

ESERCIZI SULLA RAPPRESENTAZIONE di un'app. lin. mediante matrici. (E1)

1) Sia $g_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$g_k \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} kx + y + z \\ x + ky + kz + k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

- a) stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ g_k è lineare
- b) per tali valori trovare la matrice che rappresenta g_k rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .
- c) per tali valori determinare una base del nucleo e completarla a una base di \mathbb{R}^3 e rappresentare g_k rispetto a tale base in \mathbb{R}^3 e alle basi canoniche in \mathbb{R}^2 .
- d) per tali valori stabilire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene a $\text{Im } g_k$.

Sol. (a) non è certamente lineare se $g_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$g_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0+0+k^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0+k^2-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k^2=1 \Leftrightarrow k=\pm 1$$

Quindi g_k non è lineare se $k \neq \pm 1$.

Controlliamo se per $k=\pm 1$ è lineare.

$\boxed{k=1}$ $g_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è lineare perché prodotto di matrice per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\boxed{k=-1}$ $g_{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è lineare: idem (vedi esercizi)

(b) $\boxed{k=1}$ (e_1, e_2, e_3) base in \mathbb{R}^3 | $g_1(e_1) = g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e'_1, e'_2) base in \mathbb{R}^2 | $g_1(e'_1) = g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g_1(e'_2) = g \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_1 + e'_2 = (e'_1, e'_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(g_1(\underline{e}_1), g_1(\underline{e}_2), g_1(\underline{e}_3)) = (\underline{e}'_1, \underline{e}'_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analogoamente per

A_{-1} matr. raffr. di g_1
rispetto alle 2 basi
canoniche

$$K = -1 : A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ matr. raffr. di } g_{-1} \text{ rispetto alle 2 basi canoniche}$$

c) $g_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$ base del nucleo?

cerco gli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x+y+z=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -x-y \\ x = x \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \ker g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

base di $\ker g_1$: $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

completare la base di $\ker g_1$ a una base per \mathbb{R}^3

$\{\alpha_1, \alpha_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ list. di generatori. L'uso
è procedimento degli scarti necessari

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \underline{e}_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono i vettori.
sono 3 come
la dimens. di \mathbb{R}^3
¹¹
sono una base.

Rappresento g_1 rispetto a $(\alpha_1, \alpha_2, \underline{e}_1)$ e $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2)$

$$(g_1(\alpha_1), g_1(\alpha_2), g_1(\underline{e}_1)) = ((0), (0), (1)) = (0\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2, 0\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2, 1\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2) =$$

$$= (\underline{e}'_1, \underline{e}'_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matr. raffr. di f risp.
a $(\alpha_1, \alpha_2, \underline{e}_1)$ e $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2)$

Avvolgono il caso $k = -1$: $\ker g_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x = y + z \\ x + y - z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ (E3)
 Una sua base è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Posso completarla a una base di \mathbb{R}^3 aggiungendo $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ (VERIFICARLO!). In questo caso $B_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (VERIFICARLO!)

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$: appartiene a $\text{Im } g_1$?

$$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.c. } g_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

C'è è risolvibile l'eq. vettoriale

$$\begin{pmatrix} x+4+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ? \text{ ovvio che no}$$

Ora: avremo osservato che

$g_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+4+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè i valori di $\text{Im } g_1$ sono tutti multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mentre $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ quindi non appartiene al SS₁ $\text{Im } g_1$.

b) $\boxed{k = -1}$: $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.c. } g_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ?$

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

Risolvendo, c'è scopo che è risolvibile.

Ma potrò prenderlo?

$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cioè $g_1(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $g_1(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 sono lin. indip. in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$
 sono una base di \mathbb{R}^3

Tutti i vettori di \mathbb{R}^3 sono del tipo $x_1 g_1(\underline{e}_1) + x_2 g_1(\underline{e}_2) = g_1(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) \in \text{Im } g_{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Im } g_1$

2) Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione definita da

$$f_k \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = (ka+c)x^2 + (b+k^2-k)x + a+kc , \quad k \in \mathbb{R}$$

- a) Stabilire per quali k è lineare
- b) Per tali valori di k determinare la matrice rappresentativa dell'applicazione rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e alle basi $(x^2, x-1, 1)$ di $\mathbb{R}_2[x]$
- c) Rappresentare $f_k \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ rispetto a tali basi.
(Ricordare: $\mathbb{R}_2[x] = \text{sp. vkt. dei polinomi a coeff. reali nell'indeterminata } x \text{ di grado } \leq 2$)

a) $f_k \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 + (k^2-k)x + 0 = 0 \iff \boxed{k=0 \text{ o } k=+1}$
Si verifichi che per $k=0$ e $k=1$ l'ape. è lineare.

b) $\boxed{k=1} \quad f_1 = f$
 $(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (1 \cdot x^2 + 1, 0 + 1 \cdot x + 0, 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1) = (x^2 + 1, x, x^2 + 1)$

$$(b_1, b_2, b_3) = (x^2, x-1, 1)$$

$$f(\underline{e}_1) = x^2 + 1 = b_1 + b_3 = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{e}_2) = x = (x-1) + 1 = b_2 + b_3 = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{e}_3) = x^2 + 1 = b_1 + b_3 = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rifido per $k=0$.

c) $\boxed{k=0}$
 $f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = f(1 \cdot \underline{e}_1 + 0 \cdot \underline{e}_2 - 1 \cdot \underline{e}_3) = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\text{sp. vkt.}}{\longrightarrow} 0, 0, 0$

Le componenti di $f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ sono alla base b_1, b_2, b_3 sono $0, 0, 0$