

INSIEMI e RELAZIONI (binarie)

(30)

Si riferiscono note la terminologia e la simbologia elementari (→ Testo Cap. 1.1).

Ricchiamiamo due nozioni che vengono usate nel seguito.

DEF. 1 Siano A e B due insiemi. Si dice prodotto cartesiano di A per B l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

costituito dalle copie ordinate degli elementi di A e di B .

ESEMPIO. Se $A = \{x, y\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ si ha

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$$

mentre

$$B \times A = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}.$$

I due insiemi sono diversi!

In generale: Se $A \neq B$, allora $A \times B \neq B \times A$.

ESEMPIO. Se $A = \{x, y\}$, con $x \neq y$:

$$A \times A = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$$

e, attenzione, $(x, y) \neq (y, x)$: quindi $A \times A$ ha 4 elementi distinti.

- Più in generale, se A è formato da un numero finito n di elementi, quanti sono gli elementi di $A \times A$? n^2 , poiché:

$$A = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} \Rightarrow A \times A = \{(x_1, x_1), \dots, (x_1, x_n), \dots, (x_i, x_1), \dots, (x_i, x_n), \dots, (x_n, x_1), \dots, (x_n, x_n)\}$$

(31)

Ciò motiva la scrittura simbolica: $A \times A = A^2$.

Ad es. \mathbb{R}^2 denota le coppie ordinate di numeri reali
[PIANO CARTESIANO REALE!].

Si definisce anche il cartesiano di m insiemi A_1, \dots, A_m :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, m\}$$

e se $A_1 = A_2 = \dots = A_m$ si scrive $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{m \text{ volte}} = A^m$.

DEF.2 Sia S un insieme. La collezione formato da tutti (e soli!) i suoi sottinsiemi, ivi compresi l'insieme stesso S e l'insieme vuoto \emptyset è detta insieme delle parti di S e indicata con $\mathcal{P}(S)$.

- Ad es. se $S = \{a, b\}$, l'insieme delle parti di S è formato da $\emptyset, \{a\}, \{b\}, S$.

Quindi

$$\{a\} \subseteq S \quad \text{ma} \quad \{\{a\}\} \in \mathcal{P}(S)$$

cioè $\{a\}$ è un sottinsieme di S ma un elemento del - l'insieme delle parti di S .

- Se $S = \{1, 2, 3\}$, l'insieme

$$X = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$$

è un sottinsieme (proprio) di $\mathcal{P}(S)$: $X \subsetneq \mathcal{P}(S)$.

Un' altra volta

$$Y = \{1, \{2\}, \{2, 3\}\}$$

NON è un sottinsieme di $\mathcal{P}(S)$. Si ha

$$Y = \{1\} \cup \{\{2\}, \{2, 3\}\} \subseteq S \cup \mathcal{P}(S)$$

- Se S è formato da un numero finito n di elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(S)$?

Capiamolo su un esempio: $n=3$, $S = \{a, b, c\}$.

Ad ogni sottoinsieme di S faccio corrispondere^(*) una terza ordinata di "uni" e di "zeri" - cioè un elemento di $\{0, 1\}^3$ - in questo modo:

- considero la 1^a, la 2^a e la 3^a posizione nella terza rispett. come posizione di a, di b e di c
- nelle singole posizioni metto 1 se l'elemento appartiene al sottoinsieme, 0 se non appartiene.

Ad es. a $\{a, b\}$ faccio corrispondere $(1, 1, 0)$

a	$\{c\}$	"	"	$(0, 0, 1)$
a	S	"	"	$(1, 1, 1)$
a	\emptyset	"	"	$(0, 0, 0)$

Il numero di terne così fatte è 2^3 e quindi il numero di elementi di $P(S)$ è 2^3 .

In generale se $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ faccio corrispondere a ogni elemento di $P(S)$ una "n-upla" di 1 e 0 cioè un elemento di $\{0, 1\}^n$

$\Rightarrow P(S)$ ha 2^n elementi.

Ad es. se S è costituito delle 10 cifre decimali ordinate in modo naturale: $\{0, 1, \dots, 9\}$, il sottoinsieme

$\{0, 7, 2\}$ è rappresentato da $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ e $P(S)$ ha $2^{10} = 1024$ elementi

(*) La corrispondenza in questione è BIUNIVOCA, fissato l'ordine in cui si susseguono gli elementi dell'insieme S .