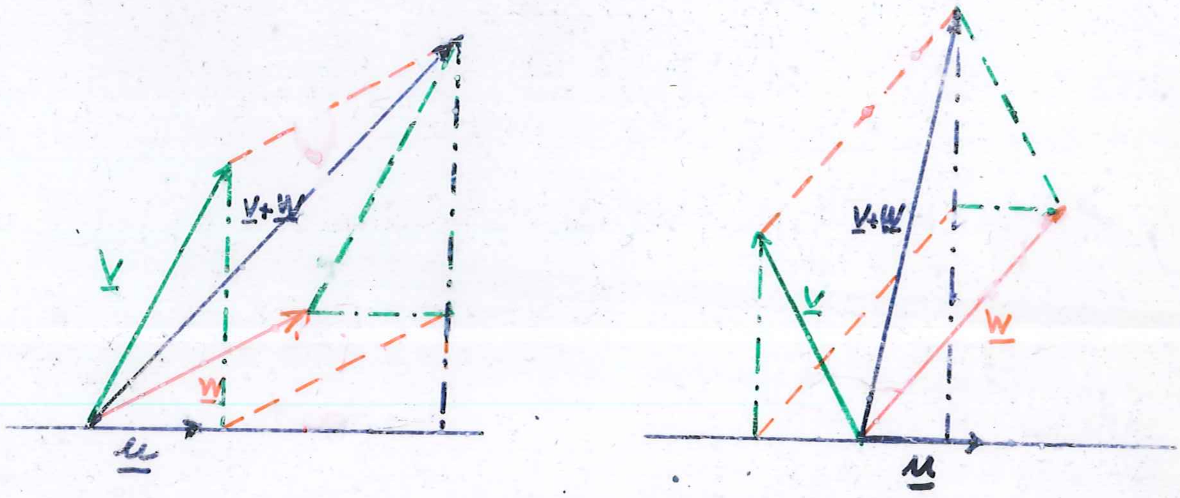
Prodotto scalare di due vettori $\underline{v}, \underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\cdot|\underline{w}|\cos\alpha$ ove $\alpha = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$, $\alpha \in [0,\pi]$.

- commutativo
- distributivo: $\underline{u}\cdot(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\cdot\underline{v} + \underline{u}\cdot\underline{w}$ $\forall\, \underline{u},\underline{v},\underline{w}$



TESI

$\cancel{|\underline{u}|}\,|\underline{v}+\underline{w}|\cos(\widehat{\underline{u}\,(\underline{v}+\underline{w})}) = \cancel{|\underline{u}|}\cdot|\underline{v}|\cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{v}}) + \cancel{|\underline{u}|}\cdot|\underline{w}|\cos(\widehat{\underline{u}\,\underline{w}})$

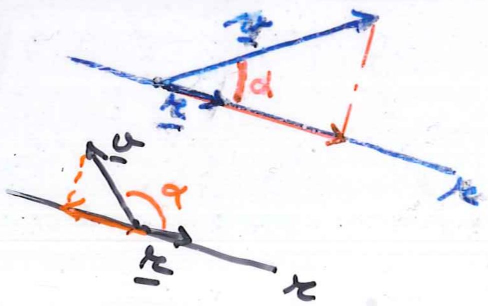
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \underline{v},\underline{w}$: $(t\underline{v})\cdot\underline{w} = t\,(\underline{v}\cdot\underline{w})$

- $\underline{v}\cdot\underline{v} = |\underline{v}|\cdot|\underline{v}|\cos 0 = |\underline{v}|^2$

- $\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$ e $\underline{v}\neq\underline{0}, \underline{w}\neq\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

Proiezione ORTOGONALE di un vettore $\underline{v}$ lungo la direzione di una retta r (componente vettoriale di $\underline{v}$ lungo r):

$$\left[\underline{v}\cdot\left(\underline{r}/|\underline{r}|\right)\right]\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$



V5.1

$\underline{v}=(2,1,3) \qquad \underline{w}=(-1,3,2)$

Spieghiamo i passaggi che portano alla formula su questo esempio!

$\underline{v}\cdot\underline{w}$?

$\underline{v}= 2\underline{i}+1\underline{j}+3\underline{k}$

$\underline{w}= -1\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = (2\underline{i}+1\underline{j}+3\underline{k})\cdot(-1\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}) =$ DISTR.

$= (2\underline{i}+1\underline{j}+3\underline{k})\cdot(-1\underline{i}) +$

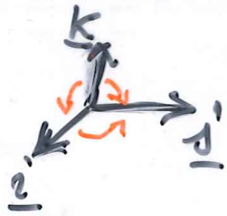
$+(2\underline{i}+1\underline{j}+3\underline{k})\cdot(3\underline{j}) +$

$+(2\underline{i}+1\underline{j}+3\underline{k})\cdot(2\underline{k}) =$ DISTR + omog.

$= -2\overset{=1^2=1}{\boxed{\underline{i}\cdot\underline{i}}} - 1\,\underline{j}\cdot\underline{i} - 3\overset{=0}{\boxed{\underline{k}\cdot\underline{i}}} +$

$+6\overset{0}{\boxed{\underline{i}\cdot\underline{j}}} + 3\boxed{\underline{j}\cdot\underline{j}} + 9\overset{=0}{\boxed{\underline{k}\cdot\underline{j}}} +$

$+4\,\underline{i}\cdot\underline{k} + 2\,\underline{j}\cdot\underline{k} + 6\boxed{\underline{k}\cdot\underline{k}} =$



$= -2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 1 = 7$

Qual è l'angolo α tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$?

$\underline{v}\cdot\underline{w} = |\underline{v}|\,|\underline{w}| \cos\alpha \qquad \alpha = \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$

$|\underline{v}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14} \qquad |\underline{w}| = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$

Sostituendo

$$7 = \sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

poiché $\alpha \in [0,\pi]$ posso usare arccos:

$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

In generale $\cos\alpha = \dfrac{\underline{v}\cdot\underline{w}}{|\underline{v}|\,|\underline{w}|}$

In termini di componenti:

Se $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) = v_1 \underline{i} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) + v_2 \underline{j} \cdot (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j}) =$$

$$= (v_1 \underline{i}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_1 \underline{i}) \cdot (w_2 \underline{j}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_1 \underline{i}) + (v_2 \underline{j}) \cdot (w_2 \underline{j}) =$$

$$= v_1 w_1 (\underline{i} \cdot \underline{i}) + v_1 w_2 (\underline{i} \cdot \underline{j}) + v_2 w_1 (\underline{j} \cdot \underline{i}) + v_2 w_2 (\underline{j} \cdot \underline{j}) =$$

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2$$

$\underline{i} \cdot \underline{j} = 0 = \underline{j} \cdot \underline{i}$
$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 = \underline{j} \cdot \underline{j}$

$$\boxed{\text{se } \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)\ ,\ \underline{w} = (w_1, w_2, w_3)\ :\ \underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

in $\mathbb{R}^3$

vedi esempio concreto a pag V5.1

ES 1 Trovare l'angolo tra i due vettori $\underline{v} = (1,2,3)$ e $\underline{w} = (3,-1,2)$:

$$1 \cdot 3 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cos\alpha = \sqrt{1+4+9}\sqrt{9+1+4} \cos\alpha$$

$\Rightarrow \cos\alpha =$

vedi pag V5.1

In generale:

ES 2 Trovare un vettore ortogonale a $\underline{v} = (-1, 2, 1)$ e a $\underline{w} = (3, 1, 4)$ di modulo 1.

$\underline{u} = (x, y, z)$

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff$

$\underline{u} \perp \underline{w} \iff$

Vedi pag V5.2

$|\underline{u}| = \ldots$

ES 3 I vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ dell'esercizio precedente sono indipendenti? **SI**

$\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono indip. poiché nessuno dei due è multiplo dell'altro. Se fosse $\underline{u} = a\underline{v} + b\underline{w}$, moltiplicando per $\underline{v}$ e per $\underline{w}$

ES2 V5.2

Trovare un vettore $\perp$ a $\underline{v}=(-1,2,1)$, a $\underline{w}=(3,1,4)$ e di modulo 1.

<u>Sol.</u> $\underline{u}=(x,y,z)$ sia "la" soluzione

$$\underline{u}\perp\underline{v} \quad : \quad \underline{u}\cdot\underline{v}=0$$
$$\underline{u}\perp\underline{w} \quad : \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0$$
$$|\underline{u}|=1 \quad : \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$$

$$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(-1,2,1)=0\\(x,y,z)\cdot(3,1,4)=0\end{cases} \iff \begin{cases}-x+2y+z=0\\3x+y+4z=0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x=2y+z\\6y+3z+y+4z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=2y+z\\7y+7z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=y\\z=-y\end{cases}$$

le soluz. del sistema sono delle terne (x,y,z): posto $y=k\in\mathbb{R}$ si avrà

$$(x,y,z)=(k,k,-k)$$

$$|(k,k,-k)|=1 \iff k^2+k^2+k^2=1 \iff k^2=\frac{1}{3}$$

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

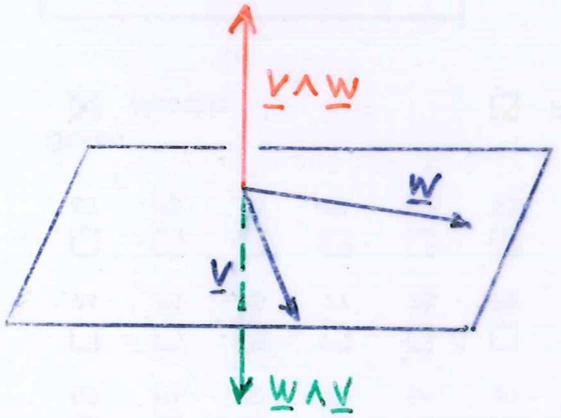
Il problema ha 2 soluzioni

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

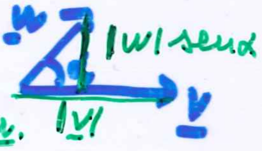
Prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ nello spazio di dim. 3

- $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \sin\alpha$
- $\underline{v} \wedge \underline{w}$ ortogonale tanto a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$
- $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}$ è una terna DESTRORSA



- anticommutativo
  $\underline{w} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{w}$
- $(t\underline{v}) \wedge \underline{w} = t(\underline{v} \wedge \underline{w})$
- $\underline{v} \wedge \underline{v} = \underline{0}$
- distributivo
  $\underline{u} \wedge (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \wedge \underline{v} + \underline{u} \wedge \underline{w}$

Geometricamente $|\underline{v} \wedge \underline{w}|$ = area del parallelogramma di lati $\underline{v}$ e $\underline{w}$.



$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$ ....

$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$ $\quad$ $\underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$ $\quad$ $\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$

→ VEDI PAG V6.1

Dunque se $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

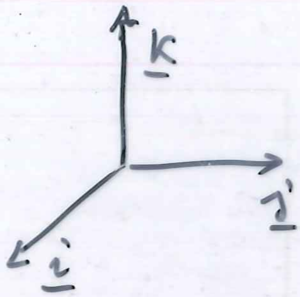
$$\underline{v} \wedge \underline{w} = (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \wedge (w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k}) = \text{DISTR.}$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\underline{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\underline{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\underline{k}$$

Altro modo di rappresentarlo a pag V6.1, fondo

Es 2 pag 5 $\quad \underline{u} = \dfrac{\underline{v} \wedge \underline{w}}{|\underline{v} \wedge \underline{w}|}$ oppure il suo opposto

VEDI PAG V6.2



$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$$

$$|\underline{i} \wedge \underline{j}| = |\underline{i}|\,|\underline{j}| \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = |\underline{i}|\,|\underline{j}| = 1$$

($\underline{k}$ è $\perp$ $\underline{i}, \underline{j}$ e forma con essi una terna destrorsa)

$$\underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$$

Analogamente

$$\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} \qquad e \qquad \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$$

$$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} \qquad e \qquad \underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j}$$

$$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{0} \qquad \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{0} \qquad \underline{k} \wedge \underline{k} = \underline{0}$$

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$\searrow$ + $\qquad \nearrow$ −

$$= \underline{i}\,(v_2 w_3 - v_3 w_2) + \underline{j}\,(v_3 w_1 - v_1 w_3) +$$
$$+ \underline{k}\,(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

Es. $\underline{v} \wedge \underline{w}$ con $\underline{v} = (-1, 2, 1)$ $\underline{w} = (3, 1, 4)$

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(8-1) + \underline{j}\,(3+4) + \underline{k}\,(-1-6) =$$

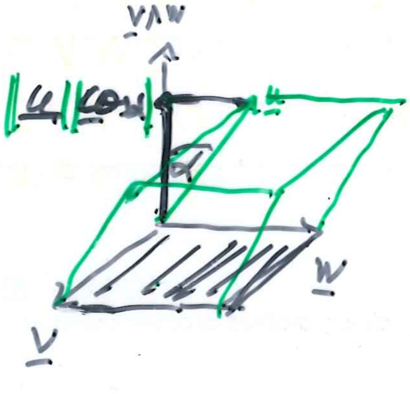
$$= 7\underline{i} + 7\underline{j} - 7\underline{k}$$

Nota: $|\underline{v} \wedge \underline{w}| = |7(\underline{i} + \underline{j} - \underline{k})| = 7\sqrt{1+1+1} = 7\sqrt{3}$

Se voglio un vettore $\perp$ $\underline{v}, \underline{w}$ e di modulo 1 basta dividere $\underline{v} \wedge \underline{w}$ per il suo modulo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{k}$$

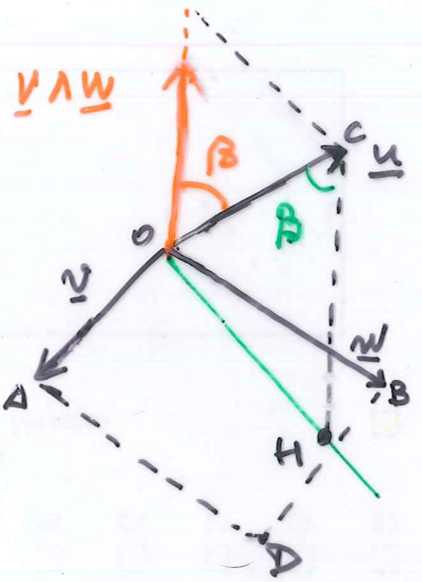
Prodotto misto: idee:



$|\underline{v} \wedge \underline{w}|$ è l'area del parall.

$|\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ volume del parallel. di spigoli $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

$\Rightarrow$ l'annullarsi del prodotto misto garantisce che $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono DIpendenti; il non annullarsi ... INDIP.

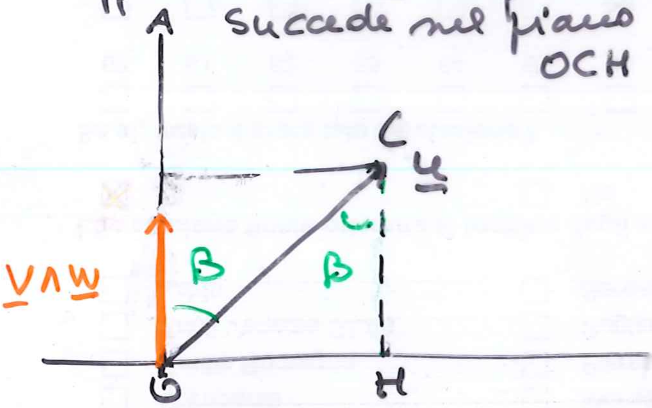


$\underline{u} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w}) =$

$= |\underline{u}| \cdot |\underline{v} \wedge \underline{w}| \cos\beta$

ove β è l'angolo tra $\underline{u}$ e $\underline{v} \wedge \underline{w}$

rappresentazione di quanto succede nel piano OCH

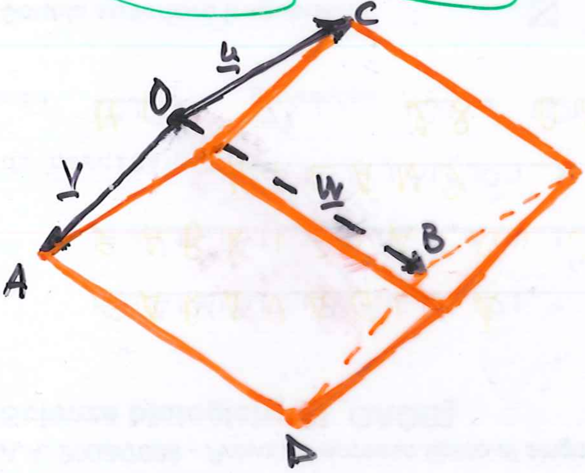


$|\underline{v} \wedge \underline{w}| =$ area del parallelogram. con lati OA, OB ecc..

$|\underline{u}| \cos\beta = CH$

$\Rightarrow$ il prodotto misto rappresenta (a meno del segno) il volume del parallelepipedo di vertici O, A, B, C ecc.

infatti $\underline{u} \circ (\underline{v} \wedge \underline{w})$ può essere < 0. Succede se $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$



Quando si annulla? quando un lato è $= 0 \Rightarrow$ uno dei 3 vettori è $\underline{0}$

oppure quando $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono proporzionali (hanno ugual direzione)

oppure $\underline{u} \in$ al piano OAB poiché in tal caso $\beta = \frac{\pi}{2}$

V7.2

<u>Prodotto</u> <u>misto</u> $\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})$, $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$

il risultato è un numero!

$|\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w})|$ geometricamente esprime:

VEDI fondo pag V6.2 e meglio V7.1

quindi si annulla se e solo se:

i 3 vettori sono dipendenti

Se $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{w}) = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} : \text{DETERMINANTE DELLA MATRICE} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix}$$

GEOMETRIA CON I VETTORI:

<u>Equazioni</u> <u>parametriche</u> della retta

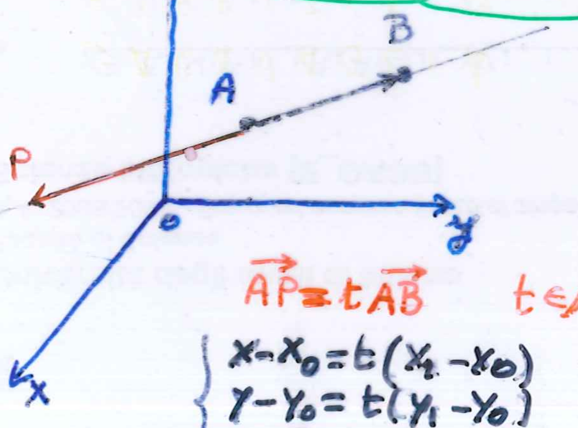
una retta è nota:

- dati due suoi punti distinti $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$

oppure

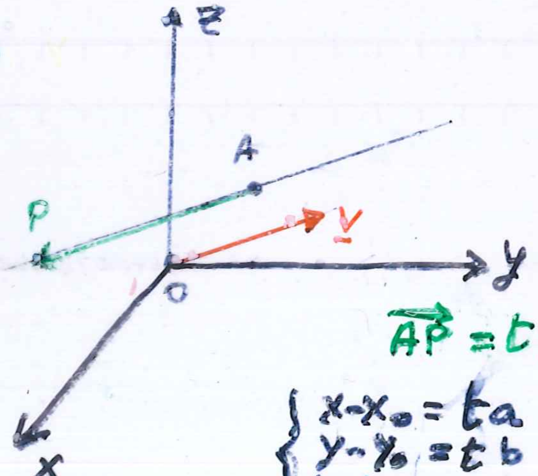
- dato un suo punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e una direzione $\underline{v} = (a, b, c)$ cui la retta è parallela

VEDI PAG 10-11.



$\vec{AP} = t\vec{AB}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) \end{cases}$$



$\vec{AP} = t\underline{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$

Illustrazione del calcolo delle equazioni parametriche di una retta passante per 2 punti

$A = (1,-1,1)$

$B = (0,1,-1)$

retta per AB:

$$\begin{cases} x-1 = t(0-1) \\ y+1 = t(1+1) \\ z-1 = t(-1-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 = -t \\ y+1 = 2t \\ z-1 = -2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = +1-t \\ y = -1+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$$

$$P = A + t\overrightarrow{AB}$$

vettore che dà la direz. della retta si ottiene riportando ordinatamente i coeff. del parametro t : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

ES 2

Retta per $A = (2,1,3)$ e parallela al vettore $\underline{v} = (1,-3,0)$. Le eq. param. sono

$$\begin{cases} x = 2 + 1\cdot t \\ y = 1 + (-3)t \\ z = 3 + 0\cdot t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 3 \end{cases}$$

Per passare a una rappr. senza parametro ricavo t da una delle 3 eq. e sostituisco nelle altre:

$$\begin{cases} t = x-2 \\ y = 1-3(x-2) \\ z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x+y=7 \\ z=3 \end{cases}$$

Mi servono 2 eq. in x, y, z e senza parametro per rappr. una retta.

Es1 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(1,-1,1)$ e $B=(0,1,-1)$.

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

ERRORE SUL TESTO: EQUAZIONE CARTESIANA della retta

Appena svolto

Es2 Trovare le eq. parametriche della retta passante per $A=(2,1,3)$ e "parallela" al vettore $\underline{v}=(1,-3,0)$

Passare poi a una rappresentazione che non contenga il parametro

vedi pag V7.2

Es3 Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $A=(3,1,2)$ e ortogonale alle due rette di equazioni $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$ e

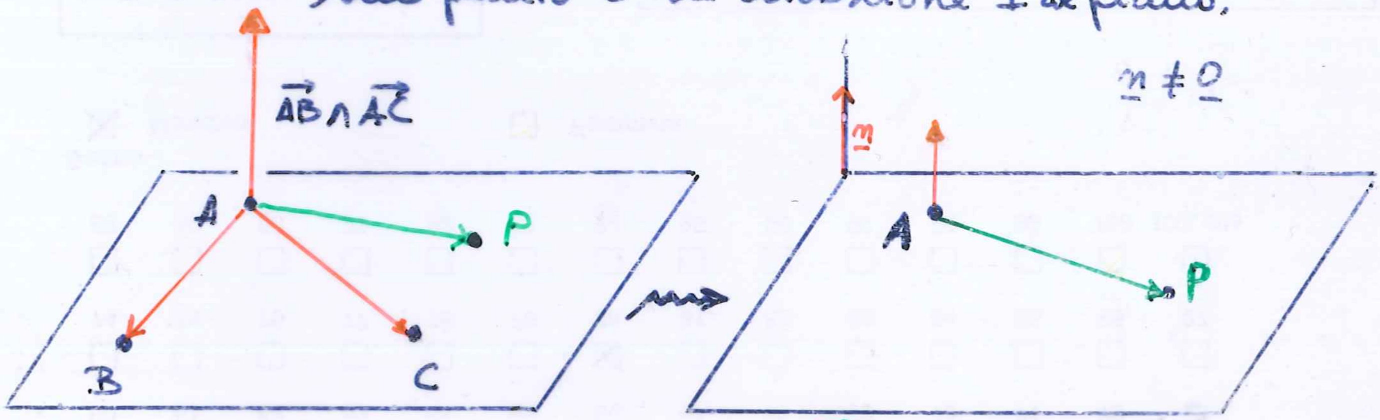
$$\frac{x-1}{2}=3y-1=\frac{4z+1}{3}$$

Es4 Il sistema $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 4x+y-z=2 \end{cases}$ rappresenta una retta nello spazio di dimensione 3? Se sì trovarne i COSENI DIRETTORI

Equazione cartesiana del piano

Un piano è noto

- dati 3 suoi punti non allineati
- data 1 sua retta e un suo punto non appartenente alla retta
- dato un suo punto e la direzione $\perp$ al piano.



$\vec{AP}$ è ortogonale a $\underline{n}$

$\underline{n}\cdot\vec{AP}=0$

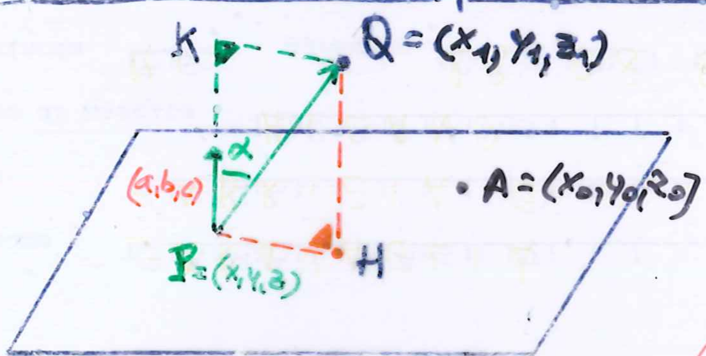
Se $\underline{n}=(a,b,c)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$, $P=(x,y,z)$:

$$(a,b,c)\bullet(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

- $(a,b,c)\cdot(x_0,y_0,z_0)=0 \iff$ il piano passa per l'origine
- $a=0 \implies b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$: è $/\!/$ asse x ecc.
- $a=0$ e $b=0 \implies c\neq 0$ eq. piano è $z-z_0=0$: parallelo a xOy ecc.

Distanza di un punto da un piano



$$\overline{QH}=\overline{PK}=\underbrace{\frac{|\underline{n}\cdot\vec{PQ}|}{|\underline{n}|\cdot\cancel{|\vec{PQ}|}}}_{\cos\alpha}\cancel{|\vec{PQ}|}$$

$$=\frac{|a(x_1-x)+b(y_1-y)+c(z_1-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

con $(x,y,z)\in$ piano $\Rightarrow$

$$\boxed{ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0}$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

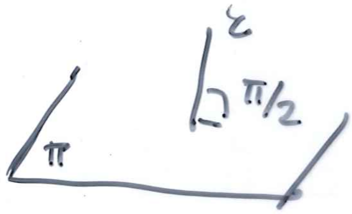
Significato del Termine noto,

Se $|(a,b,c)|=1$: a meno del segno, rappresenta la distanza da $(0,0,0)$

Vg.1

Determinare l'eq. del piano $\pi \perp$ alla retta r di equazioni $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 5 \\ z = 1 + t \end{cases}$

e passante per $A = (3, 2, 1)$



la direzione $\perp$ al piano è quella della retta r. Il vettore che dà la direz. di r è $\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ con $P = (x, y, z)$

$(-1, 0, 1) \cdot (x-3, y-2, z-1) = 0$

$-1(x-3) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0$

$-x + z + 2 = 0$ o anche

$\boxed{x - z = 2}$ è parallelo all'asse y

VERIFICA: l'asse y è $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Ne faccio l'intersez. con π

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow$ sist. impossibile $\Rightarrow$ non ci sono punti comuni

In generale piano e retta sono paralleli se il vettore che dà la direz. del piano è $\perp$ a quello che dà la dir. della retta

V1.2

Angolo tra 2 rette nello spazio
è l'angolo formato dai loro vettori direzione

anche se sono sghembe.

Angolo tra i 2 piani è l'angolo tra i vettori che danno la direz dei 2 piani.