

## 8. COMPOSIZIONE di APPL. LIN. - INVERTIBILITÀ... E MATERICI

Siano  $f: U \rightarrow V$  e  $g: V \rightarrow W$  due appl. lineari tra spazi vettoriali di dimensioni:

$$\dim U = p, \dim V = n, \dim W = m$$

L'applicazione composta

$$gof: U \rightarrow W$$

è lineare e se  $M_f \in \text{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$  rappresenta  $f$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{A}$  di  $U$  e  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $M_g \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  rappresenta  $g$  rispetto alle basi ordinate  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{C}$  di  $W$ , allora la matrice rappresentativa di  $gof$  rispetto ad  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  è

$$M_{gof} = M_g M_f \quad \text{ove il prod è regolare per colonne.}$$

Dim. Linearità di  $gof$ :

$$\begin{aligned} i) \quad & gof(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = g(f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)) \stackrel{\text{f lineare}}{=} g(f(\underline{u}_1) + f(\underline{u}_2)) = \\ & g(f(\underline{u}_1)) + g(f(\underline{u}_2)) = g \circ f(\underline{u}_1) + g \circ f(\underline{u}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & gof(k\underline{u}) = g(f(k\underline{u})) \stackrel{\text{f lin}}{=} g(kf(\underline{u})) = k g(f(\underline{u})) = kg \circ f(\underline{u}) \end{aligned}$$

Circa la matrice, se  $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p)$ ,  $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ ,  $\mathcal{C} = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m)$  si ha

$$(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_p)) = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n) M_f$$

$$(g(\underline{b}_1), \dots, g(\underline{b}_n)) = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m) M_g$$

e per la linearità di  $g$

$$\begin{aligned} (g(f(\underline{a}_1)), \dots, g(f(\underline{a}_p))) &= (g(\underline{b}_1), \dots, g(\underline{b}_n)) M_f = \\ &= (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m) M_g M_f. \end{aligned}$$

c.v.d.

Se si vuol controllare le procedure passo passo vedi pag AL93

(AL93)

Veoliamo la ricerca delle matrice  $M_{gof}$  su un esempio:

$$\dim U = p = 2, \quad \dim V = n = 3, \quad \dim W = m = 2$$

$$(f(a_1), f(a_2)) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{pmatrix}$$

$$\text{significa } f(a_j) = \underline{b}_1 h_{1j} + \underline{b}_2 h_{2j} + \underline{b}_3 h_{3j} \quad (j=1,2)$$

$$(g(\underline{b}_1), g(\underline{b}_2), g(\underline{b}_3)) = (\underline{c}_1, \underline{c}_2) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{significa } g(\underline{b}_l) = \underline{c}_1 k_{1l} + \underline{c}_2 k_{2l} \quad (l=1,2,3)$$

Allora

$$\begin{aligned} g \circ f(a_j) &= g(f(a_j)) = g(\underline{b}_1 h_{1j} + \underline{b}_2 h_{2j} + \underline{b}_3 h_{3j}) = \text{glin.} \\ &= g(\underline{b}_1) h_{1j} + g(\underline{b}_2) h_{2j} + g(\underline{b}_3) h_{3j} = \\ &= (\underline{c}_1 k_{11} + \underline{c}_2 k_{21}) h_{1j} + (\underline{c}_1 k_{12} + \underline{c}_2 k_{22}) h_{2j} + (\underline{c}_1 k_{13} + \underline{c}_2 k_{23}) h_{3j} = \\ &= \underline{c}_1 \underbrace{(k_{11} h_{1j} + k_{12} h_{2j} + k_{13} h_{3j})}_{(\underline{k}_{11} \underline{k}_{12} \underline{k}_{13}) \begin{pmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \end{pmatrix}} + \underline{c}_2 \underbrace{(k_{21} h_{1j} + k_{22} h_{2j} + k_{23} h_{3j})}_{(\underline{k}_{21} \underline{k}_{22} \underline{k}_{23}) \begin{pmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \end{pmatrix}} \\ &= (\underline{c}_1, \underline{c}_2) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1j} \\ h_{2j} \\ h_{3j} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ripetendo per i due vettori della base di  $V$ :

$$(g \circ f(a_1), g \circ f(a_2)) = (\underline{c}_1, \underline{c}_2) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO. Siano  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$  le applicazioni lineari definite da

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a \end{pmatrix} \quad g\left(\begin{pmatrix} h \\ k \\ e \end{pmatrix}\right) = h + (h+k)x$$

a) Determinare le matrici rappresentative di  $f, g, g \circ f$  rispetto alle basi ordinate:  $(e'_1, e'_2)$  di  $\mathbb{R}^2$ ,  $(e_1, e_2, e_3)$  di  $\mathbb{R}^3$  e  $(1, x)$  di  $\mathbb{R}_1[x]$ .

b) Si può considerare  $f \circ g$ ?

a)  $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$M_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo verificare il risultato anche direttamente:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a+b \\ -b \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{g} a + ((a+b) - b)x = a + ax$$

civè  $g \circ f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a + ax \Rightarrow g \circ f(e_1) = 1 + x \Rightarrow g \circ f(e_2) = 0 + 0x$

$$\Rightarrow M_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo un'applicazione lin.  $f: V \rightarrow W$  tra sp. vett. di dimensione finita.

Se è biunivoca  $V$  e  $W$  devono avere la stessa dimensione poiché

$$f \text{ iniettiva} \Rightarrow \ker f = \{0\}$$

$$f \text{ suriettiva} \Rightarrow \operatorname{Im} f = W$$

e per il teor. di unicità + range

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 0 + \dim W.$$

(2295)

Prop. Sia  $f: V \rightarrow W$  un'app. lin. bimivoca tra due sp. rett. di dimensione  $n$ .  
Allora l'app. inversa  $f^{-1}: W \rightarrow V$ , def. da  
 $f^{-1}(w) = v \Leftrightarrow f(v) = w$ ,  
è pure lineare e se rispetto a due basi ordinate  $\alpha$  di  $V$  e  $\beta$  di  $W$  l'app.  $f$  è rappresentata dalla matrice  $A$ , la sua inversa, rispetto a  $\beta$  e ad  $\alpha$ , è rappresentata da  $A^{-1}$ .

Dim. Siano  $w_1, w_2 \in W$ ; per la bimivocità esiste uno e un sol  $v_1$  t.c.  $f(v_1) = w_1$  e  
" " " "  $v_2$  "  $f(v_2) = w_2$ .

Allora

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) \stackrel{f^{-1} \text{ lin.}}{=} f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = \\ = f^{-1} \circ f(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$$

DEF INVERSA

Quattro  $\forall k \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(kw_1) = f^{-1}(k f(v_1)) = f^{-1}(f(kv_1)) = f^{-1} \circ f(kv_1) = \\ = k v_1 = k f^{-1}(w_1).$$

Per quanto riguarda le matrici copiamo per  $n=2$ .

Siano

$$(f(\underline{\alpha}_1), f(\underline{\alpha}_2)) = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) M_f$$

e

$$(f^{-1}(\underline{b}_1), f^{-1}(\underline{b}_2)) = (\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} = (\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) M_{f^{-1}}$$

Poiché  $f^{-1} \circ f(\underline{\alpha}_j) = \underline{\alpha}_j$  si deve avere

$$(f^{-1} \circ f(\underline{\alpha}_1), f^{-1} \circ f(\underline{\alpha}_2)) = (\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) M_{f^{-1}} \cdot M_f = (\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) = (\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } M_{f^{-1}} \cdot M_f = I \Rightarrow M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$$

Similmente componendo  $f \circ f^{-1}(\underline{b}_j)$  si vede  $M_f \cdot M_{f^{-1}} = I$   
c.v.d.

TEOR. Sia  $f: V \rightarrow W$  app. lineare con  $\dim V = \dim W = n$

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1)  $f$  è bimivoca (i.e. che equivale a invertibile)
- 2) ogni matrice rappresentativa di  $f$  è invertibile
- 3) se  $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$  è una base di  $V$  allora  $\{f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)\}$  è una base di  $W$ .

DIM. 1)  $\Rightarrow$  2) appena provato

2)  $\Rightarrow$  3) Mostriamo che se la matrice  $A$  che rappresenta  $f$  risp.

$(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$  e  $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$  è invertibile,  $\{f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)\}$

sono lin. indip. (ed essendo  $n$  sono anche generatori

di  $W$  cioè sono una base di  $W$ ). **Per brevità suppongo  $n=2$**

(non cambia niente): sia  $x_1 f(\underline{a}_1) + x_2 f(\underline{a}_2) = \underline{0}_W$  cioè

$$\underline{0}_W = (f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

poiché  $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$  è base di  $W$ ,  $\underline{0}_W$  si può scrivere solo come

$0\underline{b}_1 + 0\underline{b}_2$  quindi (\*) diventa

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{ moltiplico per } A^{-1}:$$

$$(A^{-1}A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi  $\{f(\underline{a}_1), f(\underline{a}_2)\}$  è un sist. di vett. lin. indip.

3)  $\Rightarrow$  1). Se  $\{f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)\}$  è una base di  $W$ ,  $\forall \underline{w} \in W$  esistono  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  t.c.

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^n x_i f(\underline{a}_i) = f \left( \sum_{i=1}^n x_i \underline{a}_i \right) \in f(V)$$

Quindi  $f$  è suriettiva e per il teor. di nullità+range  $\dim \ker f = \dim V - \dim W = n - n = 0$

Quindi  $f$  è bimivoca.

C.V.d.

NOTA. Se  $f$  è bimivoca, la matr. rappre. risp.  $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$  e  $(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n))$  di  $f$  è la matrice identica di ordine  $n$