Argomento 3bis

Soluzioni degli esercizi

SUGGERIMENTI

ESERCIZIO 3bis.1 In tutti questi limiti si ha $a_n = \left(\dfrac{P_n}{Q_n}\right)^{c_n}$, ove

- il polinomio P_n al numeratore ha lo stesso grado e coefficiente di quello Q_n al denominatore: quindi $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{Q_n} = 1$
- l'esponente c_n tende a un ∞:

quindi si è di fronte a una forma di indecisione $[1^\infty]$, risolubile usando le conseguenze del limite di Nepero. Infatti:

- $\dfrac{P_n}{Q_n} = 1 + \dfrac{P_n - Q_n}{Q_n}$
- la successione di termine generale $b_n = \dfrac{P_n - Q_n}{Q_n}$ tende a 0, poiché $P_n - Q_n$ ha grado minore di Q_n.

Si ha dunque

$$a_n = \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{c_n} = (1 + b_n)^{c_n} = (1 + b_n)^{\frac{1}{b_n} \cdot b_n \cdot c_n} = \left[(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{b_n \cdot c_n}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{b_n \cdot c_n} \overset{(2)}{=} e^{\lim b_n \cdot c_n}.$$

Dunque il limite si ottiene sempre elevando e a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_n - Q_n}{Q_n} \cdot c_n$.

ESERCIZIO 3bis.2 Evidenziare a numeratore e denominatore gli addendi che vanno a infinito ed individuare tra essi l'infinito di ordine superiore.

ESERCIZIO 3bis.3 Due di questi esercizi impongono prima un confronto di infiniti. In ogni caso, se si scopre che:

- la successione base della potenza si può scrivere come $\{(1 + b_n)\}$ (ove $\{b_n\}$ tende a 0) e quindi ha limite 1,
- la successione $\{c_n\}$ esponente della potenza diverge,

si applica il limite di Nepero nella forma:

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{c_n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{b_n\cdot c_n}\overset{(2)}{=}e^{\lim b_n\cdot c_n}$$

ed, eventualmente si esegue un nuovo confronto di infiniti.

ESERCIZIO 3bis.4 Procedere come nell'esercizio 3. È opportuno ricordare che, in virtù delle proprietà dei logaritmi, per tutti i numeri reali positivi a (e per tutti i numeri reali b, se n è "abbastanza" grande) risulta

$$\ln\left(an^t+b\right)=\ln an^t\left(1+\tfrac{b}{an^t}\right)=\ln a+t\ln n+\ln\left(1+\tfrac{b}{an^t}\right).$$

Questa scomposizione è <u>utile quando t è positivo</u>, poiché in tal caso $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{b}{an^t}\right)=0$ e quindi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(an^t+b\right)}{t\ln n}=1$; ciò mette in evidenza che

se $t>0$ e $n\to\infty$ la successione $\{\ln\left(an^t+b\right)\}$ va a $+\infty$ come $\{t\ln n\}$.

ESERCIZIO 3bis.5 Controllare, operando opportuni raccoglimenti, se la base tende a 1. In caso affermativo usare la strategia vista per **ESERCIZIO 3bis.3**, altrimenti ricondursi ai limiti delle successioni (con base >1 o <1).

ESERCIZIO 3bis.6 Nel caso di differenze di logaritmi ricordare le formule sui logaritmi. Nel caso di differenze del tipo $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ oppure $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ conviene ricordare le formule di scomposizione della differenza di due quadrati o di due cubi:

$$x^2-y^2=(x-y)\,(x+y)\qquad\qquad x^3-y^3=(x-y)\,(x^2+xy+y^2)$$

e quindi $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ e $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}}$. In entrambe le situazioni si riconduce la forma di indecisione $[\infty-\infty]$ alla $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, cioè a un confronto di infiniti.

ESERCIZIO 3bis.7 Se si presenta la forma di indecisione ricondursi ai limiti notevoli dipendenti dal limite di Nepero o agli altri confronti di infinitesimi (o infiniti), cioè si passi dalla forma di indecisione $[0\cdot\infty]$ alla $\left[\frac{0}{0}\right]$ o alla $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

ESERCIZIO 3bis.8 Se si presenta la forma di indecisione, ricordare che $b_n^{c_n}=e^{c_n\ln b_n}$ e ricondursi alla forma di indecisione $[0\cdot\infty]$. Per calcolare il limite di $\left\{(n!)^{1/n}\right\}$, applicare la seguente formula (di De Moivre-Stirling):
$\ln(n!)=n(\ln n)-n+\frac{1}{2}\ln n+\ln\sqrt{2\pi}+k_n$ ove k_n è un numero reale dipendente da n tale che $0<k_n<\frac{1}{12n}$.
(Ricordare che $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$)

ESERCIZIO 3bis.9 Se si presenta la forma di indecisione, ricordare che $b_n^{c_n}=e^{c_n\ln b_n}$ e ricondursi alla forma di indecisione $[0\cdot\infty]$.

SOLUZIONI

Sol. Ex. 3bis.1

$a_n = \left(\frac{n^2+n}{n^2-n}\right)^n \qquad b_n = \frac{2n}{n^2-n} \qquad c_n = n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{2n^2}{n^2-n}} = e^2$

$a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n}\right)^{3n} \qquad b_n = \frac{2n+2}{n^2-n} \qquad c_n = 3n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim 3\frac{2n^2+2n}{n^2-n}} = e^6$

$a_n = \left(\frac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{-n} \qquad b_n = \frac{2n+1}{n^2-n+1} \qquad c_n = -n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim -\frac{2n^2+n}{n^2-n+1}} = e^{-2}$

$a_n = \left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad b_n = \frac{-2n+1}{n^2+n+1} \qquad c_n = \frac{n}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{1}{2}\cdot\frac{-2n^2+n}{n^2+n+1}} = e^{-1}$

$a_n = \left(\frac{n^2-n+2}{n^2+n+1}\right)^{n^2} \qquad b_n = \frac{-2n+1}{n^2+n+1} \qquad c_n = n^2 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{-2n^3+n^2}{n^2+n+1}} = e^{-\infty} = 0$

$a_n = \left(\frac{n^3-n+2}{n^3+n+1}\right)^{n} \qquad b_n = \frac{-2n+1}{n^3+n+1} \qquad c_n = n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{-2n^2+n}{n^3+n+1}} = e^0 = 1$

$a_n = \left(\frac{n^3+n-2}{n^3-n+2}\right)^{n^3} \qquad b_n = \frac{2n-4}{n^3-n+2} \qquad c_n = n^3 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{2n^4-4n^3}{n^3-n+2}} = e^{+\infty} = +\infty$

$a_n = \left(\frac{2n^3+n^2-2}{2n^3-n+2}\right)^{n} \qquad b_n = \frac{n^2+n-4}{2n^3-n+2} \qquad c_n = n \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim \frac{n^3+n^2-4n}{2n^3-n+2}} = e^{1/2}$

Sol. Ex. 3bis.2

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n+4}{n^{3/2}-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{-n^3\left(1-n^{-3/2}\right)} = \boxed{-2}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n-3}{n^{2/3}-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{3}{2n^3}\right)}{-n^2\left(1-n^{-4/3}\right)} = \lim_{n\to\infty} -2n = \boxed{-\infty}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}+n^{1/6}}{n^{1/2}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/3}\left(1+n^{-1/6}\right)}{n^{1/2}\left(1-n^{-1/2}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{(1/3)-(1/2)} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/6} = \boxed{0}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+n^{-1}\right)}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} 8\frac{(n/2)^3}{e^{n/2}} \overset{(\mathbf{II})}{=} \boxed{0}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(0.5)^n-n}{(0.3)^n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}} = \boxed{-\infty}$: infatti $\{(0.5)^n\}$ e $\{(0.3)^n\}$ tendono a 0

- $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n-n}{3^n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(1-n\cdot 5^{-n}\right)}{3^n\left(1+\sqrt{n}\cdot 3^{-n}\right)} \overset{(\mathbf{II})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \boxed{+\infty}$ (base > 1)

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)^{-1}}{\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\frac{1}{n^2}}{(-\ln(n))^4\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)} \overset{(\bullet)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2}{(\ln n)^4} = -2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)^2 \overset{(\mathbf{I})}{=} \boxed{-\infty}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5+5(\ln n)^4}{\sqrt[10]{n}-20} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5\left(1+5(\ln n)^{-1}\right)}{n^{1/10}\left(1-20n^{-1/10}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^5}{n^{1/10}} \overset{(\mathbf{I})}{=} \boxed{0}$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n-(\ln n)(\cos n)}{(\ln n)^2-n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}(\cos n)\right)}{-n^{1/2}\left(1-\dfrac{(\ln n)^2}{n^{1/2}}\right)} = \lim_{n\to\infty} -n^{1/2} = \boxed{-\infty}$: infatti essendo

  $\displaystyle |\cos n| \le 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}(\cos n) \overset{(\mathbf{I})}{=} 0$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n-3^{-n}}{\ln(1+3^n)+n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n3^n}\right)}{\ln\left[3^n\left(1+3^{-n}\right)\right]+n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln 3^n+\ln\left(1+3^{-n}\right)+n^{2/3}} =$

  $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\ln 3+n^{2/3}} = \boxed{\log_3 e}$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n+\log_{1/2} n+1}{\ln\left(n^{1/2}\right)+(\ln n)^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n+\left(\log_{1/2} e\right)\ln n+1}{\frac{1}{2}\ln n+(\ln n)^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\log_{1/2} e\right)\ln n+1}{\frac{1}{2}\ln n\left(1+2(\ln n)^{-1/2}\right)} = \boxed{2\left(1-\log_2 e\right)}$

Sol. Ex. 3bis.3 Evidenziamo che la successione base della potenza si può scrivere come $\{(1+b_n)\}$: si verifichi - applicando eventualmente i limiti notevoli - che $\{b_n\}$ tende a 0.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\ln n}{n} \overset{(\mathbf{I})}{=} 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

$$a_n = \left(1+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \overset{(\mathbf{3})}{=} \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}}$$

$$a_n = \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{\ln n}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{-n}{\ln n} \overset{(\mathbf{I})}{=} -\infty \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$a_n = \left(\frac{n^2+\ln n}{n^2+1}\right)^n = \left(1+\frac{\ln n-1}{n^2+1}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\ln n-1}{n^2+1}\cdot n \overset{(\mathbf{I})}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{n\ln n}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

$$a_n = \left(1+ne^{-n}\right)^n = \left(1+\frac{n}{e^n}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n^2}{e^n} \overset{(\mathbf{II})}{=} 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Sol. Ex. 3bis.4 Evidenziamo che la successione base della potenza si può scrivere come $\{(1+b_n)\}$: si verifichi - applicando eventualmente i limiti notevoli - che $\{b_n\}$ tende a 0.

- $\displaystyle a_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \left(\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n = \left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\cdot\ln n} \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

- $a_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n} = \left(\dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{n\ln n} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\cdot n\ln n \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e}$$

- $a_n = \left(\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2)}\right)^{n\ln n} = \left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2\ln n}\right)^{n\ln n} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2\ln n}\cdot n\ln n \overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2n\cdot\frac{1}{n^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

- $a_n = \left(\dfrac{\ln(2n+1)}{\ln n}\right)^{\ln n} = \left(\dfrac{\ln 2 + \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\ln n}\right)^{\ln n} = \left(1 + \dfrac{\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\ln n}\right)^{\ln n} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\ln n}\cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln 2 + \ln\left(1+\tfrac{1}{2n}\right) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$$

Sol. Ex. 3bis.5

- $a_n = \left(\sqrt[3]{\dfrac{2n-1}{2n+2}}\right)^n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^{n/3} = \left(1 + \dfrac{-3}{2n+2}\right)^{n/3}$:

  la successione presenta la forma di indecisione $[1^\infty]$ e, procedendo come in **Sol. Ex. 4bis.3**,

  $$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{-3}{2n+2}\cdot\frac{n}{3} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1/2}}$$

- $a_n = \left(\dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n+1}}\right)^n = \left(\dfrac{2\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\cdot\dfrac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}\right)^n$: la base tende a $\sqrt{2}$ e

  quindi non si ha indecisione: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{+\infty} = +\infty}$

- $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n/2} \Rightarrow$ forma di indecisione $[1^\infty]$: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e^{1/2}}$

- $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^n =$

  $$= \left(1 + \frac{1}{(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^n\text{: forma di indecisione } [1^\infty];$$

  $$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)\cdot n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n}\,(2\sqrt{n})} - \frac{n}{\sqrt{n}}\right) = -\infty \Rightarrow$$
  $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\infty} = 0}$

Sol. Ex. 3bis.6

- $\lim_{n\to\infty} \ln(3n^3-2n) - \ln(n^3+1) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n^3-2n}{n^3+1} = \boxed{\ln 3}$.

- $\lim_{n\to\infty} \ln(3n^2-n) - \ln(3n^2+1) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n^2-n}{3n^2+1} = \ln 1 = \boxed{0}$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n-1} = [\infty-\infty] = \boxed{+\infty}$ poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}\left(1-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2-n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}$: più velocemente, la prima radice si comporta come $\sqrt{n^2}$, la seconda come $\sqrt{n}$ e $\sqrt{n^2}$ è infinito di ordine superiore a $\sqrt{n}$ e quindi il suo comportamento prevale.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n} - \sqrt{2n^2-1} = [\infty-\infty] = \boxed{-\infty}$ poiché $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(1-\sqrt{2}\sqrt{\frac{n^2-0.5}{n^2-n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{2}\right) = -\infty$: più semplicemente si può dire che, per $n\to\infty$, la prima radice si comporta come n, la seconda come $\sqrt{2}n$ e quindi è come calcolare $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{2}\right)$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{\sqrt{n^2-1}} - n = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-1}{\sqrt{n^2-1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\left(n-\sqrt{n^2-1}-1\right) =$

  $$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}-1\right) = \boxed{-1}\text{, ove si è tenuto conto che } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n}{\sqrt{n^2+n}} - 2n = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n-3}{\sqrt{n^2+n}}-2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\left(2\cdot\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)-3\right) =$

  $$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n}{\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}-3\right) = \boxed{-4}\text{, ove si è tenuto conto che } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3+3n^2} - \sqrt[3]{2n^3-n+1} = [\infty-\infty] =$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3+3n^2)-(2n^3-n+1)}{(2n^3+3n^2)^{2/3}+\left[(2n^3+3n^2)(2n^3-n+1)\right]^{1/3}+(2n^3-n+1)^{2/3}} =$$

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-1}{2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2} = \frac{3}{3\cdot 2^{2/3}} = \boxed{2^{-2/3}}.$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3+n^2+1} + \sqrt[3]{3n-2n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{2n^3-3n} = [\infty-\infty] =$ come sopra

  $$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2+2^{2/3}n^2} = \boxed{\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}}.$$

Sol. Ex. 3bis.7

- $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) = [0\cdot\infty] \overset{(3)}{=} \boxed{3}$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \boxed{0}$: prodotto di successioni che tendono a 0.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\ln \dfrac{n^2+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \ln n = \boxed{+\infty}$: prodotto di successioni che tendono a ∞.

- $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\ln \dfrac{n+4}{n^{3/2}-1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(n^{-1/2}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^2 \ln n = \boxed{-\infty}$: prodotto di successioni che tendono a ∞.

- $\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(\dfrac{3n^2-n+1}{3n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1+\dfrac{2-n}{3n^2-1}\right) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{2-n}{3n^2-1}\right)\cdot \frac{\ln\left(1+\dfrac{2-n}{3n^2-1}\right)}{\dfrac{2-n}{3n^2-1}} \overset{(\mathbf{3})}{=} \boxed{-\infty}.$$

- $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\dfrac{1-n-3n^2}{1+2n-3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\dfrac{-3n}{1+2n-3n^2}\right) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{3n}{3n^2-2n-1}\right)\cdot \frac{\ln\left(1+\dfrac{3n}{3n^2-2n-1}\right)}{\dfrac{3n}{3n^2-2n-1}} \overset{(\mathbf{3})}{=} \boxed{1}.$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(n^{-1/2}\right)-1}{n^{-1/2}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(n^{-1/2}\right)-1}{\left(n^{-1/2}\right)^2}\cdot n^{-1/2} \overset{(\bullet)}{=} \boxed{0}$.

Sol. Ex. 3bis.8

- $\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(3n^2\right)\right)^{1/\ln 2n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln\left(\ln\left(3n^2\right)\right)}\right)^{1/\ln 2n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\ln\left(3n^2\right)\right)/\ln 2n} = \boxed{1}$, poiché $\dfrac{\ln\left(\ln\left(3n^2\right)\right)}{\ln 2n} = \dfrac{\ln\left(\ln 3 + 2\ln n\right)}{\ln 2+\ln n}$ e quindi, per (**I**), l'esponente tende a 0.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(5e^n\right)\right)^{-1/\ln n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln(\ln(5e^n))}\right)^{-1/\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\ln(\ln 5e^n)/\ln n} = \boxed{e^{-1}}$, poiché $\dfrac{-\ln\left(\ln 5e^n\right)}{\ln n} = -\dfrac{\ln\left(\ln 5 + n\right)}{\ln n}$ e quindi l'esponente tende a -1.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{1/\ln n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)^{1/\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)/\ln n} = \boxed{e^{1/2}}$, poiché $\dfrac{\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\ln n} = \dfrac{\ln\sqrt{n}+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\ln n} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln n+\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\ln n}$ e quindi l'esponente tende a $\frac{1}{2}$.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\ln n} = \lim_{n\to\infty} (n-1)^{(\ln n)/n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty} e^{[\ln(n-1)](\ln n)/n} = \boxed{1}$, poiché $\dfrac{\ln(n-1)\ln n}{n} = \dfrac{\left(\ln n+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\ln n}{n} = \dfrac{(\ln n)^2+n\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\ln n}{n}}{n}$ e quindi, per (**I**), l'esponente tende a 0. Più velocemente, per $n\to\infty$, $\ln(n-1)$ si comporta come $\ln n$ e quindi come esponente si può considerare $\dfrac{(\ln n)^2}{n}$.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n-1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} (n-1)^{\sqrt{n}/n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty} e^{[\ln(n-1)]/\sqrt{n}} = \boxed{1}$, come sopra.

- $\lim_{n\to\infty} (10n)^{1/n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty} e^{(\ln 10n)/n} = \boxed{1}$, come sopra.

- $\lim_{n\to\infty} (e^n - 1)^{1/n} = [\infty^0] = \lim_{n\to\infty} e^{[\ln(e^n-1)]/n} = \boxed{e}$, poiché $\dfrac{\ln(e^n-1)}{n} = \dfrac{\ln e^n(1-e^{-n})}{n} = \dfrac{n+\ln(1-e^{-n})}{n}$ tende a 1.

- $a_n = (n!)^{1/n} = e^{[\ln(n!)]/n} = e^{(\ln n)-1+[(\ln n)/2n]+\left(\ln\sqrt{2\pi}/n\right)+(k_n/n)}$ ove k_n è un numero reale dipendente da n tale che $0 < k_n < \frac{1}{12n}$. Quindi $a_n = e^{(\ln n)-1}e^{[(\ln n)/2n]+\left[\left(\ln\sqrt{2\pi}\right)/n\right]+(k_n/n)} = \dfrac{n}{e} \cdot e^{c_n}$: il secondo fattore tende a 1 (poiché l'esponente $c_n = \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln\sqrt{2\pi}}{n} + \frac{k_n}{n}$ tende a 0) e quindi $\boxed{\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = +\infty}$.

Sol. Ex. 3bis.9

- $\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n^2} = [0^0] = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln\ln(1+1/n)}\right)^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{[\ln\ln(1+1/n)]/n^2} = \boxed{1}$, poiché l'esponente può essere riscritto $\dfrac{\ln\frac{n\ln(1+1/n)}{n}}{n^2} = \dfrac{-\ln n + \ln\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{n^2}$ e quindi, per (**3**), per $n \to \infty$ si comporta come $\dfrac{-\ln n}{n^2}$, cioè tende a 0.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{e^{-n}+1}-1\right)^{1/n} = [0^0] = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{(e^{-n}+1)^{1/2}-1}{e^{-n}} \cdot e^{-n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{(e^{-n}+1)^{1/2}-1}{e^{-n}}\right)^{1/n} \cdot e^{-1} =$

  $\overset{(5)}{=} e^{-1} \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n} = \boxed{e^{-1}}$.

- $\lim_{n\to\infty} \left(3^{1/n}-1\right)^{1/\ln n} = [0^0] = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\left(3^{1/n}-1\right)n}{n}\right)^{1/\ln n} \overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln 3}{n}\right)^{1/\ln n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(\ln 3)^{1/\ln n}}{n^{1/\ln n}} =$

  $= \boxed{e^{-1}}$, poiché $n^{1/\ln n} = e^{\ln n/\ln n} = e$.

- $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{3/\sqrt{n}} = [0^0] = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln\sin(1/n)}\right)^{3/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{[3\ln\sin(1/n)]/\sqrt{n}} = \boxed{1}$, poiché l'esponente può essere riscritto $3\dfrac{\ln\frac{n\sin(1/n)}{n}}{\sqrt{n}} = 3\dfrac{-\ln n + \ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ e quindi, per (•), per $n \to \infty$ si comporta come $\dfrac{-\ln n}{\sqrt{n}}$, cioè tende a 0.

Sol. Ex. 3bis.10

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{(n+1)+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{e^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{e}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{n+1}}{n!} = 0}$.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{(n+1)}\cdot\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e>1\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{(n+1)/2}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^{n/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{1/2}}{(n+1)}\cdot\dfrac{(n+1)^{n/2}}{n^{n/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^{1/2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n/2}=0<1$

  $\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n/2}}{n!}=0}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{(2(n+1))!}\cdot\dfrac{(2n)!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2(n+1)(2n+1)}\cdot\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(2n+1)}\cdot\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=0<1$

  $\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}=0}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)+1)^{(n+1)}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)+1)^{(n+1)}}{2(n+1)(2n+3)(n+1)^n}=$

  $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\cdot\dfrac{n+2}{2(n+1)(2n+3)}=0<1\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n}{(2n+1)!}=0}.$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2(n+1))^{(n+1)}}{(2(n+1))!}\cdot\dfrac{(2n)!}{(2n)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)(2(n+1))^n}{2(n+1)(2n+1)(2n)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(n+1)^n}{(2n+1)2^nn^n}=$

  $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{(2n+1)}=0<1\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n)!}=0}.$