Soluzioni degli esercizi sulle Formule di Taylor

Formule di MacLaurin più usate (h, n numeri interi non negativi; a numero reale):

$$\boxed{\begin{array}{l}
e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + ... + \dfrac{t^n}{n!} + o(t^n) \\
\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\,\dfrac{t^n}{n} + o(t^n) \\
\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{3!} + ... + (-1)^h\,\dfrac{t^{2h+1}}{(2h+1)!} + o\big(t^{2h+1}\big) \\
\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + \ ...\ + (-1)^h\,\dfrac{t^{2h}}{(2h)!} + o\big(t^{2h}\big) \\
\tan(t) = t + \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{2t^5}{15} + \dfrac{17t^7}{315} + o(t^7)\ ...\ \text{ecc.} \\
\arctan(t) = t - \dfrac{t^3}{3} + ... + (-1)^h\,\dfrac{t^{2h+1}}{(2h+1)} + o\big(t^{2h+1}\big) \\
(1+t)^a = 1 + at + \dfrac{a\,(a-1)}{2!}\,t^2 + \dfrac{a\,(a-1)\,(a-2)}{3!}\,t^3 + ... + \dfrac{a\,(a-1)\cdot ... \cdot(a-n+1)}{n!}\,t^n + o(t^n)
\end{array}}$$

1. Per trovare le formule di MacLaurin arrestate al quart'ordine di ogni funzione proposta (che è una funzione composta di una funzione $f(t)$ di cui si conosce la formula di MacLaurin e di un monomio $g(x)$ di primo grado in x, con l'eccezione dell'ultima che è anche moltiplicata per x), nei primi tre casi scriviamo le formule di MacLaurin arrestate al quart'ordine della funzione $f(t)$ e poi sostituiamo $t = g(x)$, mentre nell'ultimo caso scriviamo le formule di MacLaurin arrestate al terz'ordine [1] della funzione $f(t)$, poi sostituiamo $t = g(x)$ e infine moltiplichiamo per x.

   a) $\boxed{\cos(2x)}$

   $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + o(t^4)$ e quindi [2] $\cos(2x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

   b) $\boxed{e^{-2x}}$

   $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^4}{4!} + o(t^4)$ e quindi

   $e^{-2x} = 1 + (-2x) + \dfrac{(-2x)^2}{2!} + \dfrac{(-2x)^3}{3!} + \dfrac{(-2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

   c) $\boxed{\ln(1-2x)}$

   $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + o(t^4)$ e quindi

   $\ln(1-2x) = (-2x) - \dfrac{(-2x)^2}{2} + \dfrac{(-2x)^3}{3} - \dfrac{(-2x)^4}{4} + o(x^4) = -2x - 2x^2 - \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$

   d) $\boxed{x\sin(2x)}$

   $\sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ e quindi $\sin(2x) = (2x) - \dfrac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ e [3]

   $x\sin(2x) = 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^4 + o(x^4)$.

---

[1] Si noti che non è possibile arrestare al quart'ordine la formula di MacLaurin di $\sin t$ in quanto la derivata quarta in $t = 0$ è nulla.

[2] Attenzione: $o\Big((2x)^4\Big) = o\big(x^4\big)$, poiché con il simbolo $o(\ )$ si intende solo mettere in evidenza a quale ordine di infinitesimo è superiore ciò che si trascura, senza tener conto della sua scrittura esplicita.

[3] Notare che moltiplicare per x la funzione ha l'effetto di moltiplicare per x ogni monomio del polinomio di Taylor e anche il resto $o\big(x^3\big)$ e che $x \cdot o\big(x^3\big) = o\big(x^4\big)$.

Verifichiamo almeno nei casi (**a**) e (**d**) che la procedura usata equivale al calcolo diretto della formula di MacLaurin. Per trovare il polinomio di MacLaurin di grado 4 di ogni funzione $F(x)$ in esame scriviamo le prime 4 derivate di $F(x)$, il loro valore per $x_0 = 0$ e il coefficiente che si ottiene dividendo ogni derivata k-esima per $k!$:

(**a**)	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	$F'''(x)$	$F^{(4)}(x)$
	$\cos(2x)$	$-2\sin(2x)$	$-4\cos(2x)$	$8\sin(2x)$	$16\cos(2x)$
in $x_0 = 0$	1	0	-4	0	16
diviso $k!$	1	0	-2	0	$2/3$

e quindi la formula di MacLaurin cercata è $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

(**d**)	$F(x)$	$F'(x)$	$F''(x)$	$F'''(x)$	$F^{(4)}(x)$
	$x\sin(2x)$	$\sin(2x)+$ $2x\cos(2x)$	$4\cos(2x)+$ $-4x\sin(2x)$	$-12\sin(2x)+$ $-8x\cos(2x)$	$-32\cos(2x)+$ $+16x\sin(2x)$
in $x_0 = 0$	0	0	4	0	-32
diviso $k!$	0	0	2	0	$-4/3$

e quindi la formula di MacLaurin cercata è $x\sin(2x) = 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^4 + o(x^4)$. È evidente specie in questo ultimo caso, come sia più veloce il metodo di sostituzione (applicabile dopo aver controllato che valgano anche per la funzione composta tutte le ipotesi del teorema di Taylor, e che il punto iniziale sia quello corretto).

2. Per scrivere la formula di MacLaurin arrestata al quart'ordine della funzione $x\sin(2x-1)$, NON si può utilizzare il metodo di sostituzione con le modalità viste sopra, poiché - pur essendo la funzione derivabile (con continuità) tutte le volte che si vuole - il punto iniziale $x_0 = 0$ per la funzione composta $\sin(2x-1)$ corrisponde al punto iniziale $t_0 = -1$ per la funzione $f(t) = \sin(t)$ e quindi non si può usare la formula di MacLaurin di $\sin(t)$ (valida solo se il punto iniziale è $t_0 = 0$). Per evitare le complicazioni legate al calcolo di una tabella come la precedente si può operare in almeno due modi:

   I modo: osserviamo che $\sin(2x-1) = \sin(2x)\cos(1) - \cos(2x)\sin(1)$ e quindi (vedi esercizio **1**)

$$x\sin(2x-1) = x\cos(1)\left[2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right] - x\sin(1)\left[1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right] =$$
$$= -x\sin(1) + 2x^2\cos(1) + 2x^3\sin(1) - \frac{4}{3}x^4\cos(1) + o(x^4) - \frac{2}{3}x^5\sin(1) + o(x^5) \overset{(4)}{=}$$
$$= -x\sin(1) + 2x^2\cos(1) + 2x^3\sin(1) - \frac{4}{3}x^4\cos(1) + o(x^4)$$

   II modo: calcoliamo la formula di Taylor di $\sin(t)$ con punto iniziale $t_0 = -1$ arrestata al terz'ordine; poiché

	$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	$f'''(t)$
	$\sin(t)$	$\cos(t)$	$-\sin(t)$	$-\cos(t)$
in $t_0 = -1$	$-\sin(1)$	$\cos(1)$	$\sin(1)$	$-\cos(1)$
diviso $k!$	$-\sin(1)$	$\cos(1)$	$\frac{\sin(1)}{2}$	$-\frac{\cos(1)}{6}$

risulta $\sin(t) = -\sin(1) + \cos(1)\,(t+1) + \frac{\sin(1)}{2}\,(t+1)^2 - \frac{\cos(1)}{6}\,(t+1)^3 + o\big((t+1)^3\big)$

e quindi, sostituendo $t = 2x-1$,

$$\sin(2x-1) = -\sin(1) + \cos(1)\,(2x) + \tfrac{\sin(1)}{2}\,(2x)^2 - \tfrac{\cos(1)}{6}\,(2x)^3 + o\big((2x)^3\big) =$$
$$= -\sin(1) + 2x\cos(1) + 2x^2\sin(1) - \frac{4}{3}x^3\cos(1) + o(x^3)$$

da cui, moltiplicando per x, si ottiene la stessa formula ricavata nel I modo.

---

(4) Attenzione: $o(x^4)$ ingloba tutte le potenze con esponente maggiore di 4 e tutti i termini già raccolti nell' $o(x^5)$.

3. Per trovare il polinomio di MacLaurin del polinomio $(1+t)^{1/2}$ di grado 4, si può applicare l'ultima delle formule di MacLaurin elencate tra quelle di uso frequente, con $a = \frac{1}{2}$ ed $n = 4$:

$$(1+t)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\,t^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\,t^3+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\,t^4+o(t^4) =$$
$$= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\,t^2+\frac{1}{16}\,t^3-\frac{5}{128}\,t^4+o(t^4).$$

Stesso risultato si ottiene scrivendo le prime 4 derivate di $(1+t)^{1/2}$, il loro valore per $t_0 = 0$ e desumendo il coefficiente di ogni t^k (che si ottiene dividendo la derivata k-esima per $k!$):

	$f(t)$	$f'(t)$	$f''(t)$	$f'''(t)$	$f^{(4)}(t)$
	$(1+t)^{1/2}$	$\frac{1}{2}(1+t)^{-1/2}$	$-\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}$	$\frac{3}{8}(1+t)^{-5/2}$	$-\frac{15}{16}(1+t)^{-7/2}$
in $t_0 = 0$	1	$1/2$	$-1/4$	$3/8$	$-15/16$
diviso $k!$	1	$1/2$	$-1/8$	$3/(3!\cdot 8)$	$-15/(4!\cdot 16)$

a) Posto $t = -4x$, si ricava la formula di MacLaurin (con punto iniziale $x_0 = 0$) arrestata al quarto ordine di $\sqrt{1-4x} = 1-2x-2x^2-4x^3-10x^4+o(x^4)$
b) Posto $t = 4x$, si ricava la formula di MacLaurin (con punto iniziale $x_0 = 0$) arrestata al quarto ordine di $\sqrt{1+4x} = 1+2x-2x^2+4x^3-10x^4+o(x^4)$
c) Posto $t = -4x$, si ricava la formula di MacLaurin (con punto iniziale $x_0 = 0$) arrestata al quarto ordine di $\sqrt{1+2x} = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)$
d) Posto $t = -4x$, si ricava la formula di MacLaurin (con punto iniziale $x_0 = 0$) arrestata al quarto ordine di $\sqrt{1-2x} = 1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)$

4. Anche in questo esercizio ogni funzione in esame è composta di una funzione $f(t)$ di cui si conosce la formula di MacLaurin e di un monomio $g(x)$ (di secondo grado). Poiché in $x_0 = 0$ risulta $t_0 = g(0) = 0$, e $f(g(x))$ è una funzione che ammette derivate (continue) di ogni ordine, è possibile calcolare la formula di MacLaurin di $f(g(x))$ sostituendo $t = g(x)$ nella formula di MacLaurin di $f(t)$. In più, per avere una formula arrestata al sesto ordine di $f(g(x))$, basterà arrestare la formula di $f(t)$ al terz'ordine.

a) $\boxed{e^{x^2}}$

$e^t = 1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+o(t^3)$ e quindi

$$e^{x^2} = 1+(x^2)+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+o\Big((x^2)^3\Big) = 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+o(x^6)$$

b) $\boxed{e^{-x^2}}$

$e^t = 1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+o(t^3)$ e quindi

$$e^{-x^2} = 1+(-x^2)+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+o\Big((-x^2)^3\Big) = 1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)$$

c) $\boxed{\tan\left(\frac{x^2}{2}\right)}$

$\tan(t) = t+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$ e quindi $\tan\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \left(\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{3}+o\Big((x^2)^3\Big) = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^6}{24}+o(x^6)$

d) $\boxed{\arctan(2x^2)}$

$\arctan(t) = t-\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$ e quindi

$$\arctan(2x^2) = (2x^2)+\frac{(2x^2)^3}{3}+o\Big((x^2)^3\Big) = 2x^2+\frac{8}{3}x^6+o(x^6).$$

5. Dobbiamo scrivere le formule di MacLaurin arrestate al terz'ordine della funzione e^{x-x^2}

a) seguendo la definizione, la formula di MacLaurin si ottiene scrivendo le prime 3 derivate di e^{x-x^2}, il loro valore per $x_0=0$ e desumendo il coefficiente di ogni x^k (che si ottiene dividendo la derivata k-esima per $k!$):

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
	e^{x-x^2}	$(1-2x)\,e^{x-x^2}$	$\left[-2+(1-2x)^2\right]e^{x-x^2}$	$\left[-6\,(1-2x)+(1-2x)^3\right]e^{x-x^2}$
in $x_0=0$	1	1	-1	-5
diviso $k!$	1	1	$-1/2$	$-5/\,(3!)$

Quindi $e^{x-x^2}=1+x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3)$.

b) Osservando che $e^{x-x^2}=e^x\cdot e^{-x^2}$ e che $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ ed $e^{-x^2}=1-x^2+\dfrac{x^4}{2!}+o(x^4)$ (vedi esercizio 4) si ha

$$e^{x-x^2}=e^x\cdot e^{-x^2}=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]\left[1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)\right]=^{(5)}$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x^2\left[1+x+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\right]+\frac{x^4}{2!}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]+o(x^4)=$$

$$^{(6)}\ =1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x^2-x^3+o(x^3)=1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

Il fatto che nel penultimo passaggio si siano trascurati gli ultimi due addendi porterebbe a pensare che si possa arrestare il polinomio di MacLaurin di e^{-x^2} al secondo ordine. Ma approssimando $e^{-x^2}=1-x^2+o(x^2)$ non potremmo assicurare la correttezza del coefficiente del termine di terzo grado, visto che (lavorando come sopra) si arriva a una formula del tipo

$$e^{x-x^2}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x^2\left[1+\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\right]+o(x^2)=1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

c) Usando la formula di MacLaurin arrestata al terz'ordine di $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2!}+\dfrac{t^3}{3!}+o(t^3)$ e sostituendo $t=x-x^2$ si ha

$$e^{x-x^2}=1+(x-x^2)+\frac{(x-x^2)^2}{2!}+\frac{(x-x^2)^3}{3!}+o\Big((x-x^2)^3\Big).$$

Osserviamo che l'infinitesimo di ordine inferiore in $(x-x^2)^3$ è x^3 e quindi scrivere $o\Big((x-x^2)^3\Big)$ equivale a scrivere $o(x^3)$. Sono quindi significativi nella somma i termini aventi grado non superiore a 3 (gli altri si possono trascurare). Dunque:

$$e^{x-x^2}=1+x-x^2+\frac{x^2-2x^3}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

6. Per x che tende a 0, la funzione $\ln(1-x+x^2)+x-x^2$ NON è $o(x^2)$.
Infatti sostituendo $t=x-x^2$ nella formula di MacLaurin di $\ln(1+t)$ arrestata al second'ordine:
$\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$
si ha, ragionando come in (**5c**)

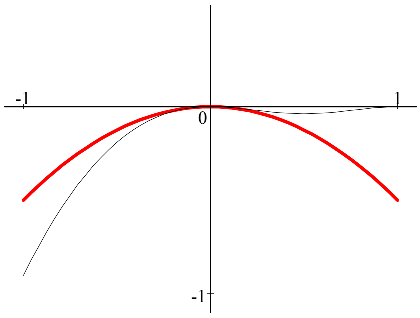
$$\ln(1-x+x^2)=-x+x^2-\frac{(-x+x^2)^2}{2}+o\Big((-x+x^2)^2\Big)=-x+x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)=-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

e quindi $\ln(1-x+x^2)+x-x^2=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, cioè va a zero come $-\dfrac{x^2}{2}$ (vedi figura 1).

---

5) Distribuendo rispetto alla seconda somma e osservando che $\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]o(x^4)=o(x^4)$

6) Attenzione: $o(x^3)$ ingloba tutte le potenze con esponente maggiore di 3 e tutti i termini già raccolti nell' $o(x^4)$.



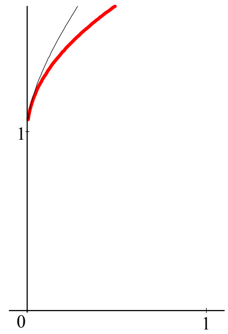


Fig.1: $\ln(1-x+x^2)+x-x^2$ (nero), $-\dfrac{x^2}{2}$ (rosso) Fig.2: $e^{\sqrt{x}}$ (nero), $1+\sqrt{x}$ (rosso)

7. NON si può calcolare la formula di MacLaurin arrestata al second'ordine di $e^{\sqrt{x}}$. Infatti la funzione in esame non è derivabile in $x_0 = 0$, non essendolo $\sqrt{x}$. Tuttavia continua a valere il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = 1$, cioè $e^{\sqrt{x}} \sim 1+\sqrt{x}$ o anche $e^{\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})$ (vedi figura 2).

8. **a)** Osserviamo che $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ e $x\cos(x) = x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)$. Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x - x\cos x} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left[x-\dfrac{x^3}{2!}+o(x^3)\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)} = 3.$$

Invece, usando il teorema di de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x - x\cos x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\cos x - \cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin x} \overset{\text{(limite notevole)}}{=} 3.$$

b) Osserviamo che $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ e $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-\left[x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Invece, usando il teorema di de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^3} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x} \overset{\text{(limite notevole)}}{=} -\frac{1}{6}+\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

c) Osserviamo che $e^{-x} = 1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ e $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. Dunque [7]:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{x^2} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)-1+\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{6} = 0.$$

Invece, usando il teorema di de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1+\ln(1+x)}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}+\frac{1}{1+x}}{2x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = 0.$$

[7] Questo esercizio insegna che, in presenza di somme di funzioni ciascuna da approssimare con un polinomio, può non essere sufficiente arrestare le formule di Taylor all'ordine indicato ad esempio da un monomio presente al denominatore (o al numeratore), in quanto i primi addendi possono annullarsi vicendevolmente.

9. **a)** Per provare che

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)}{\sin x - x\cos x} & \text{se } x\neq 0 \\ -4 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è continua in $x=0$ dobbiamo verificare che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)}{\sin x - x\cos x}=-4$.

Si è già visto nell'esercizio **8a** che

► $\sin x - x\cos x = \frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

Ricordiamo inoltre che (vedi esercizio **1c**): $\ln(1-2x)=-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)$,

mentre (vedi esercizio **3a**): $\sqrt{1-4x}=1-2x-2x^2-4x^3-10x^4+o(x^4)$. Visto però che i coefficienti di x^3 nelle due formule sono tali da non elidersi, per trovare una rappresentazione significativa della differenza delle due funzioni basterà arrestare le due formule al terz'ordine:

► $\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)=[1-2x-2x^2-4x^3+o(x^3)]-1-\left[-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right]=$

$$=-4x^3+o(x^3)-\left[-\tfrac{8}{3}x^3+o(x^3)\right]=-\tfrac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

Quindi risulta effettivamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)}{\sin x - x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=-4.$$

Per vedere se $f(x)$ è anche derivabile in $x=0$, cerchiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}+4\right)=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^4+o(x^4)}:$$

notiamo che usando le formule di Taylor arrestate allo stesso ordine che era stato utile per mostrare la continuità della funzione si manifesta una forma di indecisione [8]: dobbiamo migliorare l'approssimazione al numeratore e al denominatore! Usando le formule sopra riportate arrestate al quart'ordine si ottiene

► $\sqrt{1-4x}-1-\ln(1-2x)=1-2x-2x^2-4x^3-10x^4+o(x^4)-1-\left[-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)\right]=$

$$=-4x^3-10x^4+o(x^4)-\left[-\tfrac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)\right]=-\tfrac{4}{3}x^3-6x^4+o(x^4)$$

mentre al denominatore si ha [9]

► $\sin x - x\cos x=\left[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)\right]-\left[x-\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{4!}x^5+o(x^5)\right]=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)$

e quindi

$$f(x)-f(0)=\frac{-\frac{4}{3}x^3-6x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)}+4=\frac{-6x^4+o(x^4)-\frac{4}{30}x^5+o(x^5)}{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+o(x^5)}=\frac{-6x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$$

---

[8] Questa situazione si presenterà in ogni esercizio dello stesso tipo. Infatti per provare la continuità in x_0 di una funzione $f(x)$ basta mostrare che $f(x_0+h)-f(x_0)=o(h)$; invece per provarne la derivabilità si deve calcolare proprio il limite al tendere di h a 0 del rapporto $o(h)/h$ e quindi si deve precisare quanto "vale" l'$o(h)$.

[9] Questa ulteriore approssimazione del denominatore è in questo caso inutile, poiché al numeratore è presente una potenza di ordine inferiore a 5, che risulterà quindi prevalente. Vedremo nell'esercizio **9c**) e **9d**) come questa cautela sia talora indispensabile.

Dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-6x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-6x^4+o(x^4)}{\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)}=$$

$=-18$: ne segue che $f(x)$ è anche derivabile in $x=0$ e $f'(0)=-18$, come mostra la figura 3, nella quale in nero è rappresentata la funzione $f(x)$ e in rosso un segmento della retta tangente al suo grafico in $(0,-4)$.

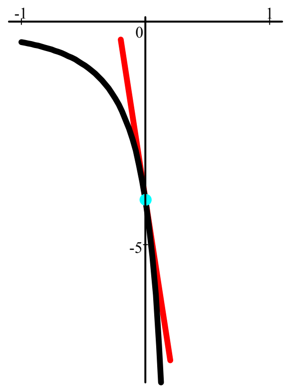


Figura 3

b) Per provare che

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2}{\arctan x - x\cos x} & \text{se } x\neq 0\\ 16 & \text{se } x=0\end{cases}$$

è continua in $x=0$ dobbiamo verificare che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2}{\arctan x - x\cos x}=16$.

Ricordiamo che (vedi formulario): $\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$ e $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$ per cui

► $\arctan x - x\cos x = x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)-x\left[1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right]=\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$

Ricordiamo inoltre che (vedi esercizio **1b**): $e^{-2x}=1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$,

mentre (vedi esercizio **3b**): $\sqrt{1+4x}=1+2x-2x^2+4x^3-10x^4+o(x^4)$. Visto però che i coefficienti di x^3 nelle due formule sono tali da non elidersi, per trovare una rappresentazione significativa della somma delle due funzioni basterà arrestare le due formule al terz'ordine:

► $\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2=\left[1+2x-2x^2+4x^3+o(x^3)\right]+\left[1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right]-2=$

$$=4x^3+o(x^3)+\left[-\tfrac{4}{3}x^3+o(x^3)\right]=\tfrac{8}{3}x^3+o(x^3)$$

Quindi risulta effettivamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2}{\arctan x - x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}=16.$$

Per vedere se $f(x)$ è anche derivabile in $x=0$, cerchiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}-16\right)=\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}:$$

notiamo che usando le formule di Taylor arrestate allo stesso ordine che era stato utile per mostrare la continuità della funzione si manifesta una forma di indecisione [10]: dobbiamo migliorare l'approssimazione al numeratore e al denominatore! Usando le formule sopra riportate arrestate al quart'ordine si ottiene

► $\sqrt{1+4x}+e^{-2x}-2=1+2x-2x^2+4x^3-10x^4+o(x^4)+\left[1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right]-2=$

$$=4x^3-10x^4+o(x^4)+\left[-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{2}{3}x^4+o(x^4)\right]=\tfrac{8}{3}x^3-\tfrac{28}{3}x^4+o(x^4)$$

[10] Vedi nota all'esercizio **9a**.

mentre al denominatore si ha [11]

▶ $\arctan x - x\cos x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o\left(x^5\right) - x\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o\left(x^4\right)\right] = \frac{1}{6}x^3 + \frac{19}{120}x^5 + o(x^5)$

e quindi

$$f(x) - f(0) = \frac{\frac{8}{3}x^3 - \frac{28}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + \frac{19}{120}x^5 + o(x^5)} - 16 = \frac{-\frac{28}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{38}{15}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{6}x^3 + \frac{19}{120}x^5 + o(x^5)} = \frac{-\frac{28}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$$

Dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{28}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{28}{3}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4 + o\left(x^4\right)} =$$

$= -56$: ne segue che $f(x)$ è anche derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = -56$, come mostra la figura 4, nella quale in nero è rappresentata la funzione $f(x)$ e in rosso un segmento della retta tangente al suo grafico in $(0, 16)$.

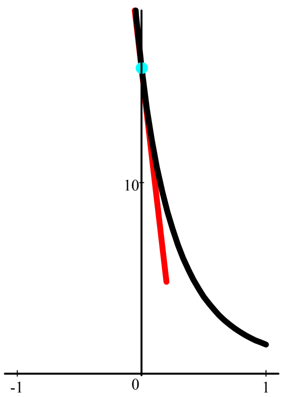


Figura 4

c) Per provare che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x) - 2\arctan x}{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$ dobbiamo verificare che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x) - 2\arctan x}{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}} = 4$.

Ricordiamo che (vedi formulario):

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$ e $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)$.

Ricordiamo inoltre che (vedi esercizio **1d**): $\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)$,

mentre (vedi esercizio **3c**):$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)$.

Ne segue, arrestando le due formule che rappresentano le funzioni al numeratore al terz'ordine (visto che i coefficienti di x^3 nelle due formule sono tali da non elidersi):

▶ $\sin(2x) - 2\arctan x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) - 2\left[x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right] = -\frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$

e, operando similmente al denominatore:

▶ $1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x} = 1 + \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right] - \left[1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right] =$

$$= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - \left(\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Quindi risulta effettivamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x) - 2\arctan x}{1 + \ln(1+x) - \sqrt{1+2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 4.$$

Per vedere se $f(x)$ è anche derivabile in $x = 0$, cerchiamo il limite del rapporto incrementale:

[11] Questa ulteriore approssimazione del denominatore è in questo caso inutile, poiché al numeratore è presente una potenza di ordine inferiore a 5, che risulterà quindi prevalente. Vedremo negli esercizi **9c**) e **9d**) come questa cautela sia talora indispensabile.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}-4\right)=\lim_{x\to0}\frac{o\left(x^3\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}:$$

notiamo che usando le formule di Taylor arrestate allo stesso ordine che era stato utile per mostrare la continuità della funzione si manifesta una forma di indecisione [(12)]: dobbiamo migliorare le approssimazioni al numeratore e al denominatore! Usando le formule sopra riportate arrestate al quint'ordine si ottiene

► $\sin(2x)-2\arctan x=2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o(x^5)-2\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\right]=-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$

Usando le formule sopra riportate arrestate al quart'ordine si ottiene

► $1+\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}=1+\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)\right]-\left[1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)\right]=$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)-\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)\right)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$$

e quindi [(13)]

$$f(x)-f(0)=\frac{-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)}{-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)}-4=\frac{-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)}=\frac{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$$

Dunque

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}=9:$$

ne segue che $f(x)$ è anche derivabile in $x=0$ e $f'(0)=9$, come mostra la figura 5, nella quale in nero è rappresentata la funzione $f(x)$ e in rosso un segmento della retta tangente al suo grafico in $(0,4)$.

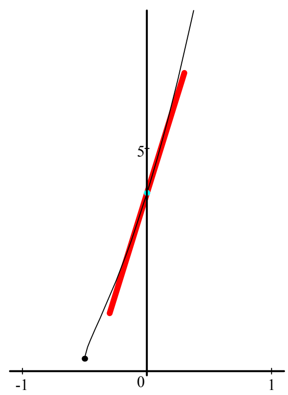


Figura 5

d) Per provare che

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(2x)-\arctan x}{e^x-2+\sqrt{1-2x}} & \text{se } x\neq0\\ 4 & \text{se } x=0\end{cases}$$

è continua in $x=0$ dobbiamo verificare che $\lim_{x\to0}\dfrac{x\cos(2x)-\arctan x}{e^x-2+\sqrt{1-2x}}=5$.

Ricordiamo che (vedi formulario):

$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)$ e $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$.

Inoltre (vedi esercizio **1a**): $x\cos(2x)=x\left[1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right]=x-2x^3+\frac{2}{3}x^5+o(x^5)$,

mentre (vedi esercizio **3d**): $\sqrt{1-2x}=1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{8}x^4+o(x^4)$.

Visto che i coefficienti di x^3 nelle formule sono tali da non elidersi, per trovare una rappresentazione significativa della differenza delle due funzioni al numeratore e della somma delle due al denominatore basterà arrestare le formule al terz'ordine:

► $x\cos(2x)-\arctan x=\left[x-2x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]=-\frac{5}{3}x^3+o\left(x^3\right)$

12) Vedi nota all'esercizio **9a**.

13) Notare l'importanza di aver dato un'approssimazione più "fine" del denominatore!

► $e^x - 2 + \sqrt{1-2x} = \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right] - 2 + \left[1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right] =$

$$= \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) + \left[-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right] = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Quindi risulta effettivamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(2x) - \arctan x}{e^x - 2 + \sqrt{1-2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{3}x^3 + o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)} = 5.$$

Per vedere se $f(x)$ è anche derivabile in $x = 0$, cerchiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-\frac{5}{3}x^3 + o\left(x^3\right)}{-\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)} - 5\right) = \lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^3\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)}:$$

notiamo che usando le formule di Taylor arrestate allo stesso ordine che era stato utile per mostrare la continuità della funzione si manifesta una forma di indecisione [14]: dobbiamo migliorare le approssimazioni al numeratore e al denominatore! Usando le formule sopra riportate arrestate al quint'ordine si ottiene

► $x\cos(2x) - \arctan x = \left[x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 + o\left(x^5\right)\right] - \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right] = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{15}x^5 + o(x^5)$

Usando le formule sopra riportate arrestate al quart'ordine si ottiene

► $e^x - 2 + \sqrt{1-2x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 2 + \left[1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)\right] =$

$$= \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) + \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)\right] = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^3)$$

e quindi [15]

$$f(x) - f(0) = \frac{-\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{15}x^5 + o(x^5)}{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)} - 5 = \frac{\frac{7}{15}x^5 + o(x^5) + \frac{35}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{35}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{35}{12}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{35}{4}x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o\left(x^4\right)} =$$

$= -\frac{35}{4}$: ne segue che $f(x)$ è anche derivabile in $x = 0$ e $f'(0) = -\frac{35}{4}$, come mostra la figura 6, nella quale in nero è rappresentata la funzione $f(x)$ e in rosso un segmento della retta tangente al suo grafico in $(0, 5)$.

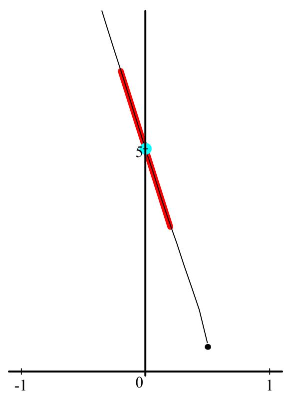


Figura 6

[14] Vedi nota all'esercizio **9a**.

[15] Notare l'importanza di aver dato un'approssimazione più "fine" del denominatore!