

## Riassunto

Sp. vett. reale  $\mathbb{V}$  su  $\mathbb{R}$ : + prod per scalare  
e proprietà

Sop. vett.  $\mathcal{U}$  di  $\mathbb{V}$  : criteri di verifica:  
 $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{U}, \forall k \in \mathbb{R}:$   $v_1 + v_2 \in \mathcal{U}$   
 $k v_1 \in \mathcal{U}$

Nozione di  
combinazione  
lineare: entram

$\xrightarrow{\text{SCU}}$  generatori di  $\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}$  ssp. finitamente generato  
*indipendenza lineare* di un insieme  $S$  di vett. di  $\mathcal{U}$ :  
 $\sum_{i \in S} k_i v_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \forall i$

Se  $v_1, v_2 \in$  base di  $\mathcal{U}$ :

$$\begin{cases} k_1 v_1 + k_2 v_2 = h_1 v_1 + h_2 v_2 \\ (k_1 - h_1) v_1 + (k_2 - h_2) v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} k_1 - h_1 = 0 \\ k_2 - h_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} k_1 = h_1 \\ k_2 = h_2 \end{cases}$$

Base di un (sotto)spazio  
implica rappresentazione univoca di ogni vett.

Contenuto: spazi finitamente generati

ogni base di un (sotto)spazio  $\mathcal{U}$  ha lo stesso numero di vettori

$S'$  vett. lin. ind. in  $\mathcal{U}$

$B$  è base di  $\mathcal{U}$

$S$  sist. di generatori di  $\mathcal{U}$

$\dim \mathcal{U}$

$|S'|$   
finito

$$|S'| \leq |B| \leq |S|$$

troppi vettori per essere indipendenti? quando?  
 troppo pochi per generare? quando?

Completenza di una base di  $\mathcal{U}$  a una base di  $\mathbb{V}$  (aggiunta e scarto)

FORMULA di GRASSMANN.

## Idee al di sotto delle formule di Grassmann

Considero due sottospazi  $U, W$  e le loro intersezione, che alla peggio è ridotta al sottospazio  $\{0\}$ .

$U \cap W$  in quanto sottospazio di uno sp. rett. finito. generato ha una base finita; supponiamo che sia fatta da due vettori:  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} = S$

$U$  ha una base finita; supponiamo che sia fatta da 4 vettori:  $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\} = S'_U$

$W$  idee; supponiamo che sia fatta da 6 vettori:  $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4, \underline{w}_5, \underline{w}_6\} = S'_W$

La procedura di aggiunta ed eventuale scarto permette di completare la base di  $U \cap W$  a una nuova base di  $U$ :

prendo come sist. di generatori di  $U$

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$$

e qui chiedo  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}_1\}$  è indipendente? Se sono fortunato, altrimenti butto via  $\underline{u}_1$  e provo con  $\underline{u}_2$ : di nuovo  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}_2\}$  è indip.? Se sono fortunato non se ne riprovo con  $\underline{u}_3$  e a questo punto le cose mi devono andare bene per forza poiché dim  $U=4$  e quindi non posso avere un sistema di generatori con meno di 4 elementi. In sostanza quindi, pur di riconoscere gli elementi posso pensare che la base di  $U$  sia

$$S_U = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

allo stesso modo opero con  $W$  e ... otengo come base

$$S_W = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$$

Insiematicamente  $S = S_U \cap S_W$ ; Ricordiamo che nel caso di insieme si ha

$$|S_U| + |S_W| = |S_U \cap S_W| + |S_U \cup S_W|$$

e l'insieme sottostrato è sicuramente un

insieme di generatori per  $U+W$  (ogni rett.  $u \in U$   
è comb. line. di  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$ ; ogn. rett.  $v \in V$   
" " " "  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, w_2, w_3, w_4$ )

Il problema è: sono indipendenti?

Partiamo dai vettori di  $S_w$  (sono in numero maggiore  $\Rightarrow$  facciamo meno conti) e andiamo ad aggiungere i vettori di  $S_v$  che non stanno in  $S$



$S_{\infty} \cup \{e_1\}$  è indipendente?

$$u_1 = a v_1 + b v_2 + \sum_{i=1}^4 c_i w_i \quad \text{ha soluzioni?}$$

Per come ho scelto  $S_V$ , il vettore  $\underline{e}_1$  non sta in  $W$  (altrimenti sarebbe in  $U \cap W$  e quindi dipenderebbe da  $S$ ) e quindi non può essere scritto come comb. lin. dei vettori della base di  $W$ .

Ora  $S_w \cup \{u_1, u_2\}$  è indipendente?

۱۶

$$\underline{u}_2 = a\underline{u}_1 + b\underline{v}_1 + c\underline{v}_2 + \sum_{i=1}^4 c_i \underline{w}_i$$

i'll restore

$u_2 - \alpha u_1$  che per come ho scelto il complemento della base  $S'$  di  $UNW$  non può stare in  $UNW$  (altrimenti  $v_1, v_2, u_1, u_2$  sarebbero dipendenti)

starebbe in  $U$  (poiché comune di reti. della base di  $U$ )  
ma anche in  $W$  ( $"$  " " " " " " " $W$ )

**IMPOSSIBILE**!  $\Rightarrow$  Non sono indipendenti tra loro.

e.vcd.