

## Applicazioni tra insiemi finiti: questioni ENUMERATIVE

(53)

Un insieme  $X$  è detto finito di ordine  $n$  se esiste una applicazione bimivoca

$$\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$$

Scriveremo  $|X| = n$  e denoteremo gli elementi di  $X$  con  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .  $|X|$  si dice ordine di  $X$ .

Sia  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  finito di ordine  $k$

Quante sono le applicazioni da  $X$  a  $Y$ ?

Decominciamo con l'osservare che possiamo descrivere una applicazione da  $X$  a  $Y$  elencando i corrispondenti di  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Ad es. se  $X = \{1, 2, 3\}$  e  $Y = \{a, b\}$  l'applicazione  $\varphi : X \rightarrow Y$  tale che  $\varphi(1) = a$ ,  $\varphi(2) = b$ ,  $\varphi(3) = a$  si può indicare con la tabella

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

in cui nella seconda riga si elencano i corrispondenti di 1, 2, 3.

Con i 2 insiemi dell'esempio si vede che le scelte possibili

- per i corrispondenti di 1 sono 2
- per i corrispondenti di 2 sono 2
- per i corrispondenti di 3 sono 2

Le scelte nei singoli corrispondenti non si condizionano a vicenda  $\Rightarrow$  ci sono 2 · 2 · 2 applicazioni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

L'idea è del tutto generale e quindi

se  $|X|=n$  e  $|Y|=k$  l'insieme delle applicazioni da  $X$  a  $Y$  ha ordine  $k^n$

(per ogni elemento di  $X$  ci sono  $k$  scelte possibili indipendenti tra loro)

Cio' spiega perché duato l'ins. delle applicazioni da  $X$  a  $Y$  con  $Y^X$ .

Considero una applicazione  $\varphi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_n} \end{pmatrix}$  ove gli  $y_{i_1}, \dots, y_{i_n}$  possono coincidere sul tutto o in parte.

1)  $\varphi$  è iniettiva  $\Leftrightarrow$  nella 2<sup>a</sup> riga non compaiono ripetizioni  
 $\Rightarrow k \geq n$  (condizione solo NECESSARIA)

2)  $\varphi$  è suriettiva  $\Leftrightarrow$  nella 2<sup>a</sup> riga compaiono tutti gli elementi di  $Y$   
 $\Rightarrow k \leq n$  (condizione solo NECESSARIA)

Quindi non è possibile avere applicazioni biconveche tra due insiemini finiti di ordine diverso.

Se però  $n=k$ , un'app.  $\varphi: X \rightarrow Y$  è iniettiva se e solo se è suriettiva. Infatti

1) se  $\varphi$  è iniettiva nella 2<sup>a</sup> riga non ci sono ripetizioni e quindi devono compaiono tutti gli  $n$  elem. di  $Y$   $\Rightarrow \varphi$  è suriettiva

2) se  $\varphi$  è suriettiva nella 2<sup>a</sup> riga compaiono tutti gli  $n$  elementi di  $Y$  e quindi non ce ne può essere 1 ripetuto  $\Rightarrow \varphi$  è iniettiva

Quante sono le applicazioni iniettive da  $X$  a  $Y$ ?

Innanzitutto deve essere  $n = |X| \leq |Y| = k$

Poi posso costruire una applicazione iniettiva con

$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
scelgo $y_{i_1}$ tra i $k$ elementi di $Y$	scelgo $y_{i_2}$ tra i $(k-1)$ elem. di $Y \setminus \{y_{i_1}\}$		scelgo $y_{i_n}$ tra i $(k-n+1)$ elem. di $Y \setminus \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n-1}}\}$

$$\Rightarrow k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) \text{ scelte} \Rightarrow$$

l'insieme delle applicazioni iniettive da  $X$  a  $Y$  ha ordine  $k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)$ .

Ad es. Se  $|X|=2$  e  $|Y|=3$ , ci sono  $3^2$  applicaz. da  $X$  a  $Y$  e di queste sono iniettive  $3 \cdot 2 = 6$  applicaz.

$$X = \{a, b\} \quad Y = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{Iniettive: } \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Non iniettive: } \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

In particolare se  $|k=n|$  ogni applicazione iniettiva è bimivoca e l'insieme delle applicazioni bimivoca che ha ordine  $n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Sono tante... ma sono un sottoinsieme "trascucabile" di  $Y^X$ : infatti  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

Se  $X=Y$  l'insieme delle applicazioni bimivoca che dà  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  a  $X$  è denotato con  $S_n$  e ogni applicazione viene detta permutazione.

$|S_n| = n!$  per quanto detto.

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi con

$$|X|=n \leq k=|Y|.$$

Il numero che esprime l'ordine dell'insieme delle funzioni iniettive da  $X$  a  $Y$  è comunemente noto come **NUMERO delle DISPOSIZIONI** di  $k$  OGGETTI a  $n$  a  $n$ ; e in effetti abbiamo costruito l'applicazione iniettiva "disponendo"  $n$  dei  $k$  elementi di  $Y$  nelle posizioni  $1, 2, \dots, n$  che stanno "sotto"  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Due disposizioni (e le corrispondenti funzioni) sono diverse se differiscono per almeno 1 elemento o per l'ordine in cui gli elementi sono elencati; ades.  $X = \{a, b\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \psi$$

anche se l'insieme  $\varphi(X)$  è uguale a  $\psi(X)$ .

Le possibili immagini di funzioni iniettive da  $X$  a  $Y$  sono i sottinsiemi di  $Y$  formati da  $n$  elementi: il loro numero  $\binom{k}{n}$  è il numero delle combinazioni di  $k$  oggetti a  $n$  a  $n$ .

Due applicazioni iniettive da  $X$  a  $Y$  hanno la stessa immagine se e solo se le due disposizioni sono ottenute una dall'altra operando una delle possibili  $n!$  permutazioni di quegli oggetti.

Dunque

$$k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) = n! \binom{k}{n}$$

$$\text{Cioè } \binom{k}{n} = \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{n!} = \frac{k!}{(k-n)! n!}$$

## Prodotto (o composizione) di applicazioni

(57)

Essendo le applicazioni delle relazioni particolari, vale la definizione di composizione (nel testo: prodotto) già vista:

se  $\varphi: X \rightarrow Y$  e  $\psi: Y \rightarrow Z$  sono due applicazioni si definisce composizione delle due la relazione

$\psi \circ \varphi = \{ (x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ t.c. } \varphi(x) = y \text{ e } \psi(y) = z \}$   
ma in questo caso y se esiste è unico!

Quindi:  $\psi \circ \varphi$  è una funzione da  $X$  a  $Z$

$$\psi \circ \varphi: X \rightarrow Z$$



che è definita come

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) \quad \forall x \in X$$

SILEGGE:  
 $\varphi: F_1$   
 $\psi: P_S I$

Ovviamente vale la prop. associativa

mentre non vale in generale la prop. commutativa:

- se  $X \neq Z$  non ci si può pensare;



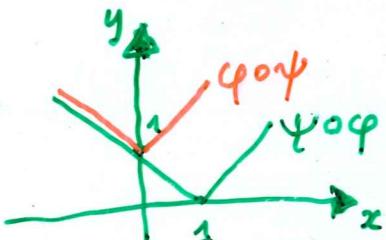
- se  $X = Z$  il risultato dell'applicazione di  $\psi \circ \varphi$  e di  $\varphi \circ \psi$  può essere diverso  
ad es.

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sia } \varphi(x) = x+1$$

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sia } \psi(x) = |x|$$

$$\text{allora } \psi \circ \varphi(x) = \psi(x+1) = |x+1|$$

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(|x|) = |x| + 1$$



OSS. Siano  $\varphi: X \rightarrow Y$  e  $\psi: Y \rightarrow Z$  due applicazioni.

- 1) Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono entrambe iniettive, lo è anche  $\psi \circ \varphi$
- 2) Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono entrambe suriettive, lo è anche  $\psi \circ \varphi$
- 3) Se  $\varphi$  e  $\psi$  sono entrambe biconicode, lo è anche  $\psi \circ \varphi$

- dimo. 1)  $\varphi$  iniettiva  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X \text{ e } x_1 \neq x_2 : \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$  (58)
- $\psi$  iniettiva  $\Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in Y \text{ e } y_1 \neq y_2 : \psi(y_1) \neq \psi(y_2)$
- Allora  $\forall x_1, x_2 \in X$   $x_1 \neq x_2 : \psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2)) \Rightarrow$   
 Dunque  $\psi \circ \varphi$  è iniettiva.
- 2)  $\varphi$  suriettiva  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X \text{ t.c. } \varphi(x) = y$
- $\psi$  suriettiva  $\Leftrightarrow \forall z \in Z \exists y \in Y \text{ t.c. } \psi(y) = z$
- Allora: sia  $z \in Z$ : poiché  $\psi$  è suriettiva  $\exists y \in Y$  t.c.  
 $\psi(y) = z$  e " " $\varphi$  " " $\exists x \in X$  t.c.  
 $\varphi(x) = y$ , cioè esiste  $x \in X$  t.c.  $\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = z$ .  
 Dunque  $\psi \circ \varphi$  è suriettiva.  $\blacksquare$

C'è essere interessante notare che non basta supporre che solo una delle due applicazioni sia iniettiva (risp. suriettiva) per avere una composta iniettiva (risp. suriettiva).

Ader. sia

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\varphi(x) = x^2$  (né iniettiva né suriettiva)

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\psi(x) = x^3$  (biunivoca)

$\psi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e'  $\psi(x^2) = (x^2)^3 = x^6$  (né iniettiva né suriettiva)

$\varphi \circ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e'  $\varphi(x^3) = (x^3)^2 = x^6$  (idee!)

Tuttavia, visto che la composizione di due applicazioni biunivoche è biunivoca, si ha, in particolare, che  
la composizione di due permutazioni di un insieme  $X$  di ordine  $n$  è ancora una permutazione di  $X$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

di solito qui si parla di PRODOTTO.

A pag 49 si è visto che non sempre (59)

$\varphi^T(y)$  è formato da 1 o 2 elementi.

Quindi in generale  $\varphi^T = \{(y, x) \in Y \times X \mid y = \varphi(x)\}$

NON È una applicazione, per almeno 1 delle due ragioni

- c'è più di un elemento in relazione  $\varphi^T$  a un  $y$  fisso
- c'è qualche  $y$  che non è in relazione  $\varphi$  ad alcun  $x \in X$  (e quindi, anche se per tutti gli altri  $y \in Y$  ci fosse 1 solo corrispondente in  $X$ , il **DOMINIO** di questa applicazione non sarebbe  $Y$ ).

Se  $\varphi^T$  è una applicazione da  $Y$  a  $X$ , la chiameremo applicazione inversa di  $\varphi$  e la denoteremo con  $\varphi^{-1}$ ; diremo anche che  $\varphi$  è una applicazione invertibile.

Attenzione: se  $\varphi$  è invertibile

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = I_X \quad e \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = I_Y$$

Infatti, se  $\varphi^T$  è una funzione,  $\forall y \in Y$  c'è 1 e 1 sol  $x \in X$  che è in relazione  $\varphi$  a  $y$ , cioè tale che  $y = \varphi(x)$ . Quindi

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(y) = x \quad \forall x \in X$$

$$e \quad \varphi(\varphi^{-1}(y)) = \varphi(x) = y \quad \forall y \in Y. \blacksquare$$

Vediamo anche su un esempio e con l'aiuto delle matrici di incidenza. Sia  $X = \{1, 2, 3\}$   $Y = \{a, b, c\}$  e sia  $\varphi(1) = b$ ,  $\varphi(2) = c$ ,  $\varphi(3) = a \Rightarrow M_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$$M_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{I_X}$$

$$M_{\varphi \circ \varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{I_Y}$$

OSS. Un'applicazione  $\varphi: X \rightarrow Y$  è invertibile se e solo se è biunivoca (60)

Dim. Sia  $\varphi$  invertibile

- 1) se  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  anche  $\varphi^{-1}(\varphi(x_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(x_2))$ cioè  $x_1 = x_2$ :  $\varphi$  è iniettiva
- 2) se  $y \in Y$  considero  $x = \varphi^{-1}(y)$  allora $\varphi(x) = \varphi(\varphi^{-1}(y)) = y$ cioè ogni elemento di  $Y$  ha preimmagine: $\varphi$  è suriettiva.

Quindi  $\varphi$  è biunivoca.

Viceversa, sia  $\varphi$  biunivoca

- 1) per la suriettività  $\varphi^T(y) \neq \emptyset$  per ogni  $y \in Y$
- 2) per l'iniettività  $\varphi^T(y)$  non contiene più di un elemento.

Quindi  $\varphi^T$  è un'applicazione da  $Y$  a  $X$  e quindi  $\varphi$  è invertibile.  $\blacksquare$

Le applicazioni biunivoche di un insieme  $X$  in se stessa vengono dette trasformazioni di  $X$ : il loro insieme sarà indicato con  $S_X$ . Abbiamo finora visto che:

- la composizione di due trasformazioni  $\in S_X$  è una trasformazione
- la composizione è associativa
- c'è una trasformazione neutra rispetto alla composizione:  $I_X$  (non verificata ma è ovvio: $\forall x \in X, (\varphi \circ I_X)(x) = \varphi(x) \wedge (I_X \circ \varphi)(x) = I_X(\varphi(x)) = \varphi(x)$ )
- ogni trasformazione  $\varphi$  è dotata di inversa  $\varphi^{-1}$  rispetto alla composizione.

Ricorda qualcosa?

Ricorda quanto visto per

- gli interi  $\mathbb{Z}$  (con l'operazione +, neutro 0, opposto ...)
- i reali non nulli  $\mathbb{R}^*$  (con l'operazione  $\cdot$ , neutro 1, reciproco) o i complessi non nulli  $\mathbb{C}^*$  (come sopra)
- le matrici  $m \times n$  su  $\mathbb{R}$  (con l'operazione + ecc.)
- i polinomi  $\mathbb{R}[x]$  (con l'operazione + ecc.)

Sono tutti esempi di strutture algebriche che chiameremo GRUPPI.

Ma, al contrario di quel che succede in questi esempi di GRUPPO, in  $S_x$  non vale la proprietà COMMUTATIVA:

esistono  $\varphi, \psi \in S_x$  t.c.  $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ .

Esempio.  $S_x = S_3$  permutazioni sull'insieme  $X = \{1, 2, 3\}$  di ordine 3.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad \varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} : \text{sono } \neq.$$

(61)

Un'indebolimento della nozione di funzione inversa è dato dalla seguente

DEF. Dico che  $\psi: Y \rightarrow X$  è INVERSA SINISTRA  
di  $\varphi: X \rightarrow Y$  se  
 $\psi \circ \varphi = I_X$ .

Un'altro dato

DEF. Dico che  $\psi: Y \rightarrow X$  è INVERSA DESTRA di  
 $\varphi: X \rightarrow Y$  se  
 $\varphi \circ \psi = I_Y$

OSS. La funzione ammette inversa sinistra se  
e solo se è iniettiva; ammette inversa destra  
se e solo se è suriettiva

Ovviamente se  $\psi$  è inversa sinistra di  $\varphi$ ,  
 $\psi$  è inversa destra di  $\varphi$  e viceversa.

Ancora: ogni funzione invertibile è dotata di  
inversa destra e di inversa sinistra e  
le due coincidono

Esempio

$X = \mathbb{R}[x] = Y$ : pensati come funzioni di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  sono  
continue e derivabili in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Per ogni  $p(x) \in X$  definisco  $\varphi(p(x)) = \int_0^x p(t) dt$   
e per ogni  $q(x) \in Y$  definisco  $\psi(q(x)) = q'(x)$ .

Per il T. fondamentale del calcolo:  $\psi \circ \varphi(p(x)) = p(x)$   
(la derivata della funzione  $\int_0^x p(t) dt$  è  $p(x)!$ ) quindi  $\psi$  è  
inversa sinistra di  $\varphi$ . Ma non è inversa destra di  $\varphi$ :  
 $\varphi \circ \psi(q(x)) = \varphi(q'(x)) = \int_0^x q'(t) dt = q(x) - q(0) \neq q(x)$  se  $q(0) \neq 0$ .

Dim dell'oss.

(61  
bis)

- ① Sia  $\varphi: X \rightarrow Y$  dotata di inversa sinistra  
 $\psi: Y \rightarrow X$  t.c.  $\psi \circ \varphi = I_X$

Allora  $\varphi$  è iniettiva perché:

$\forall x_1, x_2 \in X$ , se  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  anche

$$\psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2)) \text{ cioè}$$

$$I_X(x_1) = I_X(x_2) \text{ cioè}$$

$$x_1 = x_2.$$

- ② Sia  $\varphi: X \rightarrow Y$  iniettiva (ma non necessariamente suriettiva) e quindi  $|\varphi^T(y)| \leq 1 \quad \forall y \in Y$ .  
Se  $|\varphi^T(y)| = 1$ ,  $y$  proviene da uno e un solo  $x \in X$  e a  $y$  posso associare ESATTAMENTE quell' $x$ .

Se  $|\varphi^T(y)| = 0$ ,  $y$  non è l'immagine di alcun  $x$  mediante  $\varphi$ , ma posso fissare un  $x_0 \in X$  e associare a tutti questi  $y$  tale  $x_0$ .

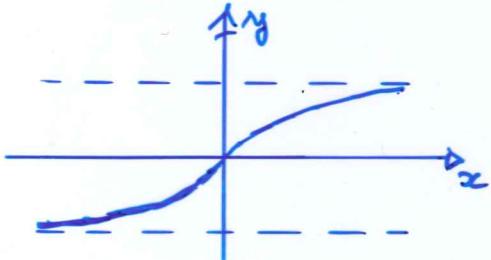
Così ho definito  $\psi: Y \rightarrow X$

$$\psi(y) = \begin{cases} x & \text{se } y = \varphi(x) \\ x_0 & \text{se non esiste alcun } x \text{ t.c. } y = \varphi(x) \end{cases}$$

che è una applicazione t.c.

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) = x \quad \forall x \in X$$
  
e quindi è la inversa sinistra di  $\varphi$ . ■

Esempio. Sia  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\varphi(x) = \arctan x$ .



Si ha  $\varphi(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$  e quindi  $\varphi$  è iniettiva ma non suriettiva. Posso costruire così la sua inversa sinistra!

$$\psi(y) = \begin{cases} \tan y & \text{se } y = \arctan x \text{ per qualche } x \\ 0 & \text{se } y \notin (-\pi/2, \pi/2) \end{cases}$$

$$\text{e } \psi(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

③ sia  $\varphi$  dotata di inversa destra  $\psi: Y \rightarrow X$  (61  
ter)

t.c.  $\varphi \circ \psi = I_Y$ .

Allora  $\varphi$  è suriettiva poiché

$\forall y \in Y$ , l'elemento  $\psi(y) \in X$  è tale che

$$\varphi(\psi(y)) = \varphi \circ \psi(y) = y$$

cioè  $y$  ha come preimmagine almeno  $\psi(y)$ .

④ Se  $\varphi: X \rightarrow Y$  è suriettiva posso definire una applicazione  $\psi: Y \rightarrow X$  associando a ogni  $y \in Y$  una (e una sola) delle preimmagini di  $y$ . In questo modo

$$\varphi \circ \psi(y) = \varphi(\psi(y)) = y$$

per definizione di preimmagine, cioè  $\psi$  è inversa destra di  $\varphi$ . ■

Esempio. Sia  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  definita da

$$\varphi(x) = \sin x.$$

L'applicazione  $\varphi$  è suriettiva ma non iniettiva.

Per ogni  $y \in [-1, 1]$  scelgo  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  in modo che  $y = \sin x$ :

$$\psi(y) = \arcsin y.$$

Questa è inversa destra di  $\varphi$ : infatti

$$\varphi \circ \psi(y) = \sin(\arcsin y) = y.$$

# ESERCIZI

(62)

1. Siano  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c\}$ ,  $Z = \{x, y\}$ .

A)  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & c \end{pmatrix}$  è un'applicazione da  $X$  a  $Y$ ?

E  $\varphi^T$  è applicazione da  $Y$  a  $X$ ?

B)  $\psi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$  è un'applicazione da  $Y$  a  $Z$ ?

C) descrivere la relazione  $\psi \circ \varphi$  e dire se è una applicazione da  $X$  a  $Z$ .

D)  $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & a & a \end{pmatrix}$ ,  $S = \{(x, 1), (x, 2)\}$ ,

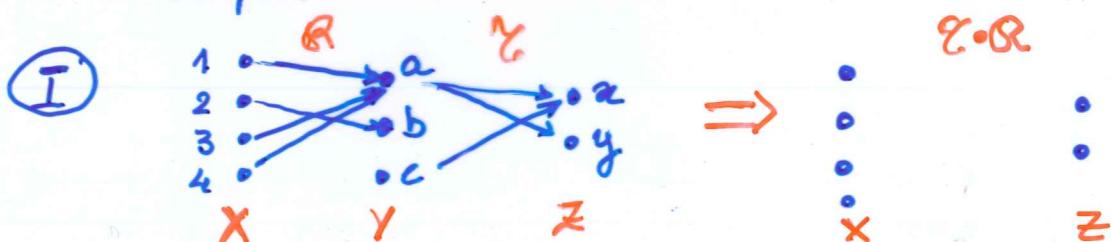
$\tau = \{(a, x), (a, y), (c, x)\}$  sono relazioni:

- tra quali insiemni?
- una o più di esse sono applicazioni?
- trovare le relazioni composte:

$\tau \circ R$ ,  $R^T \circ \tau$ ,  $S \circ R$ ,  $R \circ R^T$ ,  $R^T \circ R$ ,

eventualmente aiutandosi con le frecce di corrispondenza o le matrici di incidenza,  
e dire quali insiemni corrispondono e se sono appl.

Esempio:



(II)  $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_{\tau^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\tau^T \circ R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ?$

2. Siano  $X = Y = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e sia

(63)

$$R = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq X \times X$$

A)  $R$  è una applicazione da  $X$  a  $X$ ?

- Se sì è suriettiva e/o iniettiva?

- Se no quale condizione cede?

B) Descrivere  $\text{R} \circ R$

C) Descrivere  $R^T$

D) È vero che la relazione  $I_X$  è contenuta in  $R$ ?

Sia ora  $S = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

ove il prodotto delle 2 matrici è RIGHE  $\times$  COLONNE.

Rispondere alle domande precedenti sostituendo  $S$  a  $R$ . Inoltre rispondere a

E) È vero che  $S \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = S \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)$ ?

Come è fatto l'insieme  $S \circ f \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ?

3. Siano  $X = Y = \mathbb{Z}$  e sia  $R = \{(a, a^2 + 1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

Rispondere alle domande A, B, C dell'es. 2 in questo caso.

Ripetere poi l'esercizio sostituendo  $X = Y = \mathbb{N}$ .

4. Siano  $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ ,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

A) quali delle suddette rel. di  $X$  in re sono applicazioni?

B)  $\varphi$  è suriettiva?

C) trovare  $\varphi^T \circ \varphi$ ,  $\varphi \circ \varphi^T$ ,  $\psi^T \circ \psi$ ,  $\psi \circ \psi^T$   
 $\varphi \circ \varphi$ ,  $\psi \circ \psi$

2) A. Si:  $R \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$  è un insieme formato da 1 e 1 sol. elem.  
quindi  $R$  è una applicazione di  $X$  in  $X$  (63 bis)

- Ma  $R$  non è suriettiva poiché ad es. la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  non ha la forma  $\begin{pmatrix} a^2 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = R \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$
- e  $R$  non è iniettiva poiché ad es.  $R \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) = R \left( \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right)$

B.  $R \circ R \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) = R \left( \begin{matrix} a^2 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} a^4 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right) \quad \forall \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) \in X$

C.  $R^T = \left\{ \left( \begin{matrix} a^2 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} a^2 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} -a & b \\ c & d \end{matrix} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

D.  $I_X \notin R$  poiché non è vero in generale che  $\left( \begin{matrix} a^2 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$

A. Si:  $S \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix} \right)$  è un insieme formato da 1 sol. el.  
(fissate le matrici di partenza)  $\Rightarrow$   
S è una applicazione di  $X$  in  $X$ .

- Ma S non è suriettiva, poiché ad es. la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  non ha la forma  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$
- e S non è iniettiva poiché ad es.  $S \left( \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right) = S \left( \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

B.  $S \circ S \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) = S \left( \begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{cioè } S \circ S = S.$

C.  $S^T = \left\{ \left( \begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

D.  $I_X \notin S$  poiché non è vero in generale che  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

E. È vero che  $S \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = S \left( \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right)$  e in generale  
 $S^T \circ S \left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\}, c, d \in \mathbb{R}\}$

3) A. Si:  $R(a) = a^2 + 1$  è un insieme formato da 1 e 1 sol. numero l'intero  
e quindi è una applicazione di  $\mathbb{Z}$  a  $\mathbb{Z}$  (lo stesso  
valle se  $X = \mathbb{N}$ )

- Ma  $R$  non è suriettiva poiché ad es. non esiste  $a \in \mathbb{Z}$  t.c.  $a^2 + 1 = 3$   
(lo stesso vale se  $X = \mathbb{N}$ )

e  $R$  non è iniettiva poiché  $R(1) = 2 = R(-1)$  : se  $X = \mathbb{N}$  si vede  
che non è iniettiva.

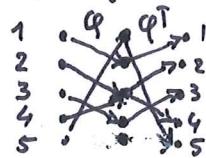
B.  $R \circ R(a) = R(a^2 + 1) = (a^2 + 1)^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 2$  : sempre fuori da  $X$ .

C.  $R^T = \{ (b, a) \mid b = a^2 + 1, a \in \mathbb{Z} \}$  : idem salvo  $a \in \mathbb{N}$  nell'altro caso.

4) A.  $R = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5) \}$  non è un'applicazione di  $X$  in  $X$  perché non  
ogni elem. di  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ha corrispondente. Tuttavia  $\varphi$  e  $\psi$  sono  
app. di  $X$  in  $X$  poiché ogni elem. di  $X$  ha 1 e 1 sol corrispondente.

B.  $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  non è suriettiva poiché nessun elem. ha 5 corrispondenti

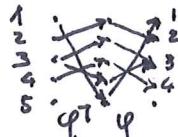
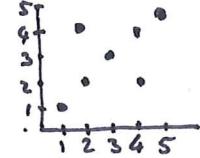
C.  $\varphi^T = \{ (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (1, 5) \}$  non è una applicazione



$$\varphi \circ \varphi^T = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \} ; \varphi^T \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^T = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \}$$

è antisimmetrica

$$\text{poiché } (\varphi \circ \varphi^T) \cap (\varphi^T \circ \varphi) \subseteq I_X$$



$$\varphi \circ \varphi^T = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \} ; \varphi^T \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^T = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) \} = \varphi \circ \varphi$$

$$\varphi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$