VETTORI

grandezze individuate da : MODULO (o norma) : reale ≥ 0
DIREZIONE
VERSO.

Rappresentazione: FRECCE USCENTE DA UN PUNTO FISSATO DELLO SPAZIO : O

.... Traslazione $\underline{v}$ da O ad A
o equivalentemente da P a Q $\vec{OA}=\vec{PQ}$
o ......

identificazione di vettori EQUIPOLLENTI

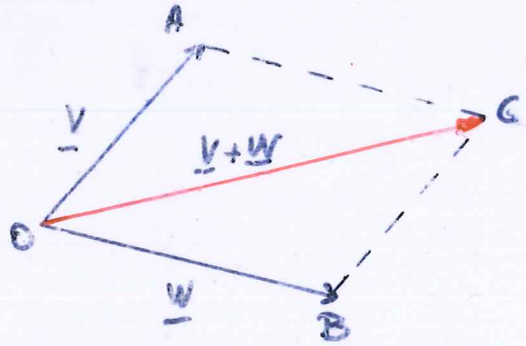
$|\underline{v}|$ è il modo di indicare il MODULO di $\underline{v}$

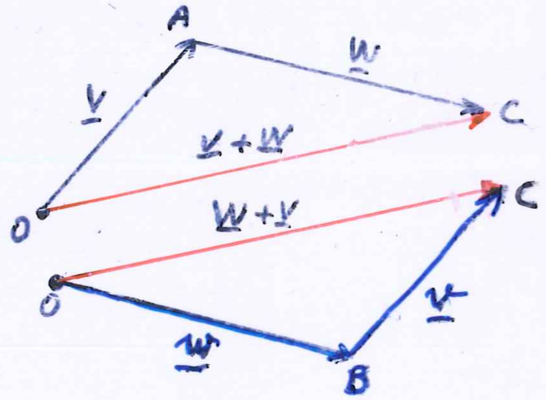
se $|\underline{v}| = 0$ dico che $\underline{v}$ è il vettore nullo : $\underset{\bullet}{0}$

OPERAZIONI

Somma

$\underline{v}+\underline{w}$

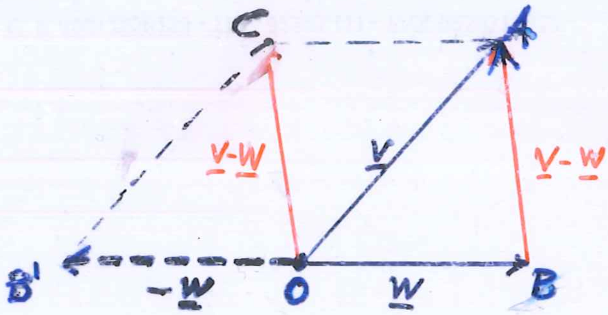




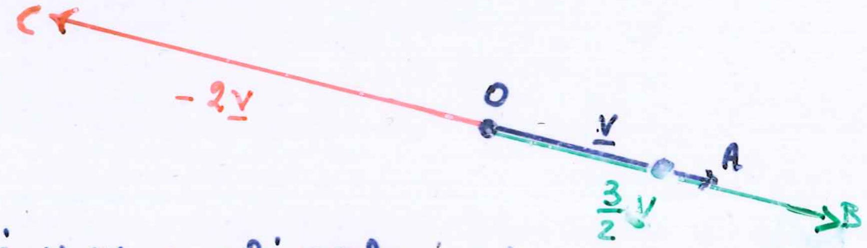
- commutativa
- associativa $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$
- neutro : vettore nullo : $\underline{0}$: $\forall \underline{v}$, $\underline{v}+\underline{0} = \underline{v} = \underline{0}+\underline{v}$
- opposto

DIFFERENZA: $\underline{v} - \underline{w}$

$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OC} = \vec{BA}$

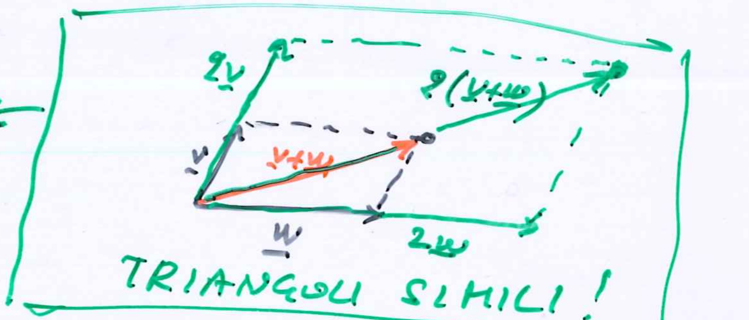


PRODOTTO PER SCALARE $t \in \mathbb{R}$



Per tutti i $\underline{v}, \underline{w}$ e gli scalari s, t:

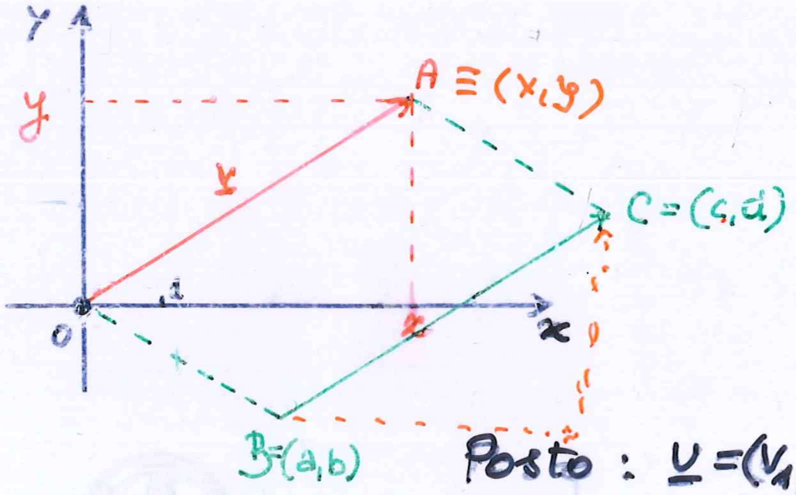
- $(s+t)\underline{v} = s\underline{v} + t\underline{v}$
- $s(\underline{v}+\underline{w}) = s\underline{v} + s\underline{w}$ ←
- $s(t\underline{v}) = (st)\underline{v}$
- $1(\underline{v}) = \underline{v}$



Dirò che i vettori con "SOMMA" e "PRODOTTO PER SCALARE" formano spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

VETTORI COME "n-uple" ORDINATE

Sist. di riferimento nel piano



$\underline{v} = \vec{OA} = (x,y)$

x, y ← componenti (scalari) di $\underline{v}$

$\vec{OA} = \vec{BC} = (c-a, d-b)$

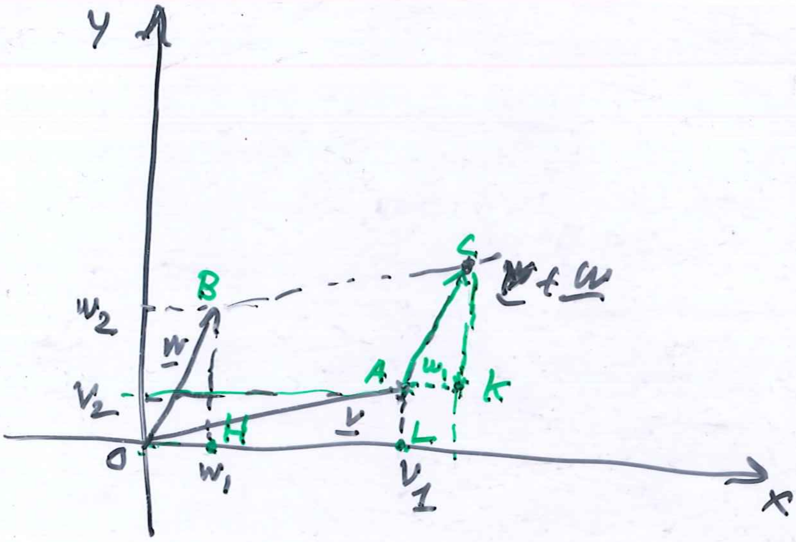
↪ equazioni param. della retta

Posto: $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$\Rightarrow \underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2)$

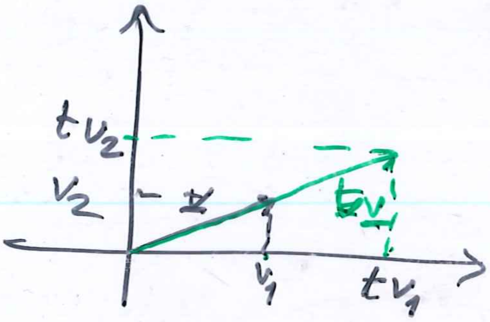
vedi V2.1



$(\underline{v}+\underline{w})_1 = v_1 + w_1$

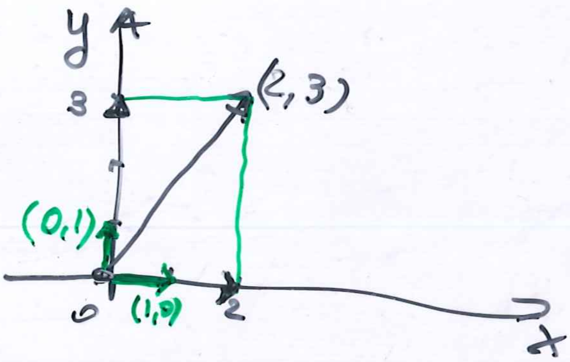
$(\underline{v}+\underline{w})_2 = v_2 + w_2$

$\underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1 , v_2+w_2)$



$t\underline{v} = (tv_1 , tv_2)$

$\underline{v} = (2,3) = (2,0) + (0,3) = 2\,(1,0) + 3\,(0,1)$



$(1,0) = \underline{i}$: diretto come l'asse x
stesso verso dell'asse x
$|\underline{i}| = 1$ (: unità di misura)

$(0,1) = \underline{j}$: diretto e equiverso con l'asse y
$|\underline{j}| = 1$ (: unità di misura)

avendo modulo 1 li chiamiamo

VERSORI

$\{\underline{i}, \underline{j}\}$ è detta base canonica (o standard) dello spazio vettoriale delle coppie ordinate di numeri reali : $\mathbb{R}^2$

VEDI SUCCESSIVA def. di BASE

Modulo di $\underline{v} = (x,y)$: $\sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$

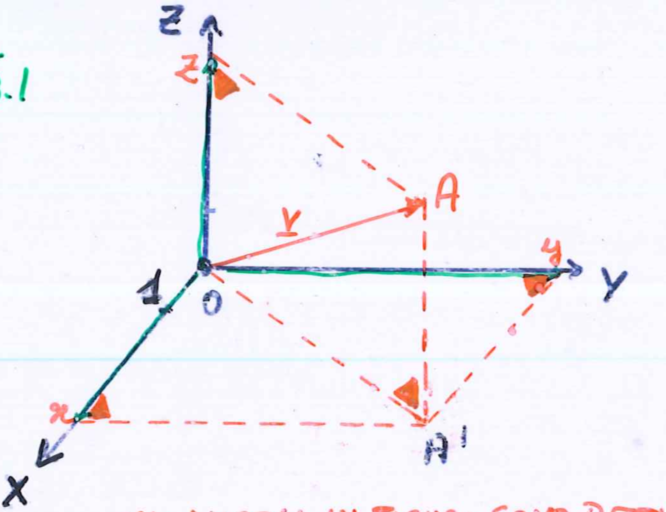
Distanza di B da C : $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Versori della base canonica: $\underline{i} = (1,0)$ $\underline{j} = (0,1)$

↳ **hanno modulo 1**

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio con orientazione DESTRORSA

Cenni a pag. V3.1



GLI ANGOLI IN FIGURA SONO RETTI

$\underline{v} = \overrightarrow{OA} = (x,y,z)$

... componenti di $\underline{v}$

vedi → V3.2 $|\underline{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow$ distanza tra 2 punti $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$

$|\overrightarrow{BC}| = |(c_1-b_1, c_2-b_2, c_3-b_3)|$

$= \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+(c_3-b_3)^2}$

Se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$\underline{v}+\underline{w} = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$

$t\underline{v} = (tv_1, tv_2, tv_3)$

Versori della base canonica $\underline{i} = (1,0,0)$, $\underline{j} = (0,1,0)$, $\underline{k} = (0,0,1)$

$(x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z) = x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$

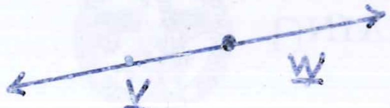
dirò che (x,y,z) è la comb. lineare mediante x,y,z di $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$

Combinazione lineare in generale ...

vedi V3.3

Indipendenza lineare ...

vedi V3.4

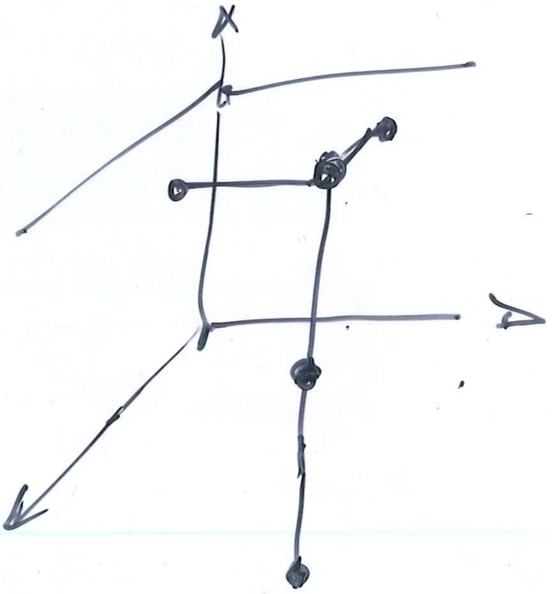


$\underline{v}, \underline{w}$ dipendenti

Concretamente in $\mathbb{R}^2$ sono dipend. 2 vettori ALLINEATI, in $\mathbb{R}^3$ sono dipend. 3 vettori complanari

$\underline{u} = a\underline{v}+b\underline{w}$

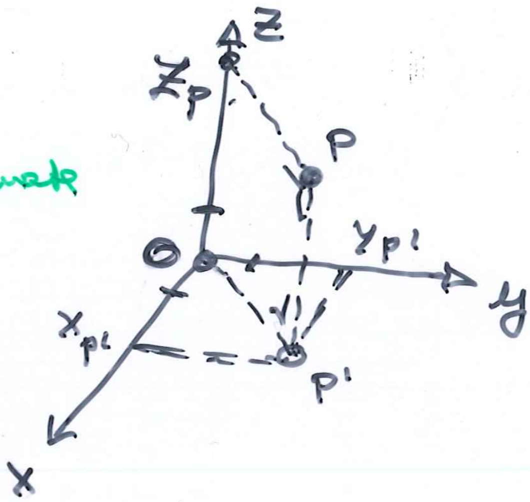
V3.1



sopra-sotto : z
avanti-indietro : x
destra-sin : y

Fix x, y, z, e unità di misura.

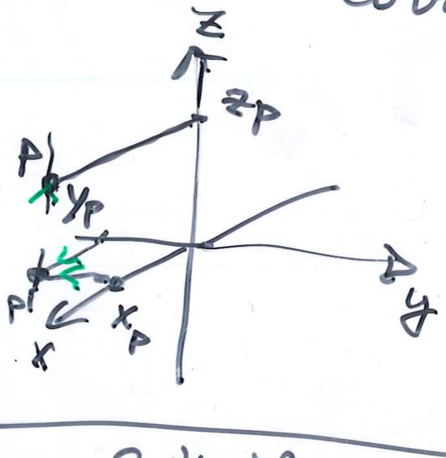
del punto alle coordinate



$P \longmapsto (x_p, y_p, z_p)$

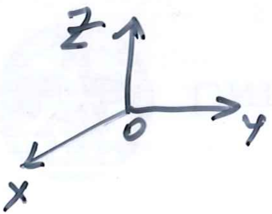
$(x_p, y_p, z_p) \longmapsto P$

corrisp. biunivoca!

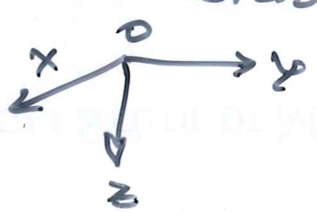


delle coordinate sui 3 assi al punto

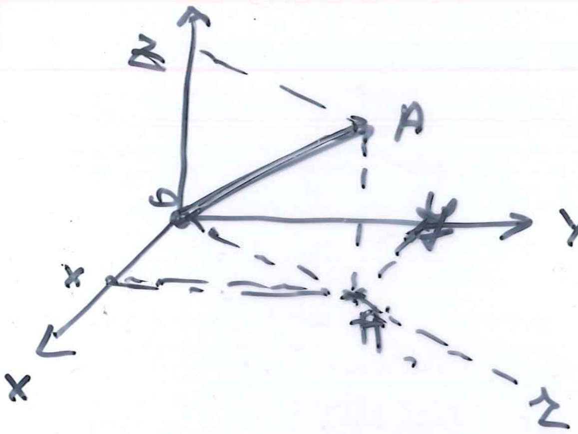
destrorso

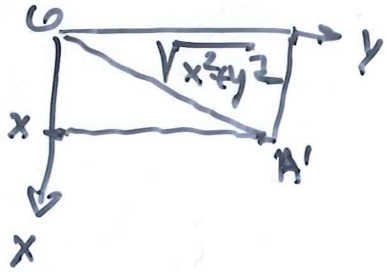


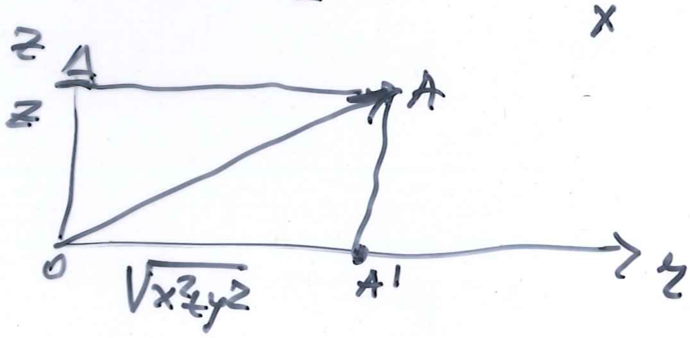
sinistrorso,



V3.2







$$\overline{OA} = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\Rightarrow$ $\overline{BC}$? considero il vettore $\vec{BC}$ e ne faccio $|\vec{BC}|$

$B = (1,0,3)$

$C = (-1,5,0)$

$\Rightarrow \vec{BC} = (-1-1,\ 5-0,\ 0-3) =$
$= (-2,5,-3)$

$|\vec{BC}| = \sqrt{2^2+5^2+3^2} = \sqrt{38}$

$\Rightarrow$ la distanza tra B e C è $\sqrt{38}$
(la lunghezza di BC è $\sqrt{38}$)

Equazione del luogo dei punti che hanno distanza R da $(0,0,0)$: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$ cioè $x^2+y^2+z^2=R^2$ (superficie sferica)

Definizione.
Dico che il vettore $\underline{v}$ è combinazione lineare di k vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ mediante gli scalari $a_1, a_2, \dots, a_k$ se posso scrivere

$$\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_k\underline{v}_k$$

Ad es. $\underline{v}=(2,1,3)$ è comb. lineare di $\underline{i}=(1,0,0)$, $\underline{j}=(0,1,0)$, $\underline{k}=(0,0,1)$ mediante i coefficienti 2, 1, 3:

$$\underline{v} = 2\underline{i} + 1\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$(2,0,0)+(0,1,0)+(0,0,3) = 2(1,0,0)+1(0,1,0)+3(0,0,1)$$

ma si ha anche

$$\underline{v} = (2,1,3) = (3,0,0)+(-1,0,2)+(0,1,1) =$$
$$= 3(1,0,0)+(-1,0,2)+(0,1,1)$$

cioè $\underline{v}$ è comb. lin. con coeff. 3, 1, 1 dei vettori $(1,0,0)$, $(-1,0,2)$, $(0,1,1)$.
ecc.

Qual è il più piccolo numero di vettori che mi serve per descrivere ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ come loro comb lineare e in maniera unica? $\Rightarrow$ concetto di dimensione di uno spazio vettoriale

ESEMPIO: $\underline{i} = (1,0)$ $\underline{j} = (0,1)$ $\underline{l} = (1,1)$

sono 3 vettori di $\mathbb{R}^2$. Per ogni vettore (x,y) di $\mathbb{R}^2$ posso scrivere

$$(x,y) = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + 0\,\underline{l} \underset{\text{infatti}}{=} (x,0) + (0,y) + (0,0)$$

ma anche: $= (x-1)\underline{i} + (y-1)\underline{j} + \underline{l} = (x-1,0) + (0,y-1) + (1,1)$

ecc. $= \dots$

Cioè la rappresentazione di (x,y) come comb. lin. di $\underline{i}, \underline{j}, \underline{l}$ non è univoca!

Non voglio questa situazione.
Lo faccio introducendo la nozione di
<u>indipendenza</u> <u>lineare</u>.

Nell'es. $\underline{l} = \underline{i} + \underline{j}$

il problema sembra essere legato al fatto che un vettore è combinazione lineare degli altri

DEF. Dico che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente <u>dipendenti</u> se
<u>almeno</u> uno di essi si può rappresentare come comb. lin. degli altri

(ad es: $(1,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,1,0)$ $\Rightarrow (2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(0,1,0)$

oppure (LOGICAMENTE EQUIVALENTE) esistono $a_1, \dots, a_k$ almeno uno dei quali sia $\neq 0$ e tali che

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_k\underline{v}_k = \underline{0}.$$

Nell'es. iniziale: $1\,\underline{i} + 1\,\underline{j} - 1\,\underline{l} = \underline{0}$

Sono <u>indipendenti</u> se non sono dipendenti, cioè

$$a_1\underline{v}_1 + \dots + a_k\underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$$

Chiamo base per $\mathbb{R}^3$ un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ si possa rappresentare come loro comb. lineare.

Ad es.:

$$x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow x=y=z=0$$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono lin. indip.

e tutti i vett. (x,y,z) sono loro comb. lin.

$\Rightarrow \underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

Esempio. Stabilire se $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono lin. indip.

$\underline{u} = (1,0,2) \quad \underline{v} = (0,1,1) \quad \underline{w} = (1,2,0)$

E' vero che:

$$a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow a=b=c=0 \;?$$

$$(a,0,2a) + (0,b,b) + (c,2c,0) = (0,0,0)$$

$$(a+0+c,\; 0+b+2c,\; 2a+2b+0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+2c=0 \\ 2a+2b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-a \\ -a-2a=0 \Rightarrow -3a=0 \Rightarrow a=0 \\ b=-a \end{cases}$$

$c=0$

$b=0$

Sì è vero e quindi sono indipendenti anzi sono addirittura una base di $\mathbb{R}^3$

(VERIFICARE che $(x,y,z) = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ per opportuni $a,b,c \in \mathbb{R}$ qualunque siano x,y,z.)