Proprietà finora evidenziate su $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$:

0) INSIEME di DEFINIZIONE : $\mathbb{R}$
1) identità goniometrica: $(\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha)^2=1$
2) sono funzioni LIMITATE

$$|\cos\alpha|\leq 1 \qquad |\operatorname{sen}\alpha|\leq 1$$

3) Sono funzioni PERIODICHE di periodo 2π

$\Rightarrow$ basta studiarle in un intervallo di AMPIEZZA 2π.

4) $\cos\alpha$ è una funzione PARI : $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\operatorname{sen}\alpha$ " " " DISPARI : $\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow$ per sfruttare la simmetria conviene che l'intervallo su cui si studiano sia centrato in 0 : $(-\pi,\pi]$

$\Rightarrow$ basta allora studiare in $[0,\pi]$

5) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$

questo dice che $\cos\alpha$ ha grafico simmetrico rispetto al punto $(\frac{\pi}{2},0)$ e $\operatorname{sen}\alpha$ lo ha " rispetto alla retta $x=\frac{\pi}{2}$

Basta lo studio in $[0,\pi/2]$.

6) su questo intervallo $\operatorname{sen}\alpha$ è monotona crescente e $\cos\alpha$ è monotona decrescente e si ha

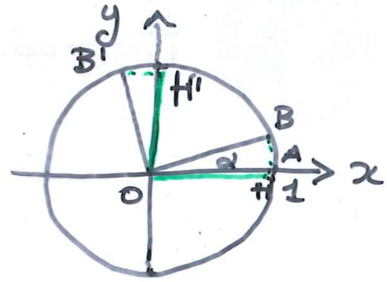
α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Possiamo ora tracciare il grafico

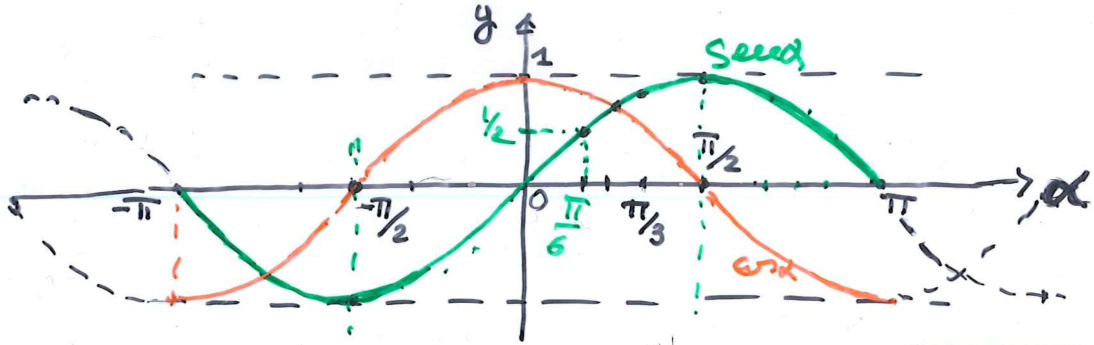
Ulteriore osservazione per minimizzare il lavoro:

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

(ho ruotato il triangolo OHB di $\pi/2$ e ottengo OH'B' ...)

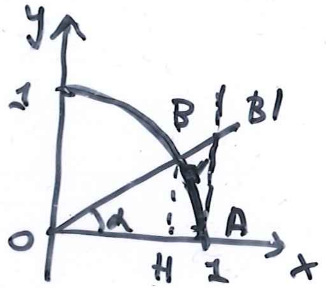


Cioè il grafico di $\cos\alpha$ è ottenuto da quello di $\operatorname{sen}\alpha$ traslandolo nella direzione dell'asse x e nel verso opposto di $\frac{\pi}{2}$:



Nota sul grafico: le tangenti nei punti $(2k\pi, 0)$ sono // bisettrice 1°–3° quadrante

Infatti



$$\overline{BH} = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\overline{B'A} = \tan\alpha$$
$$\overline{BH} \leq \overset{\frown}{AB} \leq \overline{AB'}$$

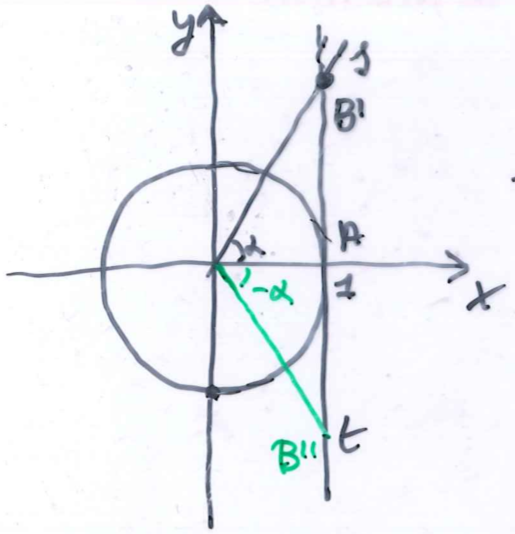
quando α diventa molto piccolo $\overline{BH}$ diventa sempre più vicino ad $\overline{AB'}$ e quindi anche la misura di $\overset{\frown}{AB}$ diventa sempre più vicina a quella di $\overline{BH}$ $\Rightarrow$ tangente in $(0,0)$ è la bisettrice del 1°–3° quadrante, non una retta verticale!

per ogni k con $|k| < 1$ esistono infinite coppie di valori di α tali che $\operatorname{sen}\alpha = k$

Se α_0 è uno di questi lo sono anche $\pi - \alpha_0$ e $\alpha_0 + 2k\pi$ e $\pi - \alpha_0 + 2k\pi = (2k+1)\pi - \alpha_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Proprietà e grafico di $\tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$



0) I.D. $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$

1) è periodica di periodo π. Infatti:

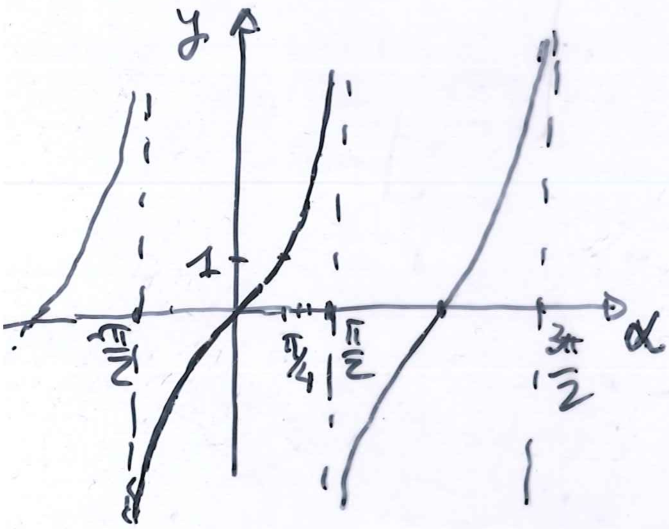
$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

2) è <u>dispari</u>

$$\tan(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

3) $\tan\alpha$ su $(-\pi/2, \pi/2)$ è monotona strettam. crescente.

$\Rightarrow$ monotona str. cresc. in ciascuno degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$



α	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\tan\alpha$	0	1	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

4) $\tan\alpha$ <u>non è</u> limitata ($\operatorname{Im}(\tan) = \mathbb{R}$)

INVERSE delle funzioni trigonometriche

Def. inversa di una funzione $f: A \to B$?

↓

inversa rispetto all'operazione di composizione

cioè cerco $g: B \to A$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A$$ in modo che

$\forall a \in A$: $g(f(a)) = a$

cioè $g \circ f = id_A$

e inoltre

$\forall b \in B$: $f(g(b)) = b$

cioè $f \circ g = id_B$

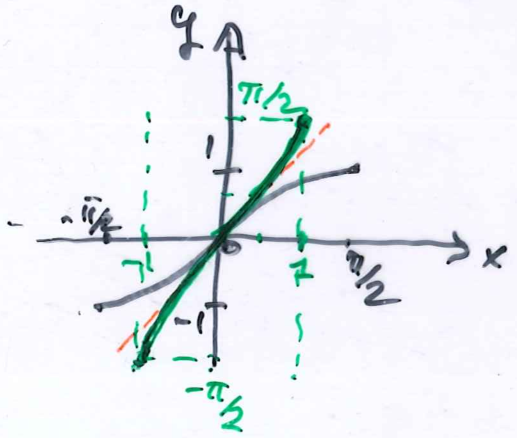
---

sen α, cos α, tan α non sono biunivoche tra il loro I.D. e la loro immagine perché sono periodiche.

Non posso trovare inverse globali.

Fissiamoci su sen x : cerco l'inversa della sua restrizione

$$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$



arcsen : $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

arcsen y è la funzione definita in $[-1, 1]$ a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$ tale che

$\text{sen}(\text{arcsen}\, y) = y \quad \forall y \in [-1, 1]$

$\text{arcsen}(\text{sen}\, x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$

ATTENZIONE: se prendo

$x = \frac{3}{4}\pi$

$\operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè $\frac{3}{4}\pi \xmapsto{\operatorname{sen}()} \frac{\sqrt{2}}{2} \xmapsto{\operatorname{arcsen}()} \frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

cioè l'arcsen una funzione da inversa.

$\Rightarrow$ attenzione all'uso della funz. sen^{-1} della calcolatrice

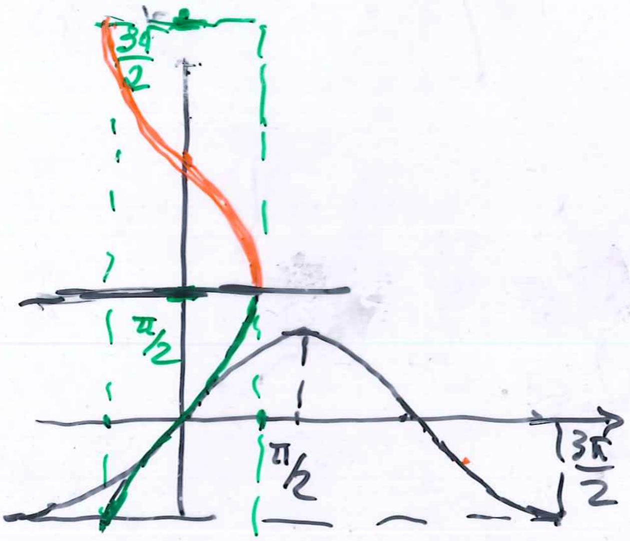
---

Come faccio a trovare l'inversa di sen x su altri intervalli? Comincio da un esempio concreto. Se

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \pi/6 + 2k\pi \\ (\pi - \pi/6) + 2k\pi \end{cases}$

e se $\alpha \in (\pi/2, \pi)$

scelgo $\alpha = \pi - \pi/6 = \frac{5\pi}{6}$.



Allo stesso modo se voglio invertire questa restrizione:

$\operatorname{sen} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

devo prendere

$g : [-1, 1] \to \left[\pi/2, \frac{3\pi}{2}\right]$

con:

$g(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y$

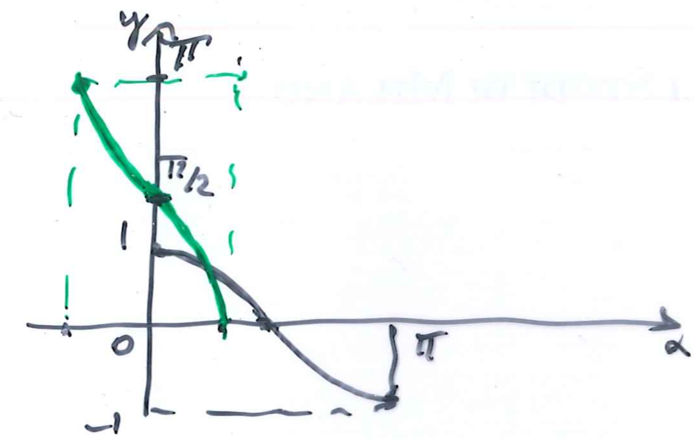
(fare osservazioni sul grafico: è quello rosso ed è simmetrico risp. $y = \pi/2$ di arcsen y)

Se voglio l'inversa di $\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \to [-1, 1]$

devo prendere $g_k(y) = \operatorname{arcsen} y + 2k\pi$

Se la voglio di $\operatorname{sen} : \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \to [-1, 1]$

devo prendere $g_k(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y + 2k\pi$



Se inverto la restrizione

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

trovo la funzione

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Vedi grafico verde!

Se devo invertire in un altro intervallo?

$\cos : [-\pi, 0] \to [-1, 1]$

l'inversa è $-\arccos y$

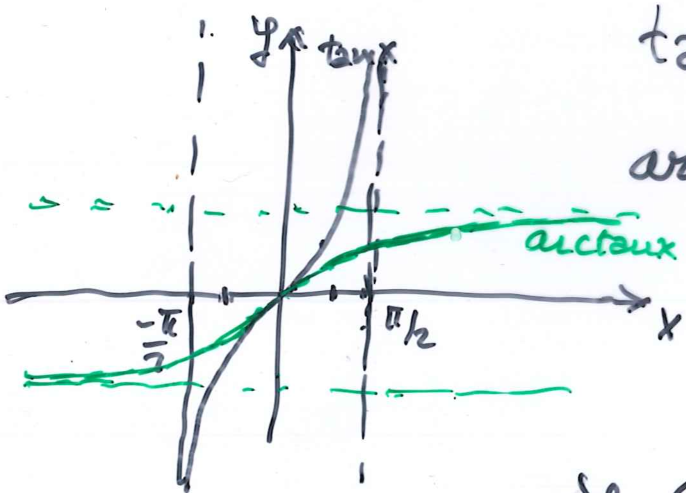
Se

$\cos : [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \to [-1, 1]$

l'inversa sarà $\arccos y + 2k\pi$

se $\cos : [-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi] \to [-1, 1]$

l'inversa sarà $2k\pi - \arccos y$.



$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

monotona crescente

è limitata

e priva di max e/o min.

se cerco l'inversa di

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$

devo prendere

$\arctan y + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

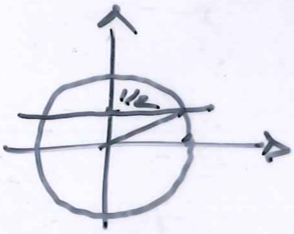
PROBLEMA

trovare $\alpha \in (-\pi, \pi)$ tale che

$$(*)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2 modi di procedere: usando la circonferenza goniometrica oppure usando il grafico

1



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \quad < \quad \begin{matrix} \alpha = \pi/6 \\ \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{matrix}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad < \quad \begin{matrix} \alpha = 5/6\,\pi \\ \alpha = -5/6\,\pi \end{matrix}$$

oppure posso sostituire le soluzioni di $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$ e vedere quale va bene

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}\pi$$

Cioè noto $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ e intervallo di ampiezza 2π in cui cercare α, l'arco α è univocamente determinato.
(mentre non lo è dati solo seno o solo coseno)

Se si utilizza invece del sistema (*) l'equazione $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = -1/\sqrt{3}$

bisogna stare attenti a quale inversa di $\tan \alpha$ si va a scegliere: non va bene $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Se voglio applicare questo metodo devo osservare che se

$$\operatorname{sen}\alpha > 0 \quad e \quad \cos\alpha < 0$$

(come nell'esempio) $\Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subset \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

e quindi come inversa devo scegliere

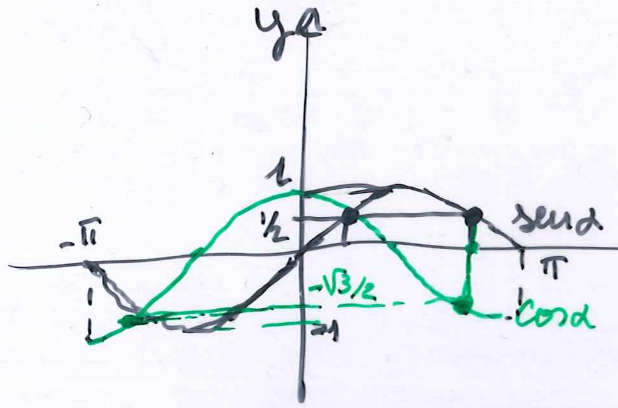
$$\pi + \arctan\alpha$$

$$\Rightarrow \pi + \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

---

2 Posso risolvere l'equazione $\begin{cases} \cos\alpha = -\sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}\alpha = 1/2 \end{cases}$

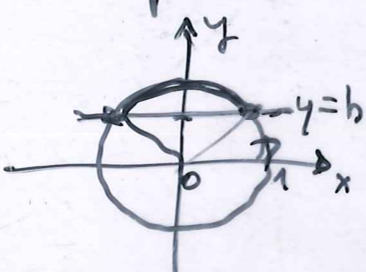
anche usando il grafico di sen e cos.



Tra i punti di intersezione del grafico di sen α con la retta $y = \frac{1}{2}$ e quelli di intersezione del grafico di cos α con la retta $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce n'è 1 coppia che ha la stessa ascissa

---

Disequazioni

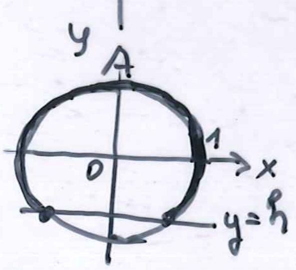


$$\boxed{\begin{matrix} \operatorname{sen}\alpha > h \\ 0 \le h \le 1 \end{matrix}}$$

In entrambi i casi la soluzione è

$$\arcsin h + 2k\pi < \alpha < \pi - \arcsin h + 2k\pi$$

(notare che nel secondo caso $-\arcsin h > 0$)



$$\boxed{\begin{matrix} \operatorname{sen}\alpha > h \\ -1 \le h < 0 \end{matrix}}$$

ECC. per $\operatorname{sen}\alpha < h$ ove però bisogna stare attenti al fatto che l'arco di cui α è > può essere $< -\pi$.