Argomento 3bis

Limiti di successioni

Non facciamo una trattazione dei limiti, per i quali rimandiamo ad es. a Pagani-Salsa: Matematica (per i Diplomi Universitari). Ricordiamo solo alcuni **limiti notevoli**.

Limiti che dipendono dal limite di Nepero:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e}$$

1) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (o $-\infty$), allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{a_n}\right)^{a_n} = e^t}$, qualunque sia il numero reale t.

2) Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+tb_n\right)^{\frac{1}{b_n}} = e^t}$, qualunque sia il numero reale t.

3) Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}\ln\left(1+tb_n\right) = t}$, qualunque sia il numero reale t.

4) Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{tb_n}-1}{b_n} = t}$, qualunque sia il numero reale t.

5) Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+b_n\right)^t-1}{b_n} = t}$, qualunque sia il numero reale t.

NOTA BENE: dal primo al quarto i limiti sono scritti nella forma più generale possibile: per ritrovare quelli consueti, porre $t = 1$.

Confronti di infinitesimi $\left(\left[\frac{0}{0}\right]\right)$

Oltre a quelli precedentemente elencati in (3), (4), (5) ricordiamo che

- Se $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, allora $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin b_n}{b_n} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan b_n}{b_n} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos b_n}{b_n^2} = \dfrac{1}{2}}$

Confronti di infiniti $\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$

Se gli infiniti da confrontare non hanno la stessa natura, ricordare che, se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, risulta

I) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\ln\left(a_n\right)^s\right)^u}{\left(a_n\right)^t} = 0$, quali che siano i numeri reali positivi s, t, u,

II) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(a_n\right)^t}{e^{a_n}} = 0$, qualunque sia il numero reale positivo t,

III) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(e^{a_n}\right)^t}{a_n^{a_n}} = 0$, qualunque sia il numero reale positivo t.

Criterio del rapporto

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni a termini positivi entrambe divergenti oppure entrambe convergenti a* 0. *Se esiste* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n} = l$ *(numero reale non negativo o* $+\infty$*) e*

- $0 \le l < 1$ *allora* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
- $l > 1$ *allora* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
- $l = 1$ *non si può applicare questo criterio.*

ESERCIZI

ESERCIZIO 3bis.1 Calcolare i limiti delle successioni aventi i seguenti termini generali:

$$a_n = \left(\frac{n^2+n}{n^2-n}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n}\right)^{3n} \qquad a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{-n} \qquad a_n = \left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$a_n = \left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2} \qquad a_n = \left(\frac{n^3-n+2}{n^3+n+1}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3} \qquad a_n = \left(\frac{2n^3+n^2-2}{2n^3-n+2}\right)^n$$

ESERCIZIO 3bis.2 (*Confronto di infiniti*) Calcolare i limiti delle successioni aventi i seguenti termini generali:

$$a_n = \frac{2n^3-n+4}{n^{3/2}-n^3} \qquad a_n = \frac{2n^3+n-3}{n^{2/3}-n^2} \qquad a_n = \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}-1} \qquad a_n = \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}}$$

$$a_n = \frac{(0.5)^n - n}{(0.3)^n + \sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{5^n - n}{3^n + \sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)^{-1}}{\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4} \qquad a_n = \frac{(\ln n)^5 + 5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n} - 20}$$

$$a_n = \frac{n - (\ln n)(\cos n)}{(\ln n)^2 - n^{1/2}} \qquad a_n = \frac{n - 3^{-n}}{\ln(1+3^n) + n^{2/3}} \qquad a_n = \frac{\ln n + \log_{1/2} n + 1}{\ln(n^{1/2}) + (\ln n)^{1/2}}$$

ESERCIZIO 3bis.3 Calcolare i limiti delle successioni aventi i seguenti termini generali:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} \qquad a_n = \left(1+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^n \qquad a_n = \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n$$

$$a_n = \left(\frac{n^2+\ln n}{n^2+1}\right)^n \qquad a_n = (1+ne^{-n})^n$$

ESERCIZIO 3bis.4 Calcolare i limiti delle successioni aventi i seguenti termini generali:

$$a_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^{n\ln n} \qquad a_n = \left(\frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2)}\right)^{n\ln n} \qquad a_n = \left(\frac{\ln(2n+1)}{\ln(n)}\right)^{\ln n}$$

ESERCIZIO 3bis.5 Calcolare i limiti delle successioni aventi termine generale a_n, dopo aver stabilito se presentano una forma di indecisione e quale:

$$a_n = \left(\sqrt[3]{\frac{2n-1}{2n+2}}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n+1}}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^n$$

ESERCIZIO 3bis.6 Stabilire se le successioni aventi i termini generali seguenti presentano la forma di indecisione $[\infty - \infty]$. Calcolarne poi i limiti:

$$a_n = \ln(3n^3 - 2n) - \ln(n^3 + 1) \qquad a_n = \ln(3n^2 - n) - \ln(3n^2 + 1) \qquad a_n = \sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n - 1}$$

$$a_n = \sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n^2 - 1} \qquad a_n = \frac{n^2 - n}{\sqrt{n^2 - 1}} - n \qquad a_n = \frac{2n^2 - 3n}{\sqrt{n^2 + n}} - 2n$$

$$a_n = \sqrt[3]{2n^3 + 3n^2} - \sqrt[3]{2n^3 - n + 1} \qquad a_n = \sqrt[3]{2n^3 + n^2 + 1} + \sqrt[3]{3n - 2n^3}$$

ESERCIZIO 3bis.7 Stabilire se le successioni aventi il termine generale seguente presentano la forma di indecisione $[0 \cdot \infty]$. Calcolarne poi i limiti:

$$a_n = n \ln\left(\frac{n+3}{n}\right) \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \qquad a_n = \sqrt{n}\left(\ln\frac{n^2+1}{n-1}\right) \qquad a_n = n^2\left(\ln\frac{n+4}{n^{3/2}-1}\right)$$

$$a_n = n^2 \ln\left(\frac{3n^2 - n + 1}{3n^2 - 1}\right) \qquad a_n = n \ln\left(\frac{1 - n - 3n^2}{1 + 2n - 3n^2}\right) \qquad a_n = \sqrt{n}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)$$

$$a_n = e^{n+1} \ln(1 + e^{-n}) \qquad a_n = 3^{n/2} \ln\left(1 - 2e^{-n/3}\right) \qquad a_n = \left((0.5)^n - 2n^{3/2}\right) \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)$$

$$a_n = n\left(\sqrt[3]{e^{-n} + 1} - 1 - e^{-n}\right) \qquad a_n = \left(3^{1/n} - 1\right) \ln(2n + 1)$$

ESERCIZIO 3bis.8 Stabilire se le successioni aventi il termine generale seguente presentano la forma di indecisione $[\infty^0]$. Calcolarne poi i limiti:

$$a_n = (\ln(3n^2))^{1/\ln 2n} \qquad a_n = (\ln(5e^n))^{-1/\ln n} \qquad a_n = \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^{1/\ln n} \qquad a_n = \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n}$$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\sqrt{n}} \qquad a_n = (10n)^{1/n} \qquad a_n = (e^n - 1)^{1/n} \qquad a_n = (n!)^{1/n}$$

ESERCIZIO 3bis.9 Stabilire se le successioni aventi il termine generale seguente presentano la forma di indecisione $[0^0]$. Calcolarne poi i limiti:

$$a_n = \left(\ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right)^{1/n^2} \qquad a_n = \left(\sqrt{e^{-n} + 1} - 1\right)^{1/n} \qquad a_n = \left(3^{1/n} - 1\right)^{1/\ln n} \qquad a_n = \left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{3/\sqrt{n}}$$

ESERCIZIO 3bis.10 Usare il criterio del rapporto per stabilire se le successioni aventi il termine generale seguente tendono a zero o divergono

$$a_n = \frac{e^{n+1}}{n!} \qquad a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad a_n = \frac{n^{n/2}}{n!} \qquad a_n = \frac{n^n}{(2n)!} \qquad a_n = \frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} \qquad a_n = \frac{(2n)^n}{(2n)!}$$