

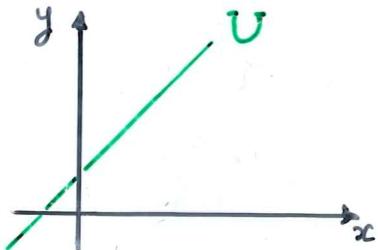
4. SOTTOSPAZI VETTORIALI

(ALS2)

DEF. Sia V un sottoinsieme non vuoto di uno sp. vettoriale V . Dico che U è un sottospazio vettoriale di V se U è uno sp. vettoriale rispetto alle stesse operazioni definite in V : in particolare deve essere uguale il campo degli scalari.

ESEMPI.

- 1) V e $\{0\}$ sono due sottospazi di V ... sottospazi banali
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ lo sp. vett. dei polinomi di grado $\leq n$ $\mathbb{R}_n[x]$ è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}[x]$;
 $\forall k \leq n$: $\mathbb{R}_k[x]$ è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}_n[x]$.
- 3) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- 4) L'insieme $U = \{(t, 1+t), t \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbb{R}^2$?



Se moltiplico un vettore di U , ad es. $\underline{u} = (0, 1)$ per un numero reale, ad es. 2, ottengo ancora un vettore del tipo $(t, 1+t)$?
 $2 \underline{u} = (0, 2) \neq (0, 1+0)$ No!

Non è un sottospazio vettoriale poiché non è chiuso rispetto alle 2 operazioni introdotte in \mathbb{R}^2 .

- 5) Siano \mathbb{Q} i numeri razionali e \mathbb{Q}^2 le coppie ordinate di razionali. \mathbb{Q}^2 è un sp. vett. su \mathbb{Q} ma non è un ssp. vett. di \mathbb{R}^2 perché non è chiuso rispetto al prodotto per tutti i numeri reali (anche non razionali): $\sqrt{2}(1, 0) = (\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ ma non sta in \mathbb{Q}^2 .

PROP. 1 Sia $U \neq \emptyset$ sottoins. dello sp. rett. reale V (AL 53)

U è sottosp. rett. di V se e solo se valgono entrambe le condizioni

- 1) $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U : \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$ chiusura risp. +
- 2) $\forall k \in \mathbb{R} \quad \forall \underline{u} \in U : k\underline{u} \in U$ chiusura risp. al prodotto per scalare

DIM. Se è ssp. di V valgono 1) e 2) per def.

Viceversa:

(1) garantisce S1

- S2, S3 valgono in particolare per i vettori di U
- poiché $U \neq \emptyset$ esiste $\underline{u} \in U$ e per (2) : $0\underline{u} \in U$ cioè $\underline{0} \in U$: $\underline{0}$ si comporta come neutro nella somma con qualunque vettore di V , in particolare quelli di U : S4
- per ogni $\underline{u} \in U$, per (2) si ha $(-1)\underline{u} \in U$, cioè $-\underline{u} \in U$: quindi ogni $\underline{u} \in U$ ha opposto; S5

(2) garantisce P1.

P2, P3, P4, P5 valgono per tutti i vettori di V , in particolare per quelli di U .

c.v.d.

PROP. 2. $U \neq \emptyset$, $U \subseteq V$ sp. rett. su \mathbb{R} .

U sottosp. rett. di $V \iff \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ si ha $k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2 \in U$.

DIM. Per la prop. 1 se U è ssp. rett. di V si ha $k_1 \underline{u}_1 \in U$, $k_2 \underline{u}_2 \in U$ e quindi $k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2 \in U$.

Viceversa se $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U : k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2 \in U$

- prendendo $k_1 = k_2 = 1$, per P5 ho

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$$

- prendendo $k_1 = k$, $\underline{u}_1 = \underline{u}$, $k_2 = 0$, essendo $0 \cdot \underline{u}_2 = \underline{0}$, ho $k \underline{u} \in U$.

c.v.d.

Si può usare una qualunque delle 2 precedenti prop.
per verificare se U è ssp. di V :

- la 1^a è molto adatta se si pensa che U non sia un sottospazio (basta verificare che non valgono delle 2 condizioni e certamente non è un SSp.)
- la 2^a è spesso comoda quando si pensa che U sia un sottospazio.

E' opportuno anche osservare che se U è un sottospazio certamente contiene lo 0 di V :
quindi se sospetto che U non sia un sottospazio posso provare a vedere se 0 non sta in U : nell'es. 4 pag AL 52 questa verifica avrebbe abbreviato i conti.

ESERCIZI. Sia $V = M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$. Stabilisce se sono sottospazi di V i seguenti sottinsiemi:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \mid z = 0 \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, \mid y = 3x \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, \mid 2x + z = 1 \right\}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, \mid z = y^2 \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, \mid x = 0 \text{ oppure } y = 0 \right\}$$

Sol:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ per forza che } A \text{ è un SSp vett. di } V$$

per giurie che A è un SSp vett. di V
considero le possibili comb. lin di 2 vettori di A mediante $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ay_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx_2 \\ by_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ay_1 + by_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quale $\in A$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in A \Rightarrow A$ ssp. vett. di V

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, y = 3x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Verifichiamo che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se $\begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ allora

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in B.$$

!!

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ 3(ax_1 + bx_2) \\ az_1 + bz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ 3(ax_1 + bx_2) \\ az_1 + bz_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 3z : SI$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, 2x+z=1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-2x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

contiene $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? cioè $\exists x, y$ t.c. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 1-2x=0 \end{cases} ? \quad 1=0 !! NO \Rightarrow 0 \notin C \Rightarrow C \text{ non è} \text{ un ssp. red.}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V, z=y^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Provo se la somma di 2 vettori di D sia in D :

$$\oplus \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ y_1^2+y_2^2 \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow y_1^2+y_2^2 = (y_1+y_2)^2$$

non è vero in generale
ad es. non lo è per $y_1=y_2=1$

quindi vedo ad es. che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

non è vero che la somma sia "interna" per tutte le coppie di vettori di D $\Rightarrow D$ non è un sottospazio

Avei anche potuto vedere che non è vero che $a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ay \\ az^2 \end{pmatrix}$ b.t.a, appartiene a D , poiché ad es. $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, cioè anche il prodotto per scalare non è interno. (BASTA UNA DELLE DUE!)

AL 95
bis

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \mid x=0 \text{ o } y=0 \right\} \quad \text{"o' non esclusivo"}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo caso se considero $a \in \mathbb{R}$

$$a \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in E \quad \text{perché nel 1° caso ho } a \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

$$\quad \text{nel 2° caso ho } a \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \\ az \end{pmatrix}$$

ed entrambi sono vettori di E .

Però non è vero per ogni coppia di elem. di E che le loro somme stia in E . Sol. es.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin E$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $E \quad E$

$\Rightarrow E$ cioè è un sotto spazio vettoriale.

Sottospazi intersezione e somma di sottospazi (AL56)

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e siano U e W due sottospazi di V .

OSSERVAZIONE 1. L'intersezione insiemistica $U \cap W$ dei due sottospazi è un sottospazio di V .

DIM. Innanzitutto $U \cap W$ non è vuoto poiché entrambi i sottospazi contengono lo 0 di V e quindi $U \cap W$ contiene almeno 0 .

Inoltre $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in U \cap W$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{v}_1, \underline{v}_2 &\in U \xrightarrow{\text{PROP2}} k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 \in U \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2 &\in W \xrightarrow{\text{PROP2}} k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 \in W \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 \in U \cap W \xrightarrow{\text{PROP2}} U \cap W \text{ ssp. di } V.$$

Il ragionamento vale anche se i sottospazi sono più di 2 o anche infiniti. c.v.d.

Invece

OSSERVAZIONE 2. L'unione insiemistica $U \cup W$ può non essere (e in generale non è) un sottospazio vettoriale di V .

ESEMPIO (il più banale possibile). In $V = \mathbb{R}^2$

consideriamo i due sottospazi

$U = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$: coppie ordinate con 2° elemento nullo

$W = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$: " " " 1° elemento nullo

Allora $\underline{u} = (1, 0) \in U$ e quindi $\in U \cup W$

$\underline{w} = (0, 1) \in W$ e quindi $\in U \cup W$

ma $\underline{u} + \underline{w} \notin U \cup W$ poiché $\underline{u} + \underline{w} = (1, 1)$ non ha né il 1° né il 2° elemento nullo.

Come si "aggiusta"?

(AL57)

Cerchiamo "il più piccolo sottospazio di V che contenga U e W ", cioè l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono U e W , che - per quanto detto sull'intersezione - sarà un sottospazio.

Un sottospazio con questa proprietà deve contenere, insieme a tutti i vettori $\underline{u} \in U$ e a tutti i vettori $\underline{w} \in W$, tutte le loro possibili somme $\underline{u} + \underline{w}$.

Basta? SÌ

PROP. 3. L'insieme $U+W$ di tutti i vettori del tipo $\underline{u} + \underline{w}$, al variare di \underline{u} in U e di \underline{w} in W

$$U+W = \{ \underline{u} + \underline{w} , \underline{u} \in U, \underline{w} \in W \}$$

è un sottospazio vett. di V che prenderà il nome di sottospazio somma di U e W .

DIM. Siano $\underline{u}_1 + \underline{w}_1$ e $\underline{u}_2 + \underline{w}_2$ due el. di $U+W$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned} k_1(\underline{u}_1 + \underline{w}_1) + k_2(\underline{u}_2 + \underline{w}_2) &= (k_1 \underline{u}_1 + k_1 \underline{w}_1) + (k_2 \underline{u}_2 + k_2 \underline{w}_2) \\ &= (\underbrace{k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2}_{\in U \text{ essendo ssp.}}) + (\underbrace{k_1 \underline{w}_1 + k_2 \underline{w}_2}_{\in W \text{ essendo ssp.}}) \in U+W \end{aligned}$$

ASSOC +
COMM +
DISTR. $\underline{u}'s$ + VETTORI
C.V.d.

Nell'esempio $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, b), b \in \mathbb{R}\}$
Si ha $U+W = V$, ma non è sempre così.

Esempio. In $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considero i sottospazi (VERIFICARE)

$$U = \left\{ R = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Si ha $R+D = \begin{pmatrix} a+c & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, che - al variare di a, b, c, d

in \mathbb{R} - danno l'insieme $U+W = \left\{ T = \begin{pmatrix} h & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, h, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ delle matrici triangolari alte.

Esercizi.

Sia $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n . Ricordo che:

1) $\forall A \in V$ si chiama diagonale principale di A l'insieme delle "entrate" di posto $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$.

2) $A \in V$ si dice triangolare alta se tutte le sue "entrate" SOTTO la diagonale principale sono nulli, ad es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{se } n=3$$

FORMALMENTE:
 $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

3) $A \in V$ si dice triangolare bassa se tutte le sue "entrate" SOPRA la diag. princ. sono nulli, ad es.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{se } n=3$$

FORMALMENTE:
 $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$

4) $A \in V$ si dice diagonale se tutte le sue "entrate" FUORI dalla diag. princ. sono nulli, ad es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{se } n=3$$

FORMALMENTE
 $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

ESERCIZIO 1. Denotati con U, W, D rispettivamente i sottoinsiemi di V delle matrici triangolari alte, triangolari basse, diagonali, provare che U, W, D sono sottospazi di V .

ESERCIZIO 2. Descrivere gli elementi dei sottospazi $U \cap W$, $U + W$, $U \cap D$, $U + D$ VEDI AL 58 bis

e dedurne quali di questi sottospazi non sono banali (cioè non coincidono con V né con $\{\}$).

Per facilitarsi il compito fissare $\boxed{n=2}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\boxed{n=2}$. I sottoinsiemi di V :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} \text{ sono sottospazi?}$$

Se la risposta è NO trovare il più piccolo SSP. che li contiene.

$U = \{ \text{triangoli} \}$

$W = \{ \text{triangoli Bassi} \}$

$U \cap W ?$ $U + W ?$

Svolgo per le matrici quadrate di ordine 3

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, b_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U \cap W ? = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = D$$

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Dietro l'ultima domanda dell'esercizio 3 c'è la nozione di sottospazio generato da un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale V , cioè l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono S , già incontrata quando si è descritto il sottospazio Somma di sottospazi U, W come il sottospazio generato da $U \cup W$.

Riprendiamo l'esercizio 3:

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ non è un ssp di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, ad es. perché S non contiene la matrice nulla e in generale perché non contiene $k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ogni ssp. che lo contenga deve contenere in particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e tutte le loro combinazioni lineari

$$k_1 A + k_2 I, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{in particolare} \quad -1 \cdot A + 1 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi le comb. lineari

$$c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Quindi ogni ssp che contenga S contiene il ssp delle matrici diagonali che ^{contiene S} risulta quindi il sottospazio generato di S .

L'esempio dice che

- se il sottoinsieme S non è finito la ricerca del sottospazio generato da S può essere laboriosa (ma si rifarerà sempre alla ricerca di tutte le comb. lin. di tutti i possibili s.i. finiti di vettori di S)
- se l'insieme S è finito (come nell'esempio $\{A, I\}$) le considerazioni si fanno più semplici.