Esercizi sulle Formule di Taylor

1. Scrivere le formule di MacLaurin arrestate al quart'ordine delle funzioni

   a) $\cos(2x)$ **b)** e^{-2x} **c)** $\ln(1-2x)$ **d)** $x\sin(2x)$

2. ($\star$) Scrivere la formula di MacLaurin arrestata al quart'ordine della funzione $x\sin(2x-1)$.

3. Scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 4 della funzione $(1+t)^{1/2}$.
   Si utilizzi tale formula per ricavare le formule di MacLaurin arrestate al quarto ordine delle funzioni

   a) $\sqrt{1-4x}$ **b)** $\sqrt{1+4x}$ **c)** $\sqrt{1+2x}$ **d)** $\sqrt{1-2x}$

4. Scrivere le formule di MacLaurin arrestate al sesto ordine delle funzioni

   a) e^{x^2} **b)** e^{-x^2} **c)** $\tan\left(\frac{x^2}{2}\right)$ **d)** $\arctan(2x^2)$

5. Scrivere le formule di MacLaurin arrestate al terz'ordine della funzione e^{x-x^2}

   (a) utilizzando la definizione

   (b) ($\star$) vedendo e^{x-x^2} come prodotto di e^x e e^{-x^2} e utilizzando le formule precedentemente calcolate (a quale ordine bisogna arrestare il polinomio di MacLaurin di e^{-x^2} per essere sicuri di non trascurare infinitesimi significativi?)

   (c) ($\star$) usando la formula di MacLaurin di e^t con $t = x - x^2$ (quali termini si possono trascurare?)

6. ($\star$) È vero che, per x che tende a 0, la funzione $\ln(1-x+x^2)+x-x^2$ è $o(x^2)$? Motivare l'affermazione.

7. ($\star$) Si può calcolare la formula di MacLaurin arrestata al second'ordine di $e^{\sqrt{x}}$? Motivare l'affermazione.

8. Calcolare i seguenti limiti, prima utilizzando le formule di MacLaurin opportunamente arrestate e successivamente usando il teorema di de l'Hospital

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x\cos x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \arctan x}{x^3}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{x^2}$

9. ($\star$) Verificare che le seguenti funzioni sono continue in $x=0$ e stabilire se sono ivi anche derivabili:

   a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)}{\sin x - x\cos x} & \text{se } x\neq 0\\ -4 & \text{se } x=0\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2}{\arctan x - x\cos x} & \text{se } x\neq 0\\ 16 & \text{se } x=0\end{cases}$

   c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)-2\arctan x}{1+\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}} & \text{se } x\neq 0\\ 4 & \text{se } x=0\end{cases}$ **d)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(2x)-\arctan x}{e^x-2+\sqrt{1-2x}} & \text{se } x\neq 0\\ 5 & \text{se } x=0\end{cases}$