rad	0	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
cos	1	0	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
sen	0	1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$



$x_B = y_B$ $\qquad x_B^2 + y_B^2 = 1$ $\qquad 2x_B^2 = 1$

$x_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (poiché $x_B \geq 0$)

vedi pag 10 per $\pi/3$ e $\pi/6$



OBA isoscele con vertice in O è triangolo equilatero $\Rightarrow$ l'altezza BH è anche mediana: $\overline{OH} = \overline{HA}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$$

e via Teorema di Pitagora:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BH}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2}}{\overline{OA}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

per quanto riguarda $\pi/6$ osservare che

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{OA}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{KB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$