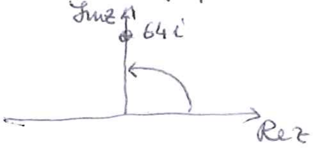
Esercizio. Determinare le radici seste di $64i$

Svolgimento. Può essere comodo incominciare col disegnare $64i$ nel piano di Argand-Gauss poiché si vede che $w=64$ sta sul semiasse delle y positive e quindi $|w| = 64$ (è la distanza da O) e



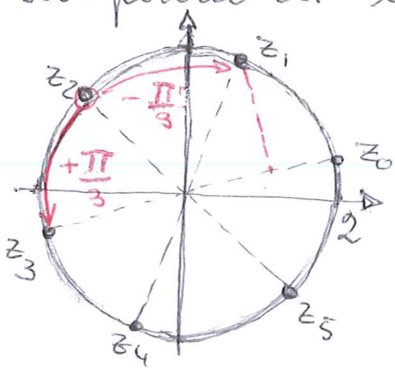
$\arg w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

In questo caso le radici n-esime sono seste: $n=6$

Le 6 radici hanno modulo $|z_k| = \sqrt[6]{64} = 2$ e argomento

$$\theta_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

Non è comodo iniziare il calcolo delle radici partendo da z_0 poiché $\theta_0 = \pi/12$ ... (seno e coseno da calcolare). Vediamo che cosa succede con gli altri argomenti e incominciamo a disegnare le 6 radici sul piano di A.G.



$\theta_0 = \frac{\pi}{12}$; $\theta_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$ ($\Rightarrow z_1$ è simmetrico di z_0 rispetto alla bisettrice del 1° quadrante)

$\theta_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ ANGOLO COMODO!

$\theta_3 = \theta_0 + \pi \Rightarrow z_3$ è simmetrico di z_0 rispetto O $\Rightarrow z_3 = -z_0$

$\theta_4 = \theta_1 + \pi \Rightarrow z_4$ è simmetrico di z_1 rispetto O $\Rightarrow z_4 = -z_1$

$\theta_5 = \theta_2 + \pi \Rightarrow z_5$ è simmetrico di z_2 risp. O $\Rightarrow z_5 = -z_2$

Notiamo anche che da z_2 si raggiunge z_3 per rotazione di $\frac{\pi}{3}$ (in verso antiorario quindi con segno +) e z_1 per rotazione di $-\frac{\pi}{3}$ (ORARIO!) intorno a O.

Ma fare una rotazione (ad es. di $\frac{\pi}{3}$) attorno all'origine equivale a moltiplicare per $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Per convincersene osservare che se $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ si ha

$$z\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \rho\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

(vedere i conti svolti la volta scorsa parlando di prodotti) e quindi l'angolo viene aumentato di $\frac{\pi}{3}$ senza alterare il modulo il che corrisponde al fare una rotazione). Allora calcolo nell'ordine:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_3 = z_2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$z_1 = z_2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = (-\sqrt{2}+i\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

(si poteva anche osservare che z_1 è simmetrico di z_3 rispetto alla bisettrice del 2°-4° quadrante) e poi

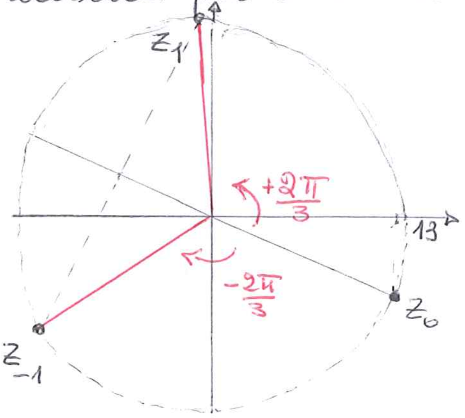
$$z_5 = z_{-1} = -z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \ ; \quad z_0 = -z_3 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \ ;$$

$$z_4 = z_{-2} = -z_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

Si può usare la strategia della "rotazione" anche per risolvere esercizi di questo tipo:

ESERCIZIO. Supponiamo che una radice terza di w sia $12-5i$. Determinare le altre radici terze.

<u>Svolgimento</u>. Le tre radici terze di w si trovano su una circonferenza di raggio $|12-5i| = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ centrata in 0, ai vertici di un triangolo equilatero che ha un vertice in $z_0 = 12-5i$.
Quindi per ottenere le altre 2 basta ruotare z_0 di $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$



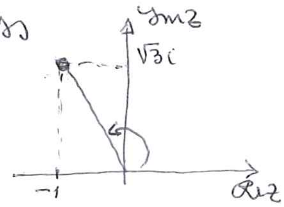
$$z_1 = z_0\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = \\ = (12-5i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6+\frac{5\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{5}{2}+6\sqrt{3}\right)$$

$$z_{-1} = z_0\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\ = (12-5i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -6-\frac{5\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{5}{2}-6\sqrt{3}\right)$$

In sostanza, tutte le radici n-esime di un numero complesso w si trovano moltiplicando una sua particolare radice n-esima per tutte le radici n-esime di 1

ESERCIZIO. Determinare le radici quarte di $w = \sqrt{3}i - 1$.

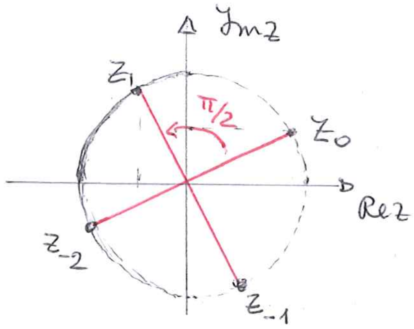
<u>Svolgimento</u>. Rappresento w nel piano di Argand Gauss



Osservo che $|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = 2$
e che $\text{sen}(\arg w) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mentre $\cos(\arg w) = -\frac{1}{2}$
e quindi (come suggerisce anche la figura) $\arg w = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
con $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi le 4 radici quarte z_k hanno modulo $|z_k| = \sqrt[4]{2}$ e argomenti: $\arg z_k = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Anche in questo caso rappresento prima le radici nel piano di A.G.



$z_{-2}\ (=z_2) = -z_0$

$z_{-1}\ (=z_3) = -z_1$

$z_1 = z_0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = z_0 \cdot i$

Quindi

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$$

$$z_1 = \left(\frac{\sqrt[4]{18}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i\right)\cdot i = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i$$

$$z_{-2} = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$$

$$z_{-1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i.$$

radice quarta di -1:

rappresentazione grafica:

radice sesta di $64i$

rappresentazione grafica:

radice quarta di $\sqrt{3}i - 1$

rappresentazione grafica:

Fin qui ho risolto eq. polinomiali del tipo

$$z^n - w = 0 \qquad \text{con } w \in \mathbb{C}.$$

In generale si ha

Teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti complessi ammette esattamente n radici complesse.

Se i coefficienti sono complessi reali, le soluzioni o sono reali o sono a 2 a 2 complesse coniugate.

In generale se $z_1, z_2, \dots, z_n$ sono le n soluzioni dell'eq. polinomiale di grado n: $p(z)=0$ con

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

si può scrivere

$$p(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$$

(per il teorema di Ruffini che dice che $z-z_k$ divide $p(z)$ se e solo se $z=z_k$ è una radice di $p(z)$)

Se gli a_i sono reali abbiamo detto che si può verificare facilmente che gli z_k che non sono reali sono a due a due complessi coniugati.

Ma se ad es. $z_2 = \bar{z}_1$ e $z_1 = a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ si ha

$$(z-z_1)(z-\bar{z}_1) = (z-(a+ib))(z-(a-ib)) =$$
$$= z^2 - z(a+ib+a-ib) + (a^2+b^2) =$$
$$= z^2 - 2az + a^2+b^2$$

cioè il polinomio prodotto ha coefficienti reali (anche se $\Delta<0$) $\Rightarrow$ ogni polinomio reale ha come fattori irriducibili (cioè non scomponibili come prodotto di polinomi di grado inferiore) solo polinomi di 1° o di 2° grado (con $\Delta<0$).

ES. $x^4+1 =$ Radici quarte di -1 !!

$$= \left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right) =$$

$$= (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1) \; : \; \text{ognuno ha } \Delta<1.$$

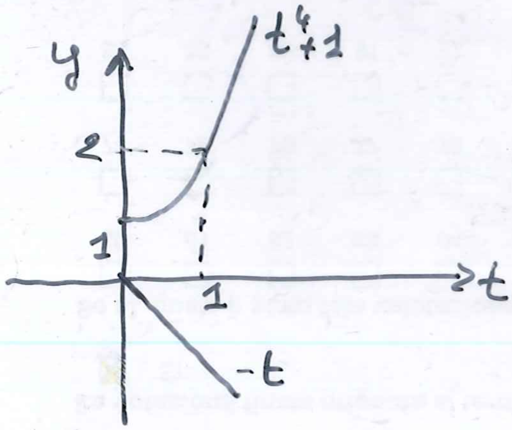
Quindi, se chiedo se x^8+x^2+1 è scomponibile nel prodotto di due polinomi di grado <8 la risposta è:

SI. Non ha radici reali (vedi pag. successiva) ma può essere scomposto nel prodotto di $\frac{8}{2}=4$ polinomi di 2° grado con $\Delta<0$.

Come faccio a stabilire che $x^8+x^2+1=0$ non ha radici reali? (7

Visto che $p(x)=x^8+x^2+1$ è funzione pari, posso sostituire $x^2=t$ con la condizione $t\geq 0$ e studiare

$$\begin{cases} t^4+t+1=0 \\ t\geq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} t^4+1=-t \\ t\geq 0 \end{cases}$$



è palese che i due grafici di

$y=t^4+1$ e $y=-t$

non hanno intersezioni nel semipiano di diseq. $t\geq 0$

(infatti il primo ha ordinate ≥ 1 il secondo ≤ 0)

Altro esercizio

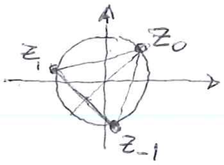
Trovare le radici terze di $w = \dfrac{i\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{5+3i}$

Svolgimento: w non è in forma algebrica nè è un rapporto in cui si veda facilmente modulo e argomento del numeratore e del denominatore. Non resta che moltiplicare num. e den. per $\overline{5+3i}=5-3i$

$$w = \frac{(-4\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{-20\sqrt{2}+3\sqrt{2}+i(5\sqrt{2}+12\sqrt{2})}{25+9} = \frac{-17\sqrt{2}+17\sqrt{2}i}{34} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Quindi $|w|=1$ e $\arg w = \frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
e le 3 radici terze hanno modulo $\sqrt[3]{1}=1$ e argomento $\theta_k = \frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3}$. Rappresentate nel piano di A.G.:



$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_1 = \frac{11}{12}\pi$: non conviene il calcolo diretto, bensì il prodotto per le radici terze di 1 di z_0:

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (è il risultato di $1(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4})$)

$$z_1 = z_0\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$
$$= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

e z_{-1} o viene calcolata allo stesso modo, oppure si sfrutta la simmetria di z_{-1} (rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante) rispetto a z_1:

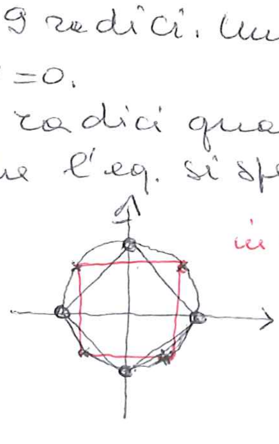
$z_{-1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Esercizio. Il numero $\tilde{z} = -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$ è radice nona di se stesso?

Svolgimento. Il testo chiede se $(\tilde{z})^9=\tilde{z}$.

Si può passare in forma trigonometrica: $\tilde{z} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$
elevare alla 9: $\tilde{z}^9 = 1^9\left(\cos\frac{9\cdot 3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{9\cdot 3}{4}\pi\right)$
osservare che $\frac{27}{4} = 6+\frac{3}{4}$ e che $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+6\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$ e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+6\pi\right) = \text{sen}\frac{3\pi}{4}$
per cui effettivamente $\tilde{z}^9=\tilde{z}$.

Oppure osservare che si chiede se $\tilde{z}$ è una soluzione di $z^9-z=0$
Equazione polinomiale di grado 9 che ha 9 radici. Una è $z=0$, le altre sono le radici 8^e di 1 : $z^8-1=0$.
Tra le radici 8^e di 1 ci sono tutte le radici quarte di 1 e tutte le radici quarte di -1 visto che l'eq. si spezza in $(z^4-1)(z^4+1)=0$. È facile disegnarle e già la volta scorsa abbiamo visto che $\tilde{z}$ è una radice 4^a di -1.



in rosso le radici 4^e di -1
in nero quelle di 1.

ESERCIZI ASSEGNATI

1) Supponiamo che una radice 4^a di w sia $2-3i$. Determinare le altre radici quarte.
(usare argomenti simili a pag(62)

2) Trovare modulo e argomento principale di $z=(1+i)^5$. Rappresentare poi sul piano di Argand-Gauss tutte le radici quinte di z.
per la prima parte pensare alla forma trigonometrica di $1+i$
per la seconda parte chiedersi: conosco una radice 5^a di z? Poi disegnare un pentagono regolare che ha tale radice come vertice (ATTENZIONE: gli angoli al centro devono misurare $\frac{360°}{5}=72°$)

3) Risolvere le seguenti equazioni a coeff. complessi non polinomiali

a) $iz^3=\bar{z}$ b) $4|z|=z^3$ c) $|z|=-iz^3$

d) $(z-i)^4=1+\sqrt{3}i$ e) $|z^3|=-4z$: dire prima di svolgere i conti quante sono le sue sol. complesse non reali.

d) si risolve a partire dall'equazione $\alpha^4=1+\sqrt{3}i$ (calcolo di radici quarte) e poi $z=i+\alpha$.

a), b), c), e) hanno tutte $z=0$ come soluzione. Isolata tale soluzione si può passare in forma trigonometrica ricordando che:

$$z=\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta) \Rightarrow \bar{z}=\rho(\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$
$$|z|=\rho$$
$$z^3=\rho^3(\cos(3\theta)+i\,\mathrm{sen}(3\theta))$$
$$|z^3|=\rho^3>0$$

e che due numeri complessi sono uguali $\Leftrightarrow$ hanno UGUAL modulo e argomento che differisce per $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$