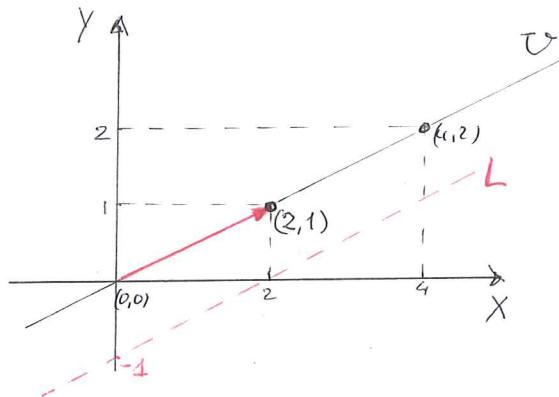


Breve escursus sul significato di "generatori di un sottospazio"

Consideriamo lo spazio vett. $V = \mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, che posso vedere come PUNTI NEL PIANO CARTESIANO o come VETTORI (freccioline) APPLICATI NELL'ORIGINE con la "punta" nel punto "coppia".



Il sottospazio di \mathbb{R}^2 generato da $\underline{0} = (0,0)$ è l'insieme dei suoi multipli $\{(k\underline{0}, k\underline{0}), k \in \mathbb{R}\} = \{(0,0)\}$, cioè

$$\langle \{\underline{0}\} \rangle = \{\underline{0}\}$$

Se prendo un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$, ad es. $\underline{v} = (2,1)$, il sottospazio generato da \underline{v} è l'insieme dei vettori del tipo

$$\{(2k, k), k \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1) \rangle = U$$

In questo sottospazio sta ad es. $(4,2)$ e in generale ogni punto che sta sulla retta che passa per il punto $(0,0)$ e il punto $(2,1)$, come posso vedere scrivendo che le componenti (x,y) dei vettori di U sono

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = k \end{cases} \quad \text{e, ricavando } k=y : x=2y \quad \text{o, se si preferisce } y=\frac{1}{2}x.$$

Questo sarà vero di ogni sottospazio generato da un vettore non nullo di \mathbb{R}^2 : cioè se $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\langle \underline{v} \rangle$ è l'insieme dei punti che stanno su una retta per l'origine.

E quindi in \mathbb{R}^2 ci sono infiniti sottospazi generati da 1 solo vettore $\neq \underline{0}$.

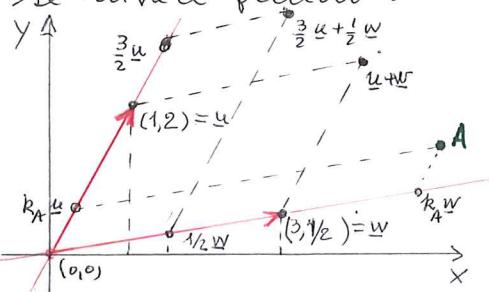
Altensione però non tutte le rette di \mathbb{R}^2 costituiscono sottospazi vettoriali: quelle che NON PASSANO PER $(0,0)$ non sono sottospazi vettoriali (infatti $(0,0)$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^2 e deve appartenere ad ogni sottospazio). Ad es. la retta parallela a U :

$$L = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{2}x - 1\}$$

non è un sottospazio vettoriale.

Nel caso di \mathbb{R}^2 i soli sottospazi vettoriali (a parte $\{\underline{0}\}$ e \mathbb{R}^2) sono le "rette per l'origine", cioè i sottospazi generati da un solo vettore. Ciò è coerente con la teoria sulle basi e la dimensione di uno sp. vett.

Infatti, se prendo due vettori uno multiplo dell'altro (come $(2,1)$ e $(4,2)$ nell'esempio) due sono quindi "allineati con l'origine" il sottospazio è esattamente la retta per l'origine individuata dai due punti; se invece prendo due vettori non uno multiplo dell'altro, come



i 2 vettori $\underline{u} = (1,2)$, $\underline{w} = (3, \frac{1}{2})$ in figura, tra le loro "combinazioni lineari" ci sono tutti i punti delle due rette che congiungono $(0,0)$ con $(1,2)$ e $(3, \frac{1}{2})$, ma anche le "sottrazioni" ottenute con la regola del parallelogramma: $\underline{u}-\underline{w}$, ma anche $\frac{3}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{w}$ ecc.

In questo modo rappresento tutti i punti di \mathbb{R}^2 : basta tracciare la retta per il punto parallela a $\langle \underline{u} \rangle$ per trovare il multiplo di \underline{w} da sommare e analog. per i multipli di \underline{v} .