Alcuni esercizi di relatività speciale

1) Si svolgano i seguenti punti (i)(ii), assumendo di utilizzare unità di misura naturali in cui la velocità della luce è $c = 1$.
   (i) Determinare l'energia, la massa a riposo e la velocità di una particella il cui vettore energia-momento ha componenti $(4, 1, 1, 0)MeV$.
   (ii) In seguito alla collisione di due particelle con vettori energia-momento $(p_1^\mu) = (3, -1, 0, 0)MeV$ e $(p_2^\mu) = (2, 1, 1, 0)MeV$, risultante nell'annichilazione delle due particelle, vengono prodotte tre nuove particelle; due di queste hanno vettori energia-momento $(p_3^\mu) = (1, 1, 0, 0)MeV$ e $(p_4^\mu) = (1, -1/2, 0, 0)MeV$. Determinare l'energia, la massa a riposo e la velocità della terza particella prodotta.

2) Dimostrare che la reazione in cui due particelle di massa uguale si annichilano e producono un singolo fotone è proibita dalla legge di conservazione del quadri-momento.

3) Un fotone ed un protone collidono e si annichilano, generando un neutrone ed un pione. Si consideri il sistema di riferimento inerziale solidale con il protone prima della collisione: qual'è l'energia minima che il fotone deve avere in questo sistema di riferimento affinché possa verificarsi il processo descritto?

4) Dalla collisione di due protoni emerge, oltre ai protoni stessi, un pione. Si consideri il sistema di riferimento inerziale solidale con uno dei protoni prima della collisione: qual'è l'energia minima che deve avere l'altro protone in questo sistema di riferimento affinché possa verificarsi il processo descritto?

5) Una particella di massa a riposo m_1 collide con una seconda particella di massa a riposo m_2, inizialmente ferma. Dimostrare che, in seguito all'urto elastico delle particelle, il fattore di Lorentz della particella di massa m_1 non può essere maggiore di $(m_1^2 + m_2^2)/(2m_1m_2)$.

6) In un sistema di riferimento inerziale, due eventi si verificano simultaneamente ad una distanza di $3m$. In un secondo sistema di riferimento, anch'esso inerziale, uno dei due eventi accade $10^{-8}s$ dopo l'altro. Che distanza c'è tra i due eventi nel secondo sistema di riferimento? Si risolva questo problema nei due modi seguenti: si determini la trasformazione di Lorentz che collega i due sistemi di riferimento; si usi l'invarianza della distanza spaziotemporale.

7) Una navetta spaziale di lunghezza a riposo L si allontana dalla Terra in direzione radiale con velocità $0.8\,c$. Un segnale luminoso viene mandato verso la navetta; due osservatori inerziali, uno solidale con la Terra ed uno con la navetta, misurano il tempo trascorso a partire dal momento in cui questo segnale arriva alla coda della navetta. Quanto tempo impiega il segnale per raggiungere la testa della navetta secondo i due osservatori?

8) Allo Stanford Linear Collider, elettroni e positroni vengono accelerati ad una energia di $40\,GeV/c^2$ in un acceleratore lineare lungo circa $3.2km$. Quanto è lungo l'acceleratore nel sistema di riferimento solidale con le particelle del fascio?

9) Siano S ed S' due sistemi di riferimento inerziali in allontanamento reciproco a velocità v. Si consideri un muro (di massa infinita) solidale con S', con direzione normale parallela alla velocità v. Una particella di massa m urta elasticamente contro questo muro. Determinare gli angoli di incidenza e di riflessione nei due sistemi di riferimento S e S'; che relazione c'è tra questi angoli? Svolgere lo stesso esercizio nel caso in cui la particella in questione sia un fotone ($m = 0$) che viene riflesso dal muro solidale con S'; determinare, oltre agli angoli, la frequenza del fotone prima e dopo la riflessione.

10) Si consideri un modello teorico di spaziotempo ottenuto identificando due punti dello spaziotempo di Minkowski $(1+1)$-dimensionale. Più precisamente, sia $(x^\mu) = (ct, x)$ un sistema di coordinate inerziali sullo spaziotempo di Minkowski e si identifichino i punti di coordinate $(ct, 0)$ e (ct, L) $(L > 0)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si considerino ora due osservatori A, B, che si muovono rispetto al sistema di coordinate (x^μ) nei modi seguenti: A resta fermo nell'origine $x = 0$; B parte da $x = 0$ e si muove di moto rettilineo uniforme. Data l'identificazione $(ct, 0) \equiv (ct, L)$, B si muove su una circonferenza e ad un certo punto ripassa dall'origine $x = 0$, rincontrando l'osservatore A. Quali sono gli intervalli di tempo proprio misurati, rispettivamente, da A e B quando si rincontrano?

11) Si considerino tre sistemi di riferimento inerziali S, S' ed S'', con coordinate $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$, $(x^{\mu'}) = (ct', x', y', z')$ e $(x^{\mu''}) = (ct'', x'', y'', z'')$ tali che gli assi coordinati spaziali siano tutti paralleli. Il sistema S'' vede S e S' muoversi l'uno verso l'altro con la stessa velocità v in direzione $x \equiv x' \equiv x''$. Siano A e B due particelle solidali con S, con rispettive coordinate spaziali $(x_A, y_A, z_A) = (0, 0, 0)$ e $(x_B, y_B, z_B) = (\ell, 0, d)$ $(\ell, d > 0)$; altre due particelle C, D sono solidali con S' ed hanno coordinate spaziali $(x'_C, y'_C, z'_C) = (0', 0', 0')$ e $(x'_D, y'_D, z'_D) = (\ell, 0, d)$. Determinare l'ordine temporale degli eventi "A e C collidono" e "B e D collidono", rispetto ai tre sistemi S, S', S''.

12) Si considerino due aste di rispettive lunghezze a riposo L_1 ed L_2, con $L_1 > L_2$; queste aste si muovo entrambe lungo la retta individuata dalla loro direzione, con velocità relativa v. Secondo un osservatore inerziale S, le aste hanno la stessa lunghezza. Stabilire la velocità con cui questo osservatore si muove rispetto all'asta più lunga.

13) Due particelle si muovono nella stessa direzione lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale con rispettive velocità $0.8\,c$ e $0.9\,c$; la più veloce insegue la più lenta, e la distanza iniziale tra le due è $1m$. Quanti secondi passano prima che le due particelle collidano?

14) Un'asta di lunghezza a riposo $1m$ si muove a velocità $0.5c$ lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale; quanto impiega una particella che si muove con la stessa velocità in direzione opposta all'asta a passare da un estremo all'altro dell'asta stessa?

15) Due fotoni viaggiano lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale S, a distanza reciproca costante L. Dimostrare che in un secondo sistema di riferimento S', in moto relativo rispetto al primo con velocità v lungo l'asse x, la distanza relativa tra i due fotoni è $L\sqrt{(c+v)/(c-v)}$.

16) Si consideri un sistema di riferimento inerziale S con coordinate $(x^\mu) = (t, x, y, z)$; nel piano (t, x), si introduca un nuovo sistema di coordinate (ξ_+, ξ_-) definito dalle relazioni $\xi_+ := c\,t + x$, $\xi_- := c\,t - x$. Scrivere le seguenti trasformazioni di Lorentz rispetto alle coordinate ξ_+, ξ_-:
   (i) un boost con velocità v in direzione x;
   (ii) una rotazione di angolo θ nel piano (x, y);
   (iii) un boost con velocità v in direzione z.

17) Siano S ed S' due sistemi di riferimento inerziali con coordinate $(x^\mu) = (ct, x)$ e $(x^{\mu'}) = (ct', x')$. Si considerino ora tre eventi A, B, C tali che $t_A < t_B < t_C$ e $t'_C < t'_B < t'_A$. Stabilire se esiste un terzo sistema di riferimento inerziale S'', con coordinate $(x^{\mu''}) = (ct'', x'')$, tale che $t''_A < t''_C < t''_B$. Motivare la risposta con un diagramma spazio-tempo.

18) Si considerino due osservatori inerziali A e B. Un terzo osservatore inerziale vede verificarsi i seguenti eventi: A e B si trovano inizialmente nella stessa posizione; A resta fermo; B si allontana muovendosi di moto rettilineo uniforme a velocità $0.96\,c$; quando sono passati 7 anni secondo un orologio solidale con B, B inverte istantaneamente la direzione del moto e ritorna alla posizione di partenza muovendosi nuovamente di moto rettilineo uniforme, ma con velocità dimezzata rispetto al viaggio di andata. Rappresentare con un diagramma spazio-tempo i moti di A e B. Quando si rincontrano, qual'è la differenza tra gli intervalli di tempo misurati dai due?

19) In un laboratorio è presente un contenitore con due aperture che distano tra di loro $1m$. Si consideri un osservatore inerziale, solidale con questo contenitore. Un asta di lunghezza a riposo $2m$ si muove nella direzione da essa individuata; la sua velocità è tale che la lunghezza misurata dall'osservatore inerziale risulta essere solo $1m$. L'osservatore inerziale vede verificarsi i seguenti eventi: l'asta entra nel contenitore attraverso una delle due aperture; nel momento in cui l'estremo anteriore dell'asta raggiunge la seconda apertura, un meccanismo chiude istantaneamente entrambe le aperture (rinchiudendo l'asta per un attimo); le aperture vengono riaperte e l'asta fuoriesce dal contenitore, senza mai interrompere il moto rettilineo uniforme. Si descriva la corrispondente sequenza di eventi vista da un osservatore inerziale con l'asta, motivando la risposta con un diagramma spazio-tempo.

20) In un sistema di riferimento inerziale viene collocato un piano di massa infinita. Un'asta di lunghezza a riposo L è in moto rettilineo uniforme con velocità v nella direzione da essa individuata. Ad un cero istante, l'estremo anteriore dell'asta urta il muro e si ferma istantaneamente. Cosa succede all'estremo posteriore dell'asta? Tenendo presente che l'onda di deformazione si propaga necessariamente a velocità inferiore rispetto a quella della luce, determinare la lunghezza massima che l'asta può avere quando si sarà completamente fermata.

21) Sia S un sistema di riferimento inerziale, con coordinate $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$. Un'asta di lunghezza a riposo L si muove di moto rettilineo uniforme in direzione x a velocità v tale che $\gamma(v) = 3$, e in direzione y a velocità w; durante il moto l'asta resta parallela all'asse x. Il centro dell'asta passa per il centro di un foro lungo $L/2$, situato in un piano coincidente con l'asse $y = 0$. Descrivere come l'asta attraversa il foro, in sistema di riferimento solidale con l'asta.

22) In relatività speciale si dice che un corpo si muove di "moto uniformemente accelerato" se la sua quadri-accelerazione (a^μ) ha direzione spaziale costante e norma costante $a^\mu a_\mu = \alpha^2 \geqslant 0$. Svolgere i seguenti punti in questo caso.

   (i) Dimostrare che le componenti a^μ sono costanti nel sistema di riferimento inerziale solidale col corpo. Queste componenti possono essere interpretate come "accelerazione" in termini Galileiani?

   (ii) In un dato sistema di riferimento inerziale, si consideri un corpo che parte da fermo e che si muove di moto uniformemente accelerato con $\alpha = 10\,m/s^2$. Determinare la velocità del corpo dopo un intervallo di tempo t, nel sistema di riferimento iniziale; che distanza ha percorso in questo intervallo di tempo? Quanto tempo impiega a raggiungere una velocità pari a $0.999c$?

   (iii) Determinare l'intervallo di tempo proprio misurato dal corpo del punto ii), come funzione di t. Quanto vale il tempo proprio quando il corpo raggiunge la velocità di $0.999c$?

23) Un osservatore inerziale vede una particella muoversi lungo l'asse x, con velocità data dalla legge oraria (si considerino unità di misura naturali in cui $c = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a\,t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}$$

dove $a > 0$ è una costante. Si svolgano i seguenti punti:

   (i) stabilire se la velocità della particella può superare la velocità della luce;

   (ii) calcolare le componenti della quadri-velocità della particella;

   (iii) esprimere x e t come funzioni del tempo proprio lungo la traiettoria;

   (iv) determinare le componenti della quadri-forza che agiscono sulla particella.

24) Una particella si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale di moto uniformemente accelerato, nel senso che l'accelerazione misurata nel sistema di riferimento solidale con la particella è costante. Determinare x e t come funzioni del tempo proprio della particella, assumendo che per $t = 0$ la particella sia ferma in $x = x_0$. Tracciare la traiettoria della particella in un diagramma spazio-tempo.

25) Un elastico si spezza se viene allungato fino al doppio della sua lunghezza a riposo. Al tempo $t = 0$, tutti i punti dell'elastico sono fermi e vengono accelerati nella direzione individuata dall'estensione dell'elastico, con accelerazione propria costante a. Dimostrare che l'elastico si rompe al tempo $t = \sqrt{3}\, c/a$.

Riferimenti bibliografici

[1] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco (2004).

[2] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco (2003).

[3] W. Rindler, *Introduction to Special Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1982).

[4] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, Oxford (2006).

[5] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).