

Relazioni di equivalenza su un insieme X

(48)

Ricordiamo:

DEF. $R \in P(X \times X)$ è detto relazione di equivalenza su X se è

- riflessiva: " $\forall x \in X, (x,x) \in R$ ", cioè $I_X \subseteq R$
- simmetrica: " $\forall (x,y) \in R, (y,x) \in R$ " cioè $R = R^T$
- transitiva: " $\forall x,y,z \in X : (x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ " cioè $R \circ R \subseteq R$.

e se $(x,y) \in R$ diremo che x e y sono equivalenti rispetto alla relazione R .

L'insieme $R(a)$ degli elementi di X equivalenti ad a è detto classe di equivalenza individuato dall'elemento a e talora denotata con $[a]_R$:

$$[a]_R = \{x \in X \mid (a,x) \in R\} = R(a).$$

TEOREMA 1. Sia R una rel. di equivalenza su X . Allora

1. $\forall a \in X, a \in R(a)$
2. $\forall a, b \in X, (a,b) \in R \Rightarrow R(a) = R(b)$
3. $\forall a, b \in X, (a,b) \notin R \Rightarrow R(a) \cap R(b) = \emptyset$

Dim. 1. Per la prop. riflessiva $(a,a) \in R \Rightarrow a \in R(a)$

2. $\boxed{(a,b) \in R} \Rightarrow R(b) \subseteq R(a)$. Infatti:

$$x \in R(b) \Leftrightarrow (b,x) \in R \Rightarrow (\text{pr. TRANSITIVA}) (a,x) \in R \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in R(a).$$

Ora: $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$ (pr. SIMMETRICA) e ripetendo i passaggi a ruoli scambiati si ha $R(a) \subseteq R(b)$ e quindi $R(a) = R(b)$.

SIPROVA 3. Sia $x \in R(a) \cap R(b)$ cioè $(a,x) \in R$ e $(b,x) \in R$.
LA CONTRONOMINALE $\Rightarrow (x,b) \in R$ (pr. SIMM.) $\Rightarrow (a,b) \in R$ (pr. TRANS.).

La dim. di 3. dice che se, in particolare, $R(a) = R(b)$ allora $(a, b) \in R$. Mettendo insieme questa osservazione e 2. si ha il:

LEMMA Per ogni rel. di equivalenza su X

$$(a, b) \in R \iff R(a) = R(b).$$

e una classe di equivalenza è individuata da un suo elemento qualiasi.

Importante: se R è una rel. di equivalenza su X ogni elem. $x \in X$ è in relazione R con qualche elemento (almeno coi se stessi!) e quindi appartiene ad almeno 1 classe di equivalenza.

Il punto 3. del teorema dice che può appartenere a 1 sola classe di equivalenza.

→ Quindi le classi di equivalenza realizzano una partizione di X ore

DEF. Sia X un insieme e sia $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottinsiemi (anche non finite) di X . Dico che $\{A_i\}$ è una partizione di X se

1. $A_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j$
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

Esempio: $X = \{a, b, c, d, e\}$

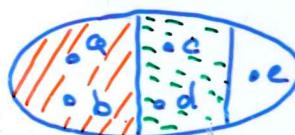
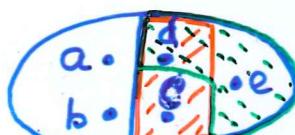
1) $A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d\}, A_3 = \{d, e\}$

non partizione: $A_2 \cap A_3 = \{d\}$

2) $A_1 = \{a, b\}, A_2 = \{c, d\}$

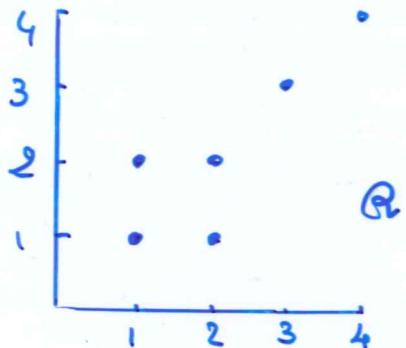
non partizione: $e \notin A_i$ per alam i

3) $A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, A_3 = \{c, d, e\}$: PARTIZIONE!



Mostriamo su due esempi concreti come trovare la partizione a partire da una relazione di equivalenza su X (80)

ES. 1 $X = \{1, 2, 3, 4\}$



$$R(1) = \{1, 2\}$$

$$R(2) = \{1, 2\} = R(1)$$

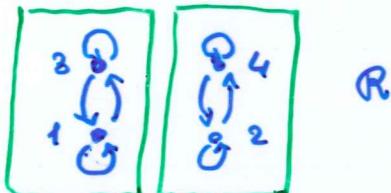
inutile calcolarlo perché ...

$$R(3) = \{3\}$$

$$R(4) = \{4\}$$

- Gli insiemi $R(1)$, $R(3)$, $R(4)$ sono tutti vuoti (infatti ognuno contiene almeno l'elemento che individua la classe di equivalenza)
- $R(1) \cap R(3) = \emptyset$, $R(1) \cap R(4) = \emptyset$, $R(3) \cap R(4) = \emptyset$
- $R(1) \cup R(3) \cup R(4) = \{1, 2\} \cup \{3\} \cup \{4\} = X$

ES. 2 $X = \{1, 2, 3, 4\}$



$$R(1) = \{1, 3\}$$

$$R(2) = \{2, 4\}$$

- $R(1) \neq \emptyset \neq R(2)$
- $R(1) \cap R(2) = \emptyset$
- $R(1) \cup R(2) = X$

Sul grafo orientato le classi di equivalenza sono costituite dagli elementi che sono tra loro collegati da frecce.

ATTENZIONE. Sia R una qualunque relazione su X . Posso verificare se R è una relazione di equivalenza su X verificando se la collezione $\{R(a), a \in X\}$ è una partizione di X , poiché vale anche il teorema INVERSO del precedente:

TEOR 3. Sia $\{A_i\}$ una partizione di X . La relazione (81)
 R su X definita da

$$(x, y) \in R \iff \exists A_i \text{ che contiene } x \text{ e } y$$

è una relazione di equivalenza su X , le cui classi di equivalenza sono gli A_i .

Dim. 1) Se $\{A_i\}$ è una partizione ogni $x \in X$ sta in un A_i

$$\Rightarrow (x, x) \in R$$

2) Se $(x, y) \in R \exists A_i$ che contiene x e y (ORDINE DEI 2 ELEMENTI INESSENZIALE!) $\Rightarrow (y, x) \in R$

3) Se $(x, y) \in R \exists A_i$ che contiene x e y ;

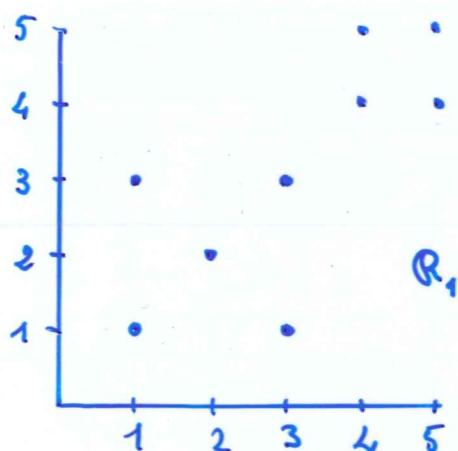
se $(y, z) \in R \exists A_j$ che contiene y e z :

$$\text{quindi } y \in \underline{A_i \cap A_j} \Rightarrow A_i = A_j$$

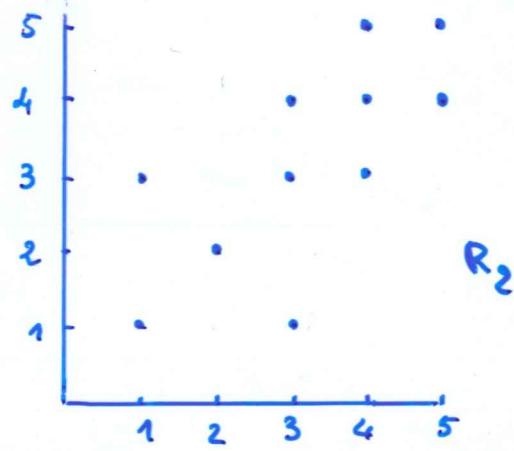
NON VUOTO!

Dunque A_i contiene x e $z \Rightarrow (x, z) \in R$. ■

ESEMPIO. Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e siano R_1 e R_2 le due relazioni su X rappresentate qui sotto



R_1



R_2

Senza verificare la proprietà TRANSITIVA posso dire che:

R_1 è una rel. di equivalenza
 poiché

$$R_1(1) = \{1, 3\} = R_1(3), R_1(2) = \{2\}$$

$$R_1(4) = \{4, 5\} = R_1(5)$$

è una partizione di X .

USO IL TEOR. 3

R_2 non è una rel. di equiv.
 poiché

$$R_2(1) = \{1, 3\}, R_2(2) = \{2\},$$

$$R_2(3) = \{1, 3, 4\}, R_2(4) = \{3, 4, 5\},$$

$R_2(5) = \{4, 5\}$ non è una partiz.
 USO la contrarom. del TEOR. 2

Riassumendo:

- il teor. 2 dice che ogni rel. di equivalenza su X determina una partizione di X (in classi di equivalenza)
- il teor. 3 dice che ogni partizione di X determina una rel. di equivalenza su X (le cui cl. di equiv. sono i sottousv. della partiz.) e i due teoremi insieme dicono che parlare di rel. di equivalenza su X o di partizioni di X è "la stessa cosa".

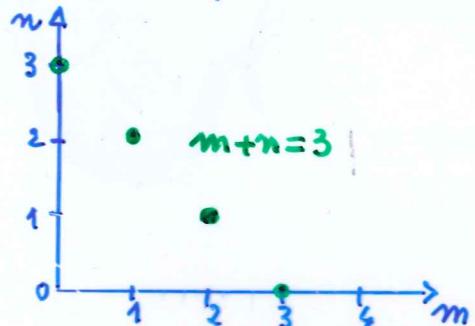
Esercizio 1. Su $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si considerino i sottousv.:

$$A_c = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m+n=c\}, \quad c \in \mathbb{N}$$

La collezione

$$\{A_c, c \in \mathbb{N}\}$$

è una partizione di X ?



Come è definita la relazione di equivalenza corrispondente?

Esercizio 2. Su $X = \mathbb{C}$ si consideri la relazione \mathcal{R}

$$(z, w) \in \mathcal{R} \iff |z| = |w|$$

È una relazione di equivalenza? Se sì quali sono le classi di equivalenza?

E la relazione \mathcal{S} definita da $(z, w) \in \mathcal{S}$ se e solo se z e w hanno lo stesso argomento principale è una relazione di equivalenza su \mathbb{C} ?

Svolgimento Es. 1

Sia $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $A_c = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m+n=c\}$, $c \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ad es. } A_0 = \{(m, n) \mid m+n=0\}$$

$$A_1 = \{(m, n) \mid m+n=1\}$$

$$A_2 = \{(m, n) \mid m+n=2\} \text{ ecc.}$$

$\{A_c, c \in \mathbb{N}\}$ è una partizione perché:

- ogni $(m, n) \in A_c$ con c opportuno.
basta sommare le 2 coordinate. Ad es.

$$(3, 4) \in A_7$$

Ciò significa $\bigcup_{c \in \mathbb{N}} A_c = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- Se $c_1 \neq c_2$ $A_{c_1} \cap A_{c_2} = \emptyset$: infatti

$$\text{se } (m, n) \in A_{c_1} \quad m+n=c_1$$

$$\text{se } (m, n) \in A_{c_2} \quad m+n=c_2$$

e se $(m, n) \in A_{c_1} \cap A_{c_2}$

$$m+n = \boxed{c_1 = c_2}$$

Ne segue che la relazione R

$$(m, n) R (m', n') \Leftrightarrow m+n = m'+n'$$

è una relazione di equivalenza.

(infatti significa che $(m, n) \in (m', n')$ appartengono allo stesso sottoinsieme A_c)

Svolgimento es. 2

(ter 82)

$$x = \mathbb{C} \quad (z, w) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = |w|$$

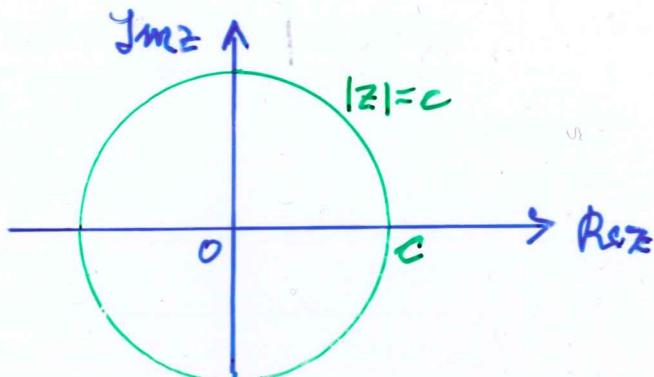
è rel. di equivalenza. Infatti:

1. $|z| = |z| \Rightarrow (z, z) \in \mathbb{R}$ RIFL.
2. $\{|z| = |w| \Rightarrow |w| = |z|\} \Rightarrow$ SIMM,
3. $\{|z| = |w| \text{ e } |w| = |v| \Rightarrow |z| = |v|\} \Rightarrow$ TRANS.

Ricordare che $|z|, |w|, |v|$ sono numeri reali > 0 sui quali l'uguaglianza ha le 3 proprietà!

Le classi di equivalenza sono date da

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = c \text{ costante} > 0\}$$

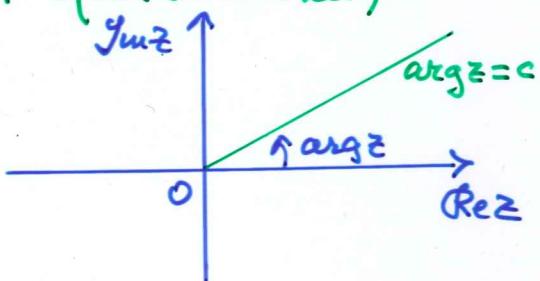


e quindi circonference concentriche in $(0,0)$ e raggio c , se si pensa alle rappresentazioni nel piano di Argand-Gauss.

Invece $(z, w) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \arg z = \arg w$ non è rel. di eq. su \mathbb{C} poiché $\arg 0$ non è definito!

Lo è su \mathbb{C}^* (anche qui la verifica segue dal fatto che $\arg z \in (-\pi, \pi]$ è un numero reale e l'uguaglianza in \mathbb{R} è rel. di equivalenza)

Le classi di equivalenza sono le semirette uscenti dall'origine



DEF. Sia R una relazione di equivalenza su X . (83)

L'insieme che ha come elementi le classi di equivalenza di X rispetto a R è detto insieme quoziente di X rispetto a R e indicato con $\frac{X}{R}$:

$$\frac{X}{R} = \{ R(a), a \in X \}$$

Per quanto visto nel TEOR.1, l'elemento a che denota la classe di equiv. $R(a)$ è uno qualunque degli elementi della classe di equivalenza.

ESEMPIO1. Nell'ins. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ consideriamo

la relazione $((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \in R \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$

R è una relazione di equivalenza

RIFLESS. e SIMMETR. sono evidenti

TRANSITIVA: $(m_1, n_1) R (m_2, n_2) \iff m_1 n_2 = m_2 n_1$

$(m_2, n_2) R (m_3, n_3) \iff m_2 n_3 = m_3 n_2$

$$\Rightarrow m_1 n_2 n_3 = m_2 n_1 n_3 = m_3 n_2 n_1$$

(SEMPLIFICO): $m_1 n_3 = m_3 n_1 \Rightarrow (n_1, m_1) R (n_3, m_3)$.

$\frac{X}{R}$ è formato dalle classi di equivalenza

$$R((m, n)) = \{ (km, kn) , k \in \mathbb{N}^*, \text{MCD}(m, n) = 1 \}$$

... cioè dalle classi di frazioni equivalenti \Rightarrow

$\frac{X}{R}$ è l'insieme dei numeri razionali non negativi.

ESEMPIO2. Nell'esempio dell'es. 2 pag. 82, $\frac{\mathbb{F}}{R}$ è costituito dall'insieme delle circonferenze con centro in $(0,0)$ e raggio variabile comunque.

ESEMPIO3. Nell'insieme X delle rette del piano la relaz.

R di parallelismo è una rel. di equivalenza.

L'insieme quoziente $\frac{X}{R}$ è dato dall'insieme delle direzioni delle rette $\{(cos\theta, sin\theta)\}_{\theta \in [-\pi, \pi]}$.

Da esempio 1.

Sia $m = 2, n = 5$

$$R((2,5)) = \{ (m,n) \mid 2n = 5m \}$$

poiché $\text{MCD}(2,5)=1$

$$2|5m \Rightarrow 2|m$$

$$\stackrel{e}{5}|2n \Rightarrow 5|n$$

$$\Rightarrow m = 2k$$

$$n = 5k$$

$$= \{ (m,n) = (2k,5k), k \in \mathbb{Z} \}$$

Sia $m = 6, n = 8$

$$R((6,8)) = \{ (m,n) \mid 6n = 8m \} =$$

$$= \{ (m,n) \mid 3m = 4n \}$$

$\text{MCD}(3,4)=1$

$$\text{ecc. } \begin{aligned} m &= 4k & k \in \mathbb{Z} \\ n &= 3k \end{aligned}$$

$$= \{ (3k,4k), k \in \mathbb{Z} \}$$

Allora $R((2,5)) = \frac{2}{5}$ inteso come numero razionale
cioè classe di tutte le
frazioni equivalenti a $\frac{2}{5}$

$$R((6,8)) = \frac{3}{4} \dots$$

e quindi $\frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}{R} = \mathbb{Q}^+$.

Nell'esempio 1, avendo in mente il modello, è stato naturale scegliere come elemento a "rappresentante della classe d'equivalenza $R(a)$ " una "frazione ridotta ai minimi termini". In generale si cerca di scegliere un rappresentante semplice; ad es. nell'es. 2 potremmo denotare la classe di equivalenza dei numeri complessi che hanno modulo 2 come $R(2)$, visto che $z=2$ ha modulo 2.

Nell'esempio 3 potremmo denotare la classe delle rette che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con l'asse x come l'insieme delle rette parallele alla retta passante per l'origine di equazione $y = \sqrt{3}x$.

In certi casi non ci sono motivi per scegliere un rappresentante invece di un altro.

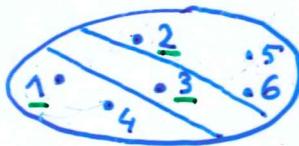
Ad es. se $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e R la relazione associata alla partizione $A_1 = \{1, 4\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{2, 5, 6\}$, non ci sono motivi per scegliere di denotare la classe di equivalenza A_1 con $R(1)$ piuttosto che con $R(4)$. Quindi posso scelgere:

$$\frac{X}{R} = \{A_1, A_2, A_3\} = \{R(1), R(3), R(2)\} = \{R(4), R(3), R(5)\}$$

$$= \dots$$

L'importante è scegliere rappresentanti per ogni classe e in classi distinte. Ad es.

$$\frac{X}{R} \neq \{R(1), R(4), R(3)\}$$



Molta attenzione va prestata specialmente se si decide (come si fa talora con un abuso di notazione) di identificare la classe con il suo rappresentante:

$$\frac{X}{R} = \{1, 2, 3\}$$

EVITARLO

Prima di passare a un esempio molto significativo di insieme quoziente, due esempi banali:

84
(bis)

- se R è la relazione identica su X , I_X , si ha

$$\frac{X}{I_X} = \{ \{x\}, x \in X \}$$

insieme che di solito si identifica con X , anche se c'è la stessa differenza, tra X e $\frac{X}{I_X}$, che c'è tra il considerare

un cesto contenente un certo numero di biglie

e

un cesto contenente lo stesso numero di scatoline ciascuna contenente una delle biglie di cui sopra

... se le scatoline non sono trasparenti, nel cesto io vedo le scatoline, non le biglie.

- se R è la relazione universale X^2 , $\frac{X}{R}$ è costituito da un unico elemento

$$\frac{X}{R} = \{ X \}$$

... nell'analogia delle biglie, è come se nel cesto avessi messo un'unica scatola contenente tutte le biglie.