$z = -1 - i$

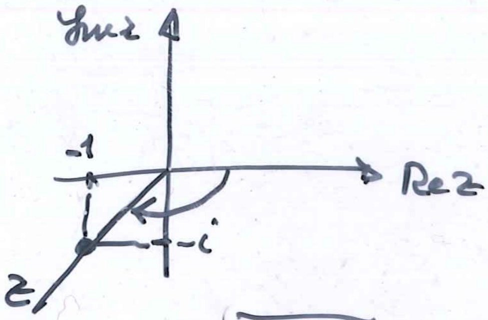


Fig1

ad occhio

arg princ.$(z) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

altrimenti

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z = -1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}(\arg z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ora $\boxed{\text{o risolvo il sistema}}$:

$$\begin{cases} \arg z = \pm \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \\ \arg z = \begin{cases} -\pi/4 + 2k\pi \\ -3\pi/4 + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad \arg z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

questi sono tutti i possibili argom. di z:
quello principale: $-\frac{3\pi}{4}$

oppure "risolvo" la prima (o meglio risolvo in $[0, \pi]$ la prima) usando arccos: trovo un angolo

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

: osservo che $\theta \in [0, \pi]$ ma a me serve (vedi Fig. 1) un angolo $\in (-\pi, 0)$

Poiché $\cos\theta$ è una funz. pari, l'angolo che mi serve è $\boxed{\arg z = -\theta = -3\pi/4}$

Esamino il prodotto di 2 numeri complessi:

$$z_j = \rho_j \cdot (\cos\theta_j + i\,\text{sen}\,\theta_j) \qquad j = 1,2$$

$$z_1 \cdot z_2 = \underbrace{\rho_1 \rho_2}_{|z_1 \cdot z_2|} (\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_1 \cdot i)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$\theta = \arg(z_1 \cdot z_2)$?

$$\big(\underbrace{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2}_{\cos(\theta_1+\theta_2)}\big) + i\big(\underbrace{\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2}_{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)}\big)$$

cioè

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \rho_2)\,[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2)]$$

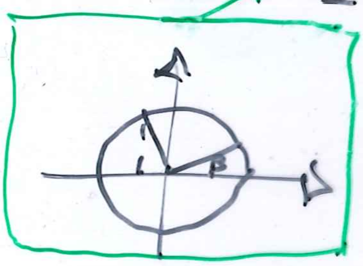
Formule soggiacenti: formule di addizione:

$$\boxed{\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\text{sen}(-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \text{sen}\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \text{sen}\,\alpha\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\alpha\,\text{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$$



$$= \text{sen}\,\alpha(-\text{sen}\,\beta) + \cos\alpha\cos\beta =$$

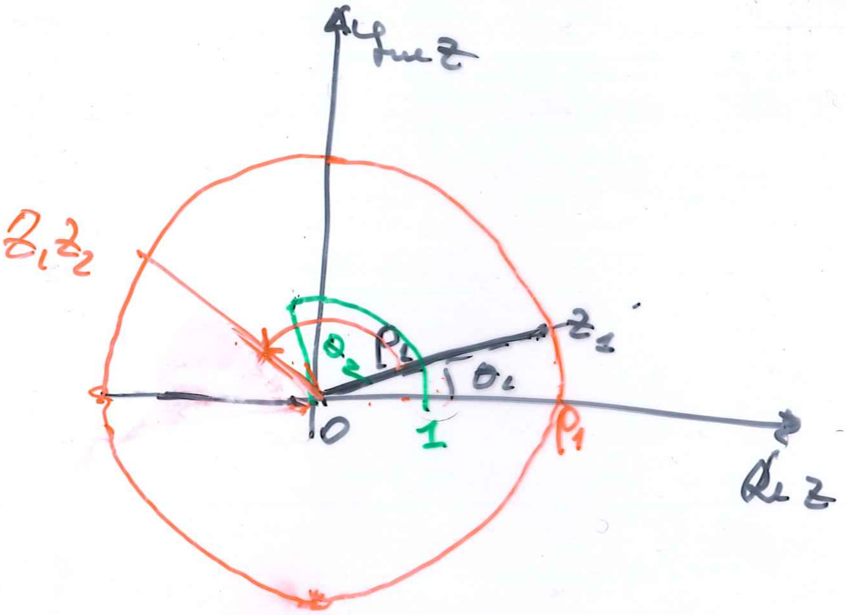
$$= \boxed{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

Di qui ricavo anche:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(-\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \right)$$



ipotesi di comodo

$\rho_2 = 1$

$\Rightarrow |z_1 z_2| = \rho_1$

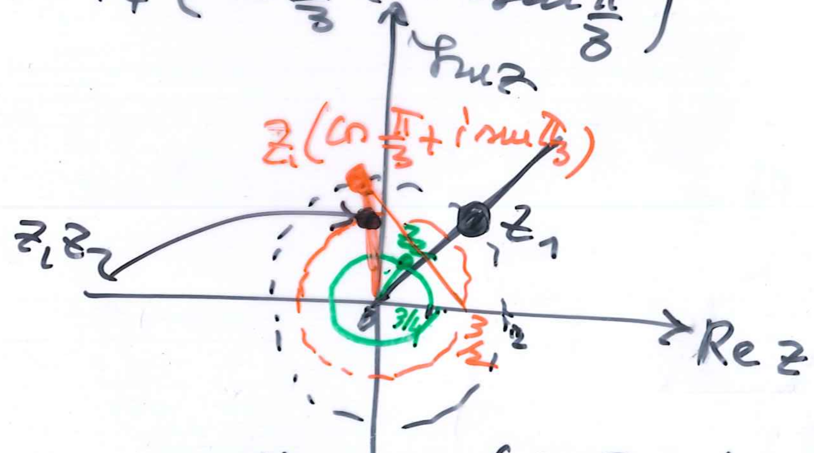
ho ruotato z_1 di un angolo θ_2 intorno O

Se $\rho_2 \neq 1$

dopo la rotazione di θ_2 del punto z_2 applico al risultato una dilatazione di ρ_2. Ad esempio

$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$

$z_2 = \frac{3}{4} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$



rotazione di $\frac{\pi}{3}$ (costruire Triangolo equilatero con base Oz_1 e 3° vertice sulla circonf. di raggio 2) e dilatazione di $\frac{3}{4}$

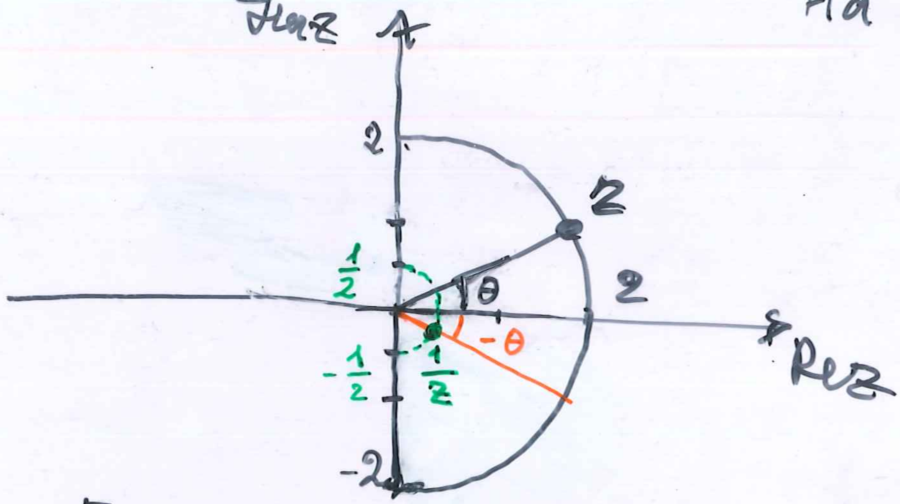
se $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{|z|^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}$$

$$\cos \arg \frac{1}{z} = \frac{a/|z|^2}{1/|z|} = \frac{a}{|z|} = \cos \arg z$$

$$\operatorname{sen} \arg 1/z = \quad = -\frac{b}{|z|} = \operatorname{sen}(-\arg z)$$

Ad esempio se



$|z| = 2$

$\arg \frac{1}{z} = -\arg z$

Quanto visto su prodotto e reciproco suggerisce la notazione esponenziale dei numeri complessi non nulli

$$\boxed{\begin{aligned} z &= \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta} \\ z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \end{aligned}}$$

Che cosa succede facendo potenze successive?

$$z^2 = z \cdot z = \rho^2 (\cos(\theta+\theta) + i \sin(\theta+\theta)) = $$
$$= \rho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$
$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2 \cdot \rho (\cos(2\theta+\theta) + i \sin(2\theta+\theta)) = $$
$$= \rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

z^{20}? Se $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, con lo stesso ragionamento provo che:

$$\boxed{z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{20}{6}\pi = \frac{10}{3}\pi = \left(4 - \frac{2}{3}\right)\pi$$

$$z^{20} = 2^{20}\left(\cos\frac{20\pi}{6} + i \sin\frac{20\pi}{6}\right) = 2^{20}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 2^{20}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}\, i.$$

TEOREMA. Ogni numero complesso

$w = r \cdot (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ (φ: pronuncio Fi)

diverso da zero esistono esattamente

n radici n-esime complesse:

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$$

e $z_j = \rho_j (\cos\theta_j + i \operatorname{sen}\theta_j)$

avrò

$$\rho_j = \sqrt[n]{r}$$

$$\theta_j = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot j \qquad j = 0, \dots, n-1$$

(ma posso anche prendere j in un qualunque altro insieme di n interi consecutivi)

È sbagliato scrivere $\sqrt[n]{w}$ poiché $\sqrt[n]{\ }$ indica una funzione mentre qui trovo NON una ma n radici

Esempio $\boxed{n=3}$: $j = 0, 1, 2$

oppure: $j = -1, 0, 1$

oppure: $j = -2, -1, 0$

Dimostrazione. Considero una radice n-esima di w: $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

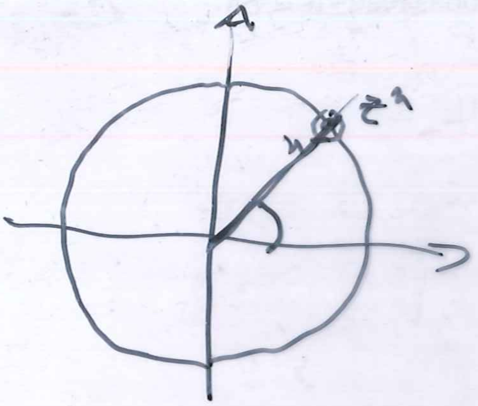
Radice n-esima significa che $z^n = w$.

Cioè

$$\rho^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

$|z^n| = \rho^n$ | poiché z^n e w coincidono
$|w| = r$ | devono essere uguali: $\rho^n = r$

$r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ 1 e 1 sol. $\rho = \sqrt[n]{r}$



perché w e z^n coincidano i loro argomenti devono coincidere a meno di multipli di 2π

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

equazione in θ

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

se $k=0$ $\quad \theta_0 = \frac{\varphi}{n}$

$k=1$ $\quad \theta_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$

$\vdots$

$k=n-1$ $\quad \theta_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)$

i numeri complessi corrispondenti sono distinti, poiché i θ_k sono tutti angoli compresi tra θ_0 e $\theta_0 + 2\pi$ $\Rightarrow$ non hanno mai seno e coseno contemporaneamente uguali

Se prendo $k=n$ $\quad \theta_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_n = \operatorname{sen}\theta_0$, $\cos\theta_n = \cos\theta_0$

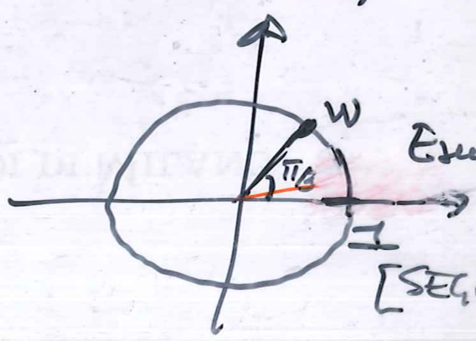
Ecc. con $k>n$

Analog. se sottraggo multipli di $\frac{2\pi}{n}$

$\Rightarrow$ le radici sono esattamente n.

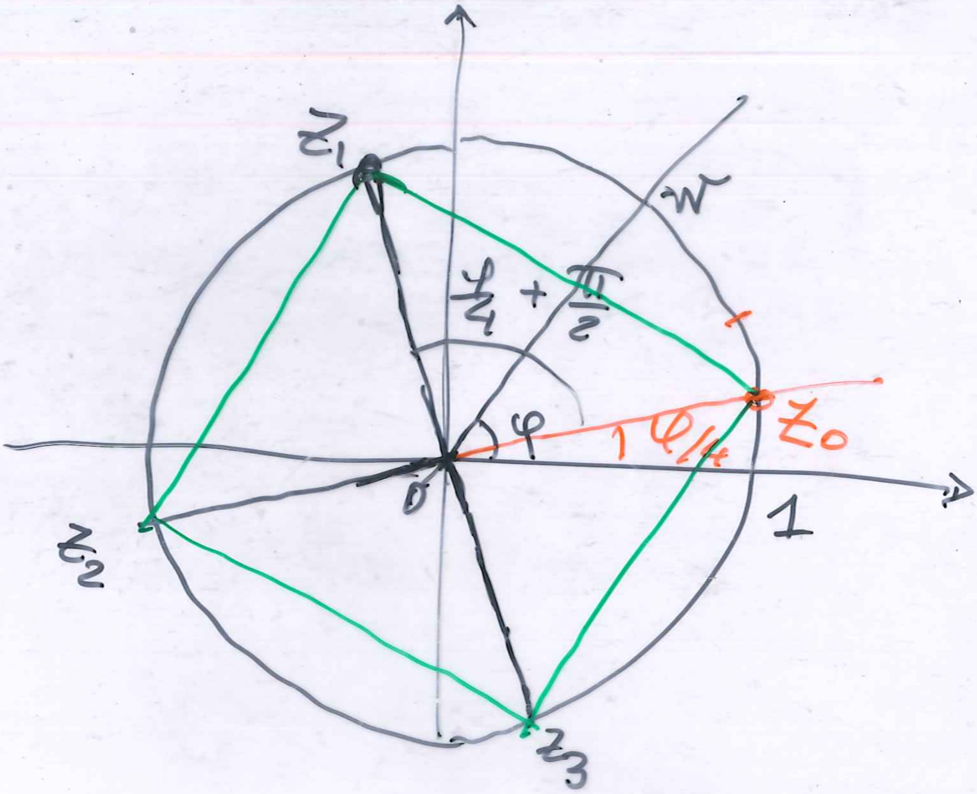
C.V.D.

Dove stanno nel piano di Argand-Gauss le radici n-esime di w ? (Es. con $n=4$.)



Esempio

[SEGUE]



$n = 4$

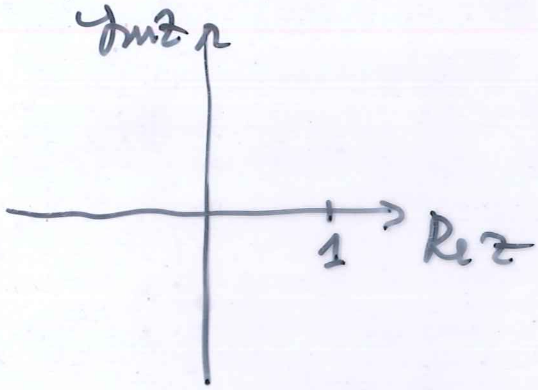
$z_0 = 1\left(\cos\frac{\varphi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{4}\right)$

$$z_i = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4}+k\,\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

le 4 radici stanno sulla circonferenza di raggio 1 (significa $\sqrt[4]{r}$) e sono i vertici di un quadrato

In generale le n radici n-esime di w stanno sulla circonferenza con centro O, raggio $\sqrt[4]{r}$, ai vertici di un poligono regolare di <u>n lati</u>

Radice cubica di $w=1$



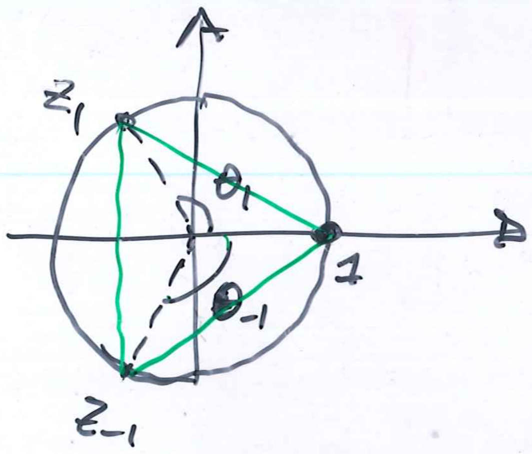
$|w| = 1$

$\arg w = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$(n=3)$

3 radici z_k tali che

$|z_k| = \sqrt[3]{1} = 1 \qquad (\arg z_k) = \frac{0}{3} + k\frac{2\pi}{3} \qquad k=-1,0,1$



$z_0 = 1\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

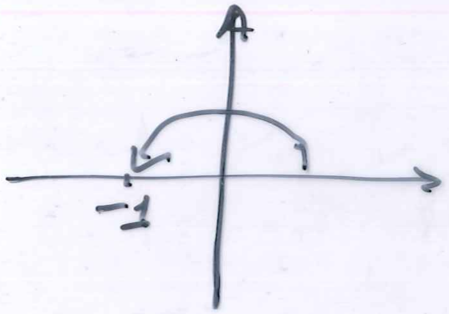
$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

Dato che z_{-1} è simmetrico di z_1 risp. all'asse reale

$z_{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$

Stanno su un triang. equilatero.

Radici quarte di $-1 = w$



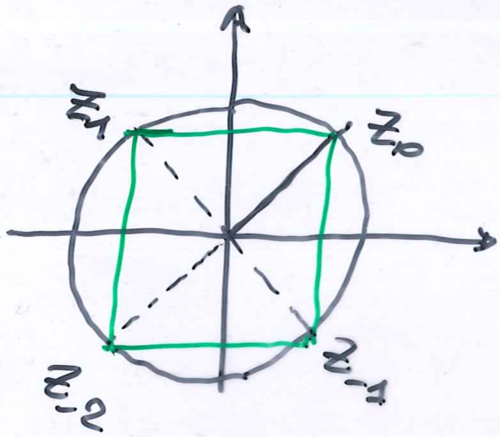
$|w| = 1$

$\arg w = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$z_k^{\,4} = w$

$\Rightarrow |z_k| = \sqrt[4]{1} = 1$

$(\arg z_k) = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}$ $\quad k = -2, -1, 0, 1$



purché quando la rappr. sul piano di A. G. gli argomenti fossero sono principali

$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow z_{-2} = -z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_{-1} = -z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

radice quarta di -1:

rappresentazione grafica:

radice sesta di $64i$

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$

rappresentazione grafica:

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.