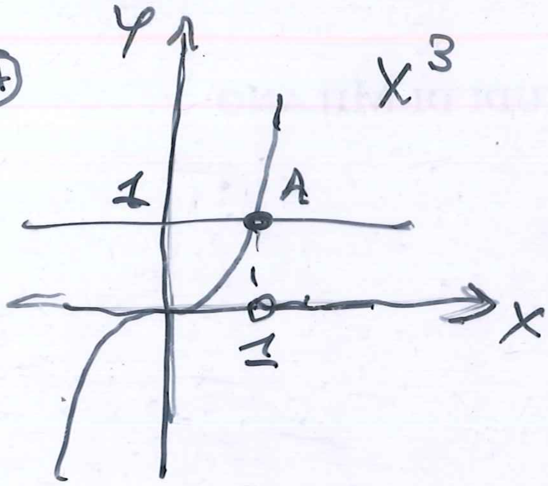
① $x^2+1=0$ non ha sol. reali

C0

②Ⓐ



x^3 monotona crescente

$\Rightarrow$ invertibile

$\Downarrow$

$$x^3 = 1$$

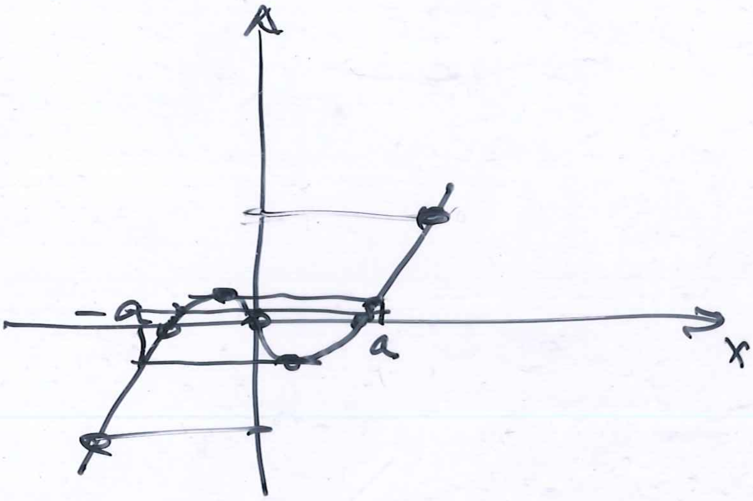
$(\text{o} \quad x^3 = k \in \mathbb{R})$

ha 1 e sola soluz.

$$x = 1$$

(ascissa di A)

②Ⓑ $f(x) = x^3 - x$



$f(x)=0 \iff$

$x=0, \; x=1, \; x=-1$

non è monotona!

In generale:

$f(x) = k$

può avere

1 o 3 soluz.

eventualm. coincid.

In generale quando cerco le soluzioni reali di un'equazione polinomiale (a coeff. reali)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

di grado n ($a_n \neq 0$)

non c'è omogeneità di situazioni:

se n è pari possono non esistere soluzioni

se n è dispari non è detto che il numero di soluzioni sia n. Andiamo a costruire un sistema numerico in cui ce ne sono sempre n!

Numeri Complessi

$x^2+1=0$?

"Aggiungiamo" ai numeri reali un SIMBOLO: i

All'incirca: polinomi nell'indeterminata i:

$$\sqrt{2} + 2i - 7i^2 + \frac{1}{\pi} i^3 \quad \dots$$

Ma poniamo

$$\boxed{i^2 = -1}$$
$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$
$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 .$$

$\mathbb{C}$: insieme delle scritture $a+ib$ con $a,b \in \mathbb{R}$

- due numeri complessi sono uguali se
  $a+ib = a'+ib' \iff a=a'$, $b=b'$

  $z=a+ib$: chiamo a PARTE REALE di z: $\operatorname{Re} z$ e b PARTE IMMAGINARIA di z: $\operatorname{Im} z$

- $(a+ib)+(c+id) = (a+c) + i(b+d)$

- $(a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd = $ ($i^2=-1$)
  $= ac - bd + i(ad+bc)$

PROPRIETÀ: le solite algebriche.

zero: $0+0i = 0$

unità: $1+0i$ Infatti: $(a+ib)(1+0i) = a-0+i(0+b) = a+ib.$

$-(a+ib) = -a-ib$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$$

$$((a+ib)+(c+id))+(e+if)=$$
$$(a+c+i(b+d))+e+if=$$
$$(\underbrace{(a+c)+e}+i[\underbrace{(b+d)+f}])=\ldots$$

ecc. $\Rightarrow$ associativa ; analogam.: commutativa

$\boxed{0+0i}$ neutro rispetto 0. Infatti

$$(a+ib)+(0+0i)=(a+0)+i(b+0)=$$
$$=a+ib$$

Inoltre

$\forall\ (a+ib)\ \exists\ (c+id)$ t.c.

$(a+ib)+(c+id)=0+0i$. Infatti

$$(a+c)+i(b+d)=0+0i$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} a+c=0 & \Rightarrow \quad c=-a \\ b+d=0 & \Rightarrow \quad d=-b \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ogni elem } a+ib \text{ ha opposto } -a-ib}$

$$(a+ib)^{-1} = \frac{1}{a+ib}$$

Come lo ricavo in forma algebrica?

Mi ricordo un trucco che usavo per togliere i radicali al denominatore!

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1+\sqrt{2}$$

e faccio l'analogo

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} =$$

$$= \frac{a-ib}{a^2-(i)^2b^2} \underset{i^2=-1}{=} \frac{a-ib}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i.$$

Coniugato di $a+ib$: $\overline{a+ib} = a+i(-b)$

Modulo di $a+ib$: $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow \quad (a+ib)^{-1} = \frac{\overline{a+ib}}{|a+ib|^2}$$

altro modo di vedere il reciproco!

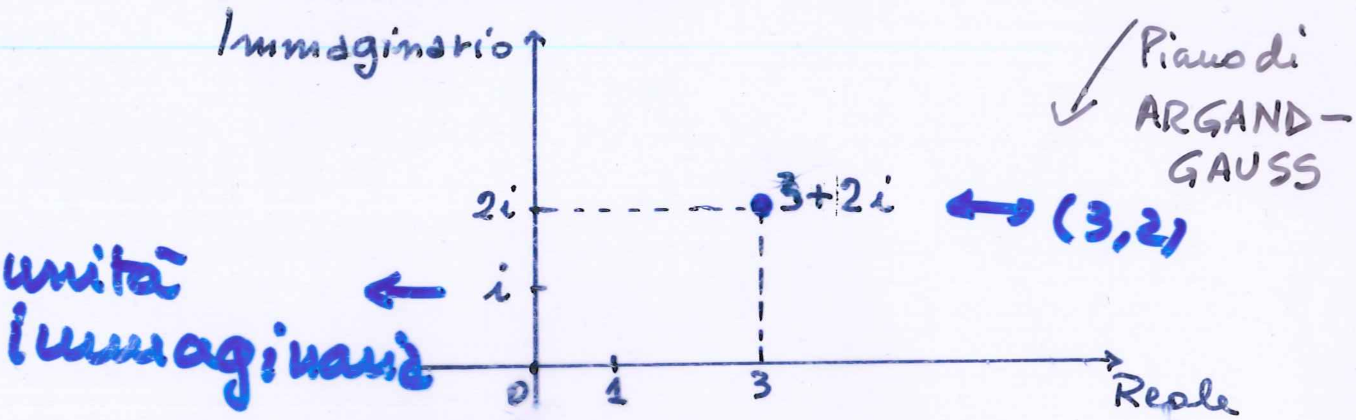
$\mathbb{C}$ è un campo che "contiene $\mathbb{R}$": $\{a + i0\}$

Identifichiamo $\underline{a}$ con $\underline{a+i0}$ (le operazioni definite su $\mathbb{C}$ ristrette al s.i. dei complessi reali si comportano come quelle su $\mathbb{R}$) vedi pag C2.1

Questa è la FORMA ALGEBRICA dei numeri complessi.

Corrispondentemente: FORMA CARTESIANA

$$\mathbb{C} \ni a+ib \longleftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$



Somma ? vedi pag C2.1

Zero ?

Prodotto ??? $\longrightarrow$ serve passare a coordinate polari

Parte reale di $z = a+ib$: $\operatorname{Re} z = a$

Parte immaginaria di z : $\operatorname{Im} z = b$

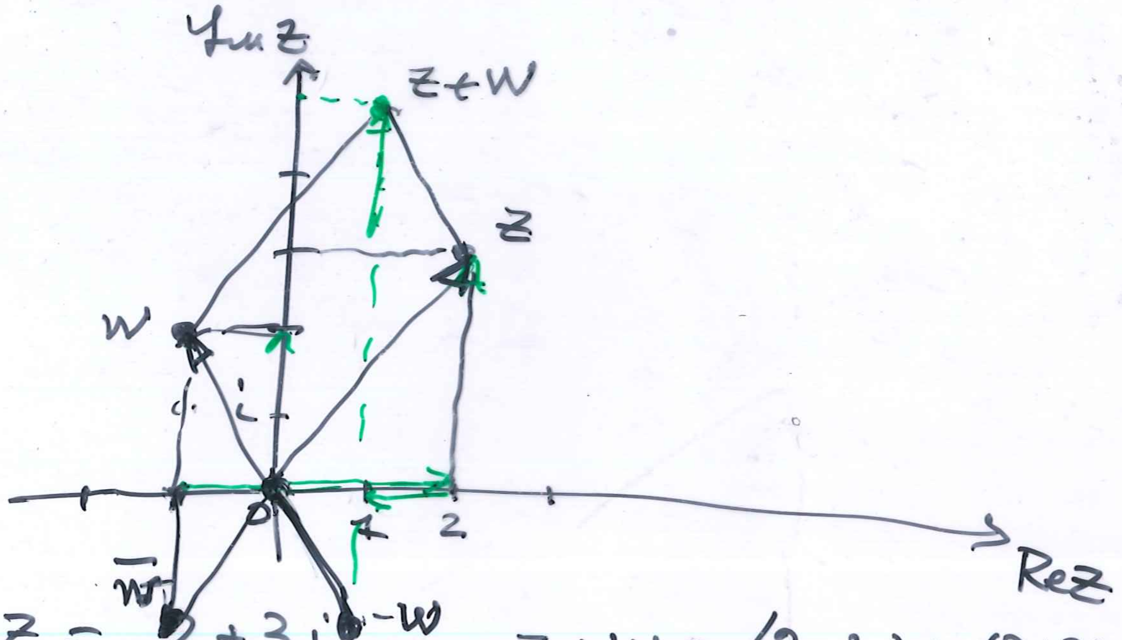
vedi C2.1 fondo

Coniugato di z : $\bar{z} = a - ib = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$

Modulo di z: è la dist. di z da $0 = 0+0i$ $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

$(a+i0)+(c+i0) = a+c + i\cdot 0$

$(a+i0)\cdot(c+i0) = ac\left(-0 + (0+0)i\right)$

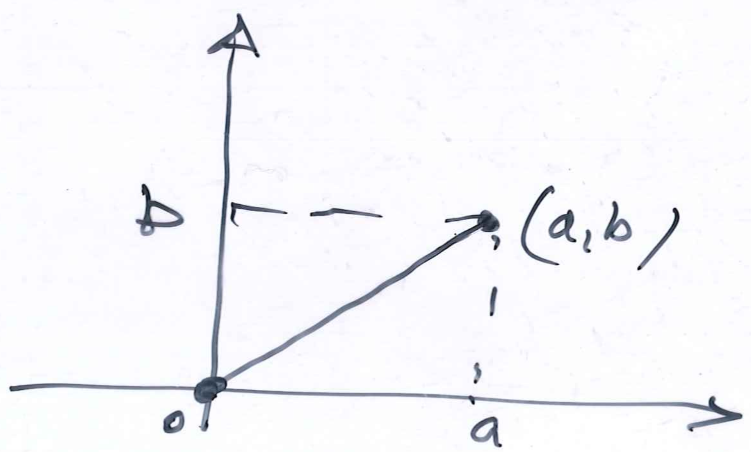


$z = 2+3i$ $\qquad z+w = (2-1)+(3+2)i =$

$w = -1+2i$ $\qquad = 1+5i$

La somma di 2 numeri complessi si realizza mediante la regola del parallelogramma

<u>Modulo</u> di $a+ib$: $\sqrt{a^2+b^2}$. (T. di Pitagora = dist. dall'origine)



è un numero REALE ≥ 0.

È $=0$ solo se il numero è 0

Proprietà: $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

$z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

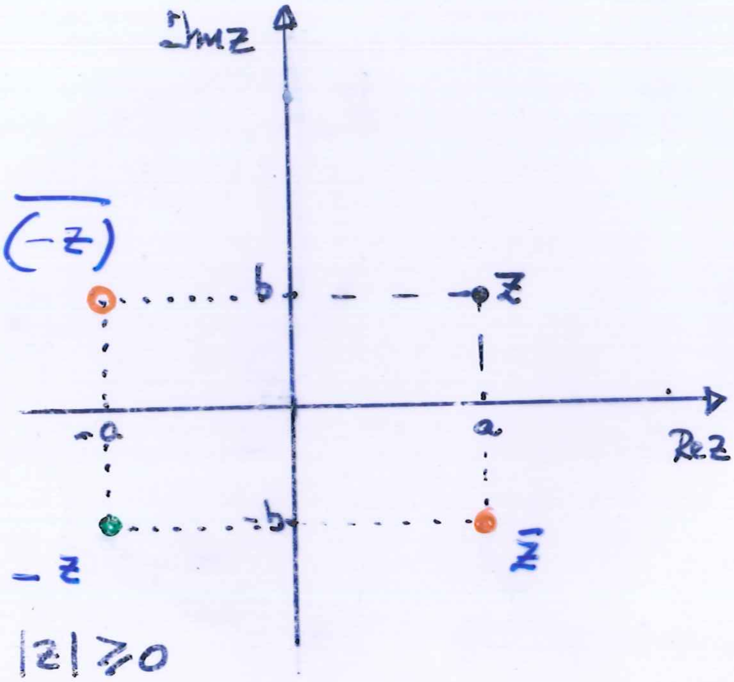
$\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$\overline{(\mathrm{Re}\,z)} = \mathrm{Re}\,z$

$\overline{i(\mathrm{Im}\,z)} = -(\mathrm{Im}\,z)i$



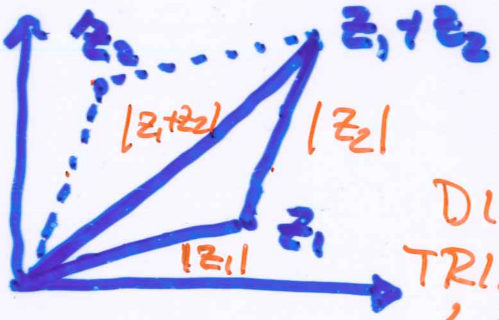
$|z| \geq 0$

$|\bar{z}| = |z|$

$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2|$



DISUG. TRIANGOLARE

Trovare la forma algebrica di $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Quindi $\mathrm{Re}\,z =$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\,z =$

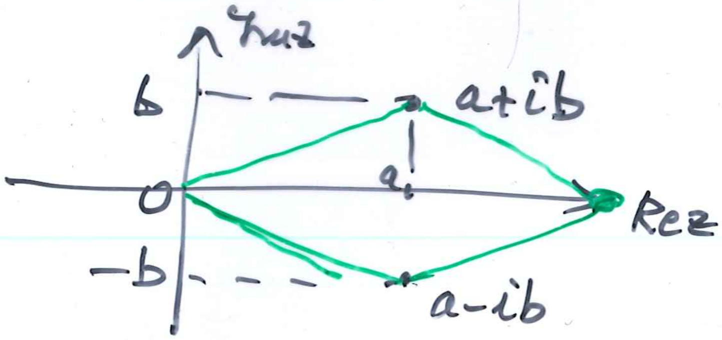
$\bar{z} =$ $\qquad$ $|z| =$

$$|a+0i| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

in $\mathbb{C}$ — nei numeri reali

$$|0+ib| = \sqrt{0^2+b^2} = \sqrt{b^2} = |b|$$

$$z = a+ib$$
$$\bar{z} = a-ib$$
$$\Longrightarrow \quad z+\bar{z} = 2a + i\underbrace{(b-b)}_{0}$$



$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$z_1 = a+ib$$
$$z_2 = c+id \qquad z_1 \cdot z_2 = ac-bd + i(ad+bc)$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 =$$
$$= (ac)^2 + (bd)^2 - \cancel{2abcd} +$$
$$+ (ad)^2 + (bc)^2 + \cancel{2abcd}$$

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) =$$
$$= a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$$

$$\Longrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 \Longrightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z_1| \geq 0 \qquad |z_2| \geq 0$$

$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}$$ C3.2

Forma algebrica?

$$z = (1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{1+i} =$$

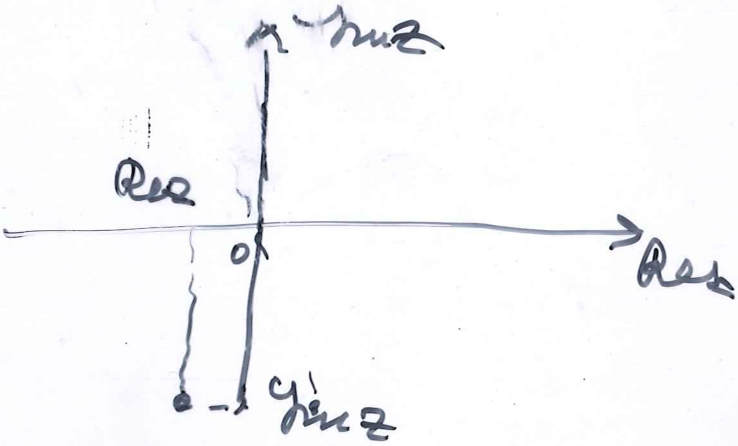
$$= \frac{(1 - i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)\ (1-i)} = \frac{1 - \sqrt{3} + i(-\sqrt{3} - 1)}{1 - (-1)} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} i$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

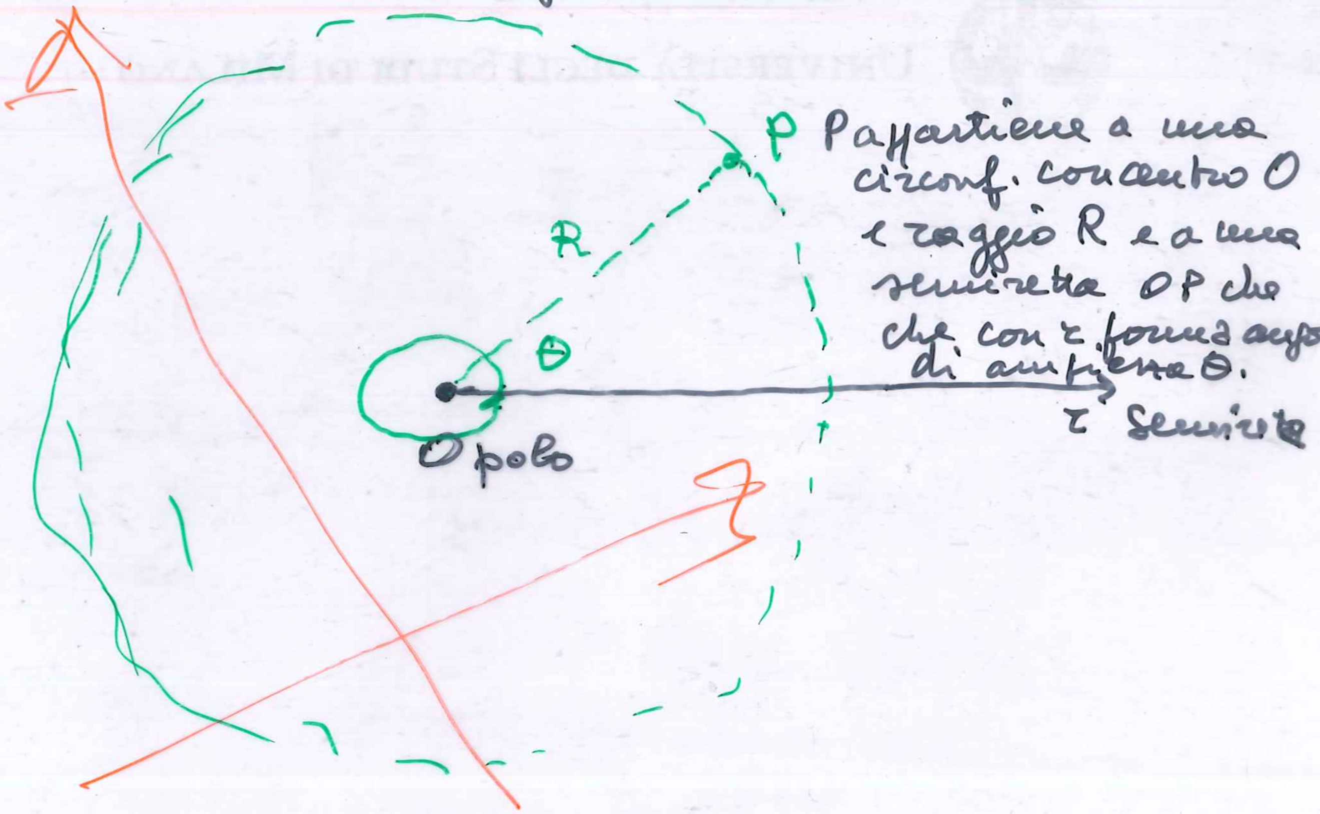
$\Rightarrow$ 3° quadrante



$$|z| = \frac{|1 - i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\bar{z} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} i$$

Sistema di riferimento polare



$$P \longmapsto (R, \theta)$$

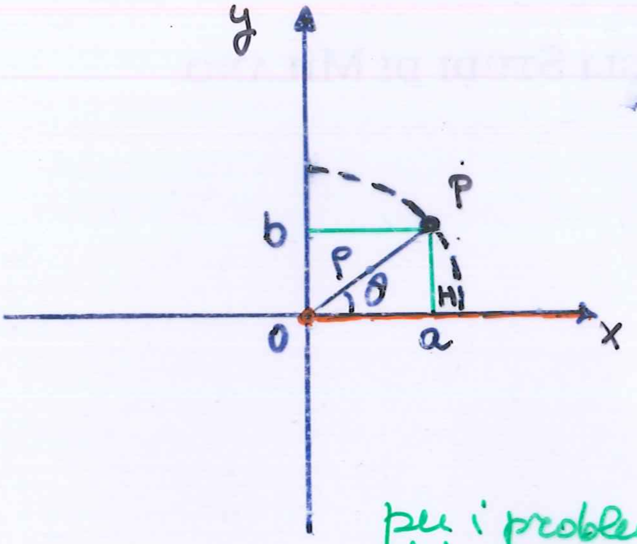
$$\text{piano} \setminus \{O\} \longleftrightarrow (0,+\infty) \times [0,2\pi)$$

funzione biunivoca.

Ora devo conciliare questa rappresentazione polare dei punti del piano con quella cartesiana. A priori potrebbe non esserci nessuna relazione (VEDI assi in rosso)

Ma sarebbe scomodo. Quindi si fa coincidere il polo del sistema polare con l'origine del sistema di rif. cartesiano e la semiretta origine del sist. di rif. polare con la semiretta delle $x \geq 0$. Si perviene così alla rappresentazione che segue

COORDINATE POLARI



per i problemi di calcolo vedi pag C4.1

$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \operatorname{sen}\theta$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = ??$

individuato "modulo 2π"

Argomento di z

Argomento principale di z

$-\pi < \theta \leq \pi$

$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$: FORMA TRIGONOMETRICA

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right)$ Vedi C4.3

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\right)$$

GRAFICAMENTE ?

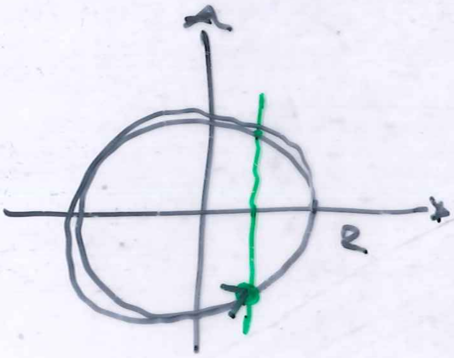
Trovare argomento principale e modulo di:

10 , $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-\sqrt{3}i$

$z = 1 - \sqrt{3}\, i$

$|z| = 2$

$$\begin{cases} 1 = a = 2\cos\theta \\ -\sqrt{3} = b = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\theta = 1/2 \\ \mathrm{sen}\,\theta = -\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

se $\theta \in [0, 2\pi)$ $\Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

di solito si sceglie $\theta \in (-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{3}$

ad $a+ib$ posso associare infiniti argomenti θ di z tali che

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta + i\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

fissato uno di essi : $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$

gli altri sono quelli della forma

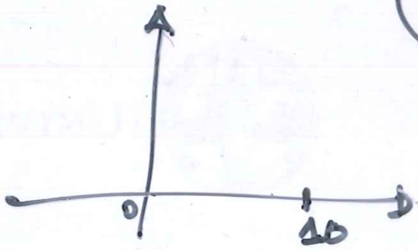
$$\theta_k = \theta_0 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

θ_0 : argomento principale di z.

$z = 10$

$|z| = 10$

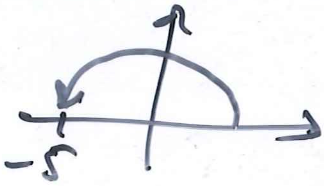
$\underset{\text{principale}}{\arg z} = 0$ $\qquad 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$



$z = -5$

$|z| = 5$

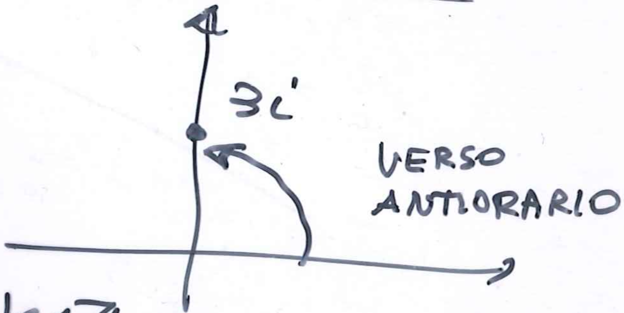
$\underset{\text{princ.}}{\arg z} = \pi$ $\qquad \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



$z = 3i$

$|z| = 3$

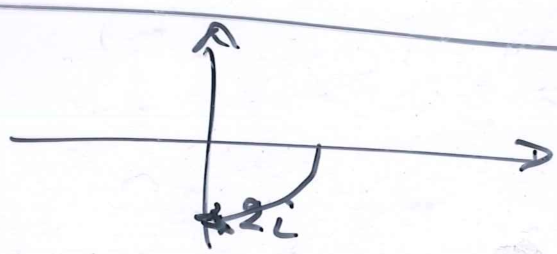
$\underset{\text{princ.}}{\arg z} = \pi/2$ $\qquad \dots \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$



$z = -2i$

$|z| = 2$

$\underset{\text{princ.}}{\arg z} = -\frac{\pi}{2}$ (verso ORARIO!)



$z = \sqrt{3} + i$ $\qquad \boxed{\text{Re}\, z = \sqrt{3},\ \text{Im}\, z = 1}$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\underset{\text{princ.}}{\arg z} = \theta = \pi/6$ $\qquad \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}\theta = 1/2 \end{cases}$