

7. MATRICI ASSOCIATE A UN'APPLICAZIONE LINEARE

(AL 83)

Un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali di dimensione finita è nota quando si conoscono le immagini dei vettori di una base del dominio. Infatti vale il

TEOREMA. Siano V, W spazi vettoriali con $\dim V = n$,

$\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ una base di V

$\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ un insieme di vettori di W
non necessariamente distinti.

Esiste una e una sola applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che

$$f(\underline{a}_1) = \underline{w}_1, \quad f(\underline{a}_2) = \underline{w}_2, \dots, \quad f(\underline{a}_n) = \underline{w}_n$$

Dim. Poiché $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ è una base di V , ogni $\underline{v} \in V$ si scrive in uno e un solo modo come comb. lin. dei suoi vettori:

$$\underline{v} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n$$

Definisco:

$$f(\underline{v}) = x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_n \underline{w}_n$$

Questa è un'applicazione da V a W (**perché?**)

tale che $f(\underline{a}_i) = \underline{w}_i$ ed è lineare perché

se $\underline{v}' = x'_1 \underline{a}_1 + \dots + x'_n \underline{a}_n$:

$$\begin{aligned} f(\underline{v} + \underline{v}') &= f((x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n) + (x'_1 \underline{a}_1 + \dots + x'_n \underline{a}_n)) = \\ &= f((x_1 + x'_1) \underline{a}_1 + \dots + (x_n + x'_n) \underline{a}_n) = \\ &= (x_1 + x'_1) \underline{w}_1 + \dots + (x_n + x'_n) \underline{w}_n = \\ &= (x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_n \underline{w}_n) + (x'_1 \underline{w}_1 + \dots + x'_n \underline{w}_n) = \\ &= f(\underline{v}) + f(\underline{v}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k \underline{v}) &= f(k(x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n)) = f((kx_1) \underline{a}_1 + \dots + (kx_n) \underline{a}_n) = \\ &= (kx_1) \underline{w}_1 + \dots + (kx_n) \underline{w}_n = k(x_1 \underline{w}_1 + \dots + x_n \underline{w}_n) = k f(\underline{v}) \end{aligned}$$

c.v.d.

Esempio. Considero in \mathbb{R}^3 la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

(AL84)

(VERIFICARE PER ESERCIZIO CHE È UNA BASE)

Voglio determinare l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

tale che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2x - 3x^2$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 5 - x^2 + x^7$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 7+x$.

Soluzione:

Devo scrivere ogni $\underline{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ come comb. lin. dei vettori della base:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Sistema lineare nelle incognite $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow$

Event.
metodo di
GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = c/3 \\ x_2 = b/2 - c/3 \\ x_1 = a - b/2 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f\left(a - \frac{b}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \left(a - \frac{b}{2}\right)(2x - 3x^2) + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right)(5 - x^2 + x^7) + \frac{c}{3}(7+x) = \\ &= \frac{5}{2}b + \frac{7}{3}c + \left(2a - b + \frac{c}{3}\right)x + \left(b - 3a + \frac{c}{3}\right)x^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right)x^7 \end{aligned}$$

$$\text{Ad es. } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \\ (2x - 3x^2) - \frac{1}{3}(5 - x^2 + x^7) + \frac{1}{3}(7+x) = \frac{7}{3} + \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^7$$

NOTA: dall'esempio si vede che per la validità del teorema non serve che $\dim W$ sia finita.

Ora invece vediamo come l'idea di descrivere un'app. lineare assegnando le immagini dei vettori di una base del dominio permetta, se anche il codominio W ha dim. finita e si sceglie una base anche in W , di associare una matrice a un'app. lineare.

OSS. Siano V e W sp. vett. con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ (AL85)

Siano $\alpha = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ una base ORDINATA di V
 e $\beta = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ una base ORDINATA di W .

Se $f: V \rightarrow W$ è un' app. lineare, ogni immagine di un vettore \underline{a}_j della base α di V si può scrivere in maniera unica come comb. lin. di vett. della base β di W (poiché $f(\underline{a}_j) \in W$). Scrivo:

$$f(\underline{a}_j) = a_{1j} \underline{b}_1 + \dots + a_{mj} \underline{b}_m = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE: l'ultima uguaglianza fornisce solo una scrittura formale utile per capire quel che succede in seguito senza fare conti. La prima matrice $1 \times m$ è una MATRICE DI VETTORI che viene moltiplicata (riga per colonna) per la matrice $m \times 1$ di numeri (restituendo un vettore di W)

Dovrebbe essere chiaro perché è necessario pensare le basi "ordinate". Capiamolo su un esempio.

Sia $W = \mathbb{R}^2$ e la sua base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia

$$\underline{w} = f(\underline{a}_j) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \underline{e}_1 + 3 \underline{e}_2$$

Se ordino la base come $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ scrivo $\underline{w} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Se la ordino come $(\underline{e}_2, \underline{e}_1)$ scrivo $\underline{w} = (\underline{e}_2, \underline{e}_1) \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

cioè i coefficienti nelle colonne cambiano posto.

Ora "mettiamo insieme" tutte le informazioni su $f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)$, usando ancora la notazione MATRICE DI VETTORI:

$$(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

DEF. La matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ che ha sulla j -esima colonna le componenti di $f(\underline{a}_j)$ rispetto alla base ordinata B di W (e seguendo nell'ordinamento delle colonne quello delle basi α) è detta matrice associata a f (o rappresentativa di f) rifatto alle basi ordinate α di V e B di W .

Oss. Se $\underline{v} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\text{si ha } f(\underline{v}) = x_1 f(\underline{a}_1) + \dots + x_n f(\underline{a}_n) =$$

$$= (f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e tenendo conto di come si rappresenta $(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n))$ e delle prop. anac. del prodotto di matrici si ha:

$$f(\underline{v}) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

Cioè, se le componenti di \underline{v} rispetto alla base ordinata α sono $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ quelle di $f(\underline{v})$ rispetto

$$\text{alla base ordinata } B \text{ sono } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Esempio. Siano $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}^2$ e sia $f: V \rightarrow W$ l'applicazione $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix}$

Verificare per esercizio che è lineare.

Trovare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi ordinate $\alpha = (1+x, x-x^2, x^2)$ di V e $B = ((\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}))$ di W (verificare che sono basi!)

Dico trovare le immagini dei vettori di \mathcal{Q}

$$\left. \begin{array}{l} f(\underline{a}_1) = f(1+x) = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(\underline{a}_2) = f(x-x^2) = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(\underline{a}_3) = f(x^2) = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Ricordare:} \\ f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} \\ \text{quindi } 1+x \text{ ha } a=b=1, c=0 \\ \text{ecc} \end{array}$$

e rappresentare ciascuno dei vettori di \mathbb{R}^2 trovato come comb. lin. di $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

In questo caso si vede "a occhio" che \star

$$f(\underline{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\underline{b}_1 + 3\underline{b}_2 = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{b}_1 + 3\underline{b}_2 = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\underline{b}_2 = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $(f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2), f(\underline{a}_3)) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

cioè la matrice associata a f rispetto ad \mathcal{Q} e \mathcal{B} è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Se volessi conoscere le componenti rispetto alla base $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ di $f(x) = f(\underline{a}_2 + \underline{a}_3)$ basterebbe moltiplicare A per la terza riga delle componenti di x
risp. \mathcal{Q} : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $0\underline{a}_1 + 1\underline{a}_2 + 1\underline{a}_3$

Infatti

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2), f(\underline{a}_3)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\star Per ciò ci vuole risolvere i 3 sistemi lineari $f(\underline{a}_j) = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2$.
vedi pag 87 bis

Risoluzione veloce dei 3 sistemi dell'es. pag 87

AL 87 bis

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \textcircled{2} \quad X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \textcircled{3} \quad X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sono 3 sistemi distinti con le stesse matrici dei coefficienti \Rightarrow si possono risolvere insieme:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

coeffici. termini noti

e quindi

$$2 \underline{b}_1 + 3 \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \underline{b}_1 + 3 \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \underline{b}_1 - 1 \cdot \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'importante, in presenza di sistemi più complessi, è osservare che

- a) la matrice dei coefficienti sarà sempre quadrata di ordine n
- b) devo usare il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, fermandomi solo quando la matrice dei coefficienti è la matrice identica.

Dietro questa procedura c'è il fatto che se

$\mathbf{A} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e $\mathbf{B} = (\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n)$ sono due basi ordinate di uno spazio vett. V di dimensione n e

$$(\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n) = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)P \quad \text{con } P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = (\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n)Q \quad \text{con } Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

allora

$(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)PQ$ cioè $PQ = I$, cioè i coeff. che danno la base \mathbf{A} a partire dalla \mathbf{B} si ottengono cercando P^{-1} .

Esercizio. $V = W = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$: $\dim V = 4$

- 1) verificare che l'applicazione $f(C) = C^T \quad \forall C \in V$
è lineare
- 2) verificare che $A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
e $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4) = (\underline{a}_1, (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), \underline{a}_4, (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}))$ sono basi
(ordinate) di V
- 3) Rappresentare f rispetto alle basi: $(A, A); (B, B);$
 $(A, B); (B, A)$ (ore la prima è sempre la base
del dominio, le seconde quelle del codominio).

3) Osservo che

$$\begin{aligned} f(\underline{a}_1) &= \underline{a}_1, & f(\underline{a}_2) &= \underline{a}_3, & f(\underline{a}_3) &= \underline{a}_2, & f(\underline{a}_4) &= \underline{a}_4 \\ f(\underline{b}_1) &= \underline{b}_1, & f(\underline{b}_2) &= \underline{b}_2, & f(\underline{b}_3) &= \underline{b}_3, & f(\underline{b}_4) &= -\underline{b}_4 \end{aligned}$$

Allora

$$(f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2), f(\underline{a}_3), f(\underline{a}_4)) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f(\underline{b}_1), f(\underline{b}_2), f(\underline{b}_3), f(\underline{b}_4)) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per poter dare le altre due matrici devo rappresentare
ogni vettore di A come comb. lin. di vett. di B (e viceversa)

$$(A, B) : \underline{a}_1 = \underline{b}_1, \underline{a}_4 = \underline{b}_3, \underline{a}_2 = \frac{1}{2}(\underline{b}_2 + \underline{b}_4), \underline{a}_3 = \frac{1}{2}(\underline{b}_2 - \underline{b}_4)$$

$$\Rightarrow (f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2), f(\underline{a}_3), f(\underline{a}_4)) = (\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_2, \underline{a}_4) = \\ = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(B, A): È più facile

$$\underline{b}_1 = \underline{a}_1, \underline{b}_3 = \underline{a}_4, \underline{b}_2 = \underline{a}_2 + \underline{a}_3, \underline{b}_4 = \underline{a}_2 - \underline{a}_3$$

$$\Rightarrow (f(\underline{b}_1), f(\underline{b}_2), f(\underline{b}_3), f(\underline{b}_4)) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rileggo le matrici immagine attraverso
le loro componenti nelle basi standard.

ESERCIZIO (cambio di base) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (AL89)

l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base

$\beta = (\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ con $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE: se $V=W$ e si dice "rispetto alla base" si intende che la base scelta in V e W è la stessa.

Determinare la base rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

Devo determinare $f(\underline{e}_1)$ e $f(\underline{e}_2)$ esprimendoli attraverso $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ sapendo che

$$f(\underline{b}_1) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\underline{b}_1 + 6\underline{b}_2$$

$$f(\underline{b}_2) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 6\underline{b}_1 + 9\underline{b}_2$$

Quindi innanzitutto devo esprimere $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ come comb. lin. di \underline{b}_1 e \underline{b}_2

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risolvo i due sist. insieme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

La matr. rappresentativa risp. alla base canonica è $\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$
e in effetti $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$ ecc...

ESERCIZIO . Dati $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (AL90)

1) Verificare che sono una base di \mathbb{R}^3

2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'app. lin. tale che

$$\ker f = \langle \{\underline{a}, \underline{b}\} \rangle, f(\underline{c}) = \underline{c}$$

Determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ di \mathbb{R}^3

Sol. Per provare (1) basta vedere che $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ è un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 (poiché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ questo implica che sono indip.).

E per far ciò basta far vedere che ogni vettore delle base canonica è loro comb. lineare, cioè esistono $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ t.c.

$$x_1 \underline{a} + y_1 \underline{b} + z_1 \underline{c} = \underline{e}_1, \quad x_2 \underline{a} + y_2 \underline{b} + z_2 \underline{c} = \underline{e}_2, \quad x_3 \underline{a} + y_3 \underline{b} + z_3 \underline{c} = \underline{e}_3$$

3 sistemi con la stessa matrice dei coeff. ($\underline{a} | \underline{b} | \underline{c}$)

Li risolviamo insieme con il metodo di elim. di GAUSS.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

dice che $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

cioè ogni \underline{e}_i è comb. lin. di $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ che sono quindi una base di \mathbb{R}^3 .

(2). Per ipotesi $(f(\underline{a}), f(\underline{b}), f(\underline{c})) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi (per la linearità e il ciquadro): $\underline{a}, \underline{b} \in \ker f!$

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (f(\underline{a}), f(\underline{b}), f(\underline{c})) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{per l'ipotesi}$$

$$= (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{moltiplico le due matrici e leggo } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ come comb. lin. di } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$$

$$= (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo di non aver fatto errori. Abbiamo detto che l'immagine $f(\underline{a})$ di \underline{a} è ottenuta per comb. lin. di $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ tramite i coefficienti di $A \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Essi sono nulli $\Rightarrow f(\underline{a}) = \underline{0}$ O.K.

Idem per $f(\underline{b})$: $A \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\underline{b}) = \underline{0}$ O.K.

e per $f(\underline{c})$: $A \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\underline{c}) = \underline{c}$ O.K.

Qualche considerazione di metodo

In tutti gli esempi non ci siamo limitati a trovare la matrice associata ma abbiamo anche tenuto traccia delle basi rispetto a cui abbiamo espresso le app. lin.; ad es.

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑

dice

"scrivo le immagini dei vettori della base canonica rispetto ai vettori della base $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ "

Avrei anche potuto scrivere ciascuna delle immagini $f(\underline{e}_i)$ come comb. di $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ e sostituire poi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ con le loro rappresentazioni come comb. lin. di $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ecc.

Il metodo proposto - a fronte di un maggior "ingombro grafico" - presenta il vantaggio di permettere di controllare a ogni passo con quale coppia di basi sto giocando (sono davvero arrivato in fondo?) e di permettere di scorrere l'onda delle sostituzioni in un prodotto di matrici.