Appunti di Algebra Lineare per il Corso di Matematica del Continuo

Davide Fermi

Novembre 2014

Indice

0.1 Introduzione

Questi appunti sono scritti per la parte di Algebra Lineare relativa al corso di Istituzioni di Matematica del corso di laurea triennale in Informatica Musicale. Essi sono scritti con l'intenzione di fornire delle conoscenze basilari sull'argomento, quali alcune definizioni fondamentali ed alcuni semplici risultati, nonché alcuni esempi delle stesse.

La trattazione qui svolta non intende in alcun modo essere esaustiva. Per una analisi più completa di questi argomenti si rimanda a libri di testo quali [1], per lo studio dei vettori in $\mathbb{R}^n$, delle matrici e dei sistemi lineari, e [2], per una trattazione più astratta e formale degli argomenti di teoria.

0.2 Spazi Vettoriali

In questa sezione si introducono il concetto di spazio vettoriale e le varie nozioni ad esso associate. Questi concetti verranno prima trattati in maniera assiomatica e rigorosa, dando le definizioni basilari e alcuni semplici risultati; in seguito, si procederà alla discussione di alcuni degli esempi più rilevanti in matematica.

Definizione 0.2.1. Sia V un insieme munito delle due operazioni seguenti.

i. *Somma di vettori*
$$+ : V \times V \to V\,, \qquad (v, w) \mapsto v + w\,. \tag{1}$$

ii. *Prodotto per uno scalare*
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V\,, \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \equiv \alpha\, v\,. \tag{2}$$

La terna $(V, +, \cdot)$ è detta *spazio vettoriale* (*reale*) se le operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione per uno scalare soddisfano i seguenti assiomi.

a.1. Associatività della somma di vettori
$$(u + v) + w = u + (v + w)\,, \qquad \forall\, u, v, w \in V\,. \tag{3}$$

a.2. Commutatività della somma di vettori
$$v + w = w + v\,, \qquad \forall\, v, w \in V\,. \tag{4}$$

a.3. Elemento neutro per la somma di vettori
$$\exists\, o \in V \quad \text{tale che} \quad v + o = v\,, \qquad \forall\, v \in V \tag{5}$$
(con il simbolo o si indicherà sempre tale elemento, anche detto *vettore nullo*).

a.4. Elemento inverso per la somma di vettori
$$\forall\, v \in V \quad \exists\, (-v) \in V \quad \text{tale che} \quad v + (-v) = o \tag{6}$$
(l'elemento $-v$ sarà chiamato *opposto* di v).

a.5. Distributività della moltiplicazione per uno scalare rispetto alla somma di vettori
$$\alpha\,(u + v) = \alpha\, u + \alpha\, v\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, v, w \in V\,. \tag{7}$$

a.6. Distributività della moltiplicazione per uno scalare rispetto alla somma di scalari
$$(\alpha + \beta)\, v = \alpha\, v + \beta\, v\,, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V\,. \tag{8}$$

a.7. Compatibilità del prodotto per uno scalare
$$\alpha\,(\beta\, v) = (\alpha\, \beta)\, v\,, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall\, v \in V\,. \tag{9}$$

a.8. Elemento neutro per la moltiplicazione per uno scalare
$$\exists\, 1 \in \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad 1\, v = v\,, \quad \forall\, v \in V\,. \tag{10}$$

Gli elementi di V sono detti *vettori*.

Osservazione 0.2.1. Spesso nel seguito, con un piccolo abuso di linguaggio, si dirà che "V è uno spazio vettoriale", sottointendendo le operazioni di somma di vettori e prodotto per uno scalare ad esso associate, quando sarà chiara la loro definizione.

Lemma 0.2.1. Gli assiomi a.1- a.8 della Def. 0.2.1 permettono di dimostrare i seguenti risultati.

1) Siano $0 \in \mathbb{R}$ lo zero scalare e $o \in V$ il vettore nullo. Allora

$$0\,v = o\,, \quad \forall\, v \in V \qquad \text{e} \qquad \alpha\, o = o\,, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$

2) Il vettore nullo $o \in V$ è unico.

3) Per ogni $v \in V$ l'inverso $(-v) \in V$ è unico e soddisfa

$$(-v) = (-1)\, v \equiv -v\,. \tag{12}$$

0.2.1 Alcuni esempi di spazi vettoriali

Gli spazi $\mathbb{R}^n$

E' noto che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}\,(\equiv \mathbb{R}^1)$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con una retta (spazio 1-dimensionale), sulla quale si siano fissate una origine, una orientazione ed una unità di misura. Analogamente, gli insiemi prodotto $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ possono rispettivamente essere identificati con il piano euclideo Π (spazio 2-dimensionale) e con lo spazio euclideo Σ (spazio 3-dimensionale) .

Più in generale, fissato $n \in \mathbb{N}$, si consideri l'insieme prodotto

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}\,, \tag{13}$$

i cui elementi sono le n-uple ordinate

$$(x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1, \ldots, n\,. \tag{14}$$

Come nei casi $n = 1, 2, 3$ citati precedentemente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{R}^n$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con uno spazio n-dimensionale i cui punti, fissata una origine, sono identificati dalle *coordinate* $x_1, \ldots, x_n$.

Definizione 0.2.2. Si definiscono *vettori in* $\mathbb{R}^n$ le n-uple verticali

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \text{con } x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1, \ldots, n\,, \tag{15}$$

e, per ogni $i = 1, \ldots, n$, la coordinata x_i è detta *componente* i*-esima* del vettore.

Nel seguito i vettori saranno sempre indicati con delle lettere minuscole in grassetto (ad esempio $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$) e le relative coordinate con la stessa lettera non in grassetto (ad esempio $x_i, y_i, z_i, \ldots$).

Definizione 0.2.3. Sia $\mathbf{x}$ un vettore in $\mathbb{R}^n$ (si veda la (15)). Il *trasposto* di $\mathbf{x}$ è la n-upla orizzontale

$$\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n) . \tag{16}$$

Osservazione 0.2.2. Spesso, i vettori e i loro trasposti definiti in questi appunti sono rispettivamente denominati "vettori colonna" e "vettori riga".

Esempio 0.2.1. La seguente scrittura rappresenta un vettore in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{17}$$

la cui seconda componente è $x_2 = -2$. Il trasposto di $\mathbf{x}$ è

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Definizione 0.2.4. Due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ si dicono *uguali* (si scrive $\mathbf{x} = \mathbf{y}$) se le rispettive componenti sono uguali a una a una ([1])

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_i = y_i \,, \quad \forall\, i = 1, \dots, n . \tag{19}$$

Definizione 0.2.5. Si defiscono le seguenti operazioni sui vettori in $\mathbb{R}^n$.

i. *Somma di vettori* ([2])

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} , \tag{20}$$

definita in modo tale che le componenti del vettore somma $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ sono date dalla somma delle rispettive componenti dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$

$$z_i = x_i + y_i \,, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n . \tag{21}$$

ii. *Prodotto per uno scalare*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \qquad (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha\, \mathbf{x} , \tag{22}$$

definita in modo tale che le componenti del vettore risultante $\mathbf{z} = \alpha\, \mathbf{x}$ sono date dal prodotto delle singole componenti del vettore $\mathbf{x}$ per lo scalare α

$$z_i = \alpha\, x_i \,, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n . \tag{23}$$

Osservazione 0.2.3. Per i casi $n = 1, 2, 3$ è possibile dare una interpretazione geometrica più intuitiva della somma di vettori e della moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Ad esempio, la somma di due vettori può essere ottenuta per mezzo della regola del parallelogramma (o, equivalentemente, della regola punta-coda), mentre la moltiplicazione di un vettore per uno scalare corrisponde ad una dilatazione (o ad una contrazione) della lunghezza del vettore considerato. A tal proposito, si veda [2], pagg.13-15.

[1] Chiaramente, non ha senso parlare di una relazione di uguaglianza per vettori appartenenti a spazi diversi; ad esempio

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 , \; \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} .$$

[2] **N.B.**: La somma di vettori è definita solo per vettori nello stesso spazio $\mathbb{R}^n$. Non si possono sommare vettori appartenenti a spazi diversi (ad esempio non è definita l'operazione $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$).

Definizione 0.2.6. Il *vettore nullo* $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ è il vettore con tutte le componenti nulle

$$\mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{24}$$

Osservazione 0.2.4. Il vettore nullo $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$ non è da confondere con lo zero scalare $0\in\mathbb{R}$ ([3]).

Proposizione 0.2.1. Siano $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le operazioni definite, rispettivamente, nelle equazioni (20) (22); allora, la terna $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale. In particolare, si ha che:

- il *vettore nullo* è (si veda la definizione 0.2.6)

$$o \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n ; \tag{25}$$

- l'*opposto* di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ è il vettore $-\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definito, tramite l'operazione di prodotto per lo scalare $-1\in\mathbb{R}$, dalla relazione

$$-\mathbf{x} := (-1) \cdot \mathbf{x} . \tag{26}$$

Osservazione 0.2.5. In particolare, sono spazi vettoriali lo spazio banale $\mathbb{R}^0 \equiv \{\mathbf{0}\}$ e lo spazio $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$; in quest'ultimo caso inoltre la somma di vettori e il prodotto per uno scalare coincidono con le ordinarie operazioni di somma e prodotto definite in $\mathbb{R}$.

Esempio 0.2.2. Si considerino i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ definiti come

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} . \tag{27}$$

La somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) + 7 \\ 0 + 3 \\ 1 + (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} . \tag{28}$$

Il prodotto per uno scalare $6\,\mathbf{x}$ è

$$6\,\mathbf{x} = 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} . \tag{29}$$

La combinazione lineare ([4]) $3\,\mathbf{x} + a\,\mathbf{y}$ è

$$3\,\mathbf{x} + a\,\mathbf{y} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7a \\ 3a \\ -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a-6 \\ 3a \\ 3-4a \end{pmatrix} . \tag{30}$$

L'opposto di $\mathbf{x}$ è

$$-\mathbf{x} = (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{31}$$

[3] I due coincidono solo nel caso in cui sia $n=1$.

[4] Si veda la Definizione 0.2.8 nel seguito per la definizione formale di combinazione lineare.

Altri esempi di spazi vettoriali

Esempio 0.2.3. Nell'ambito della geometria euclidea (nel piano o nello spazio), si consideri l'insieme dei segmenti orientati, vale a dire, l'insieme delle porzioni di rette delimitate da due punti, dei quali uno è detto coda e uno è detto testa. In questo insieme si può considerare la relazione di equivalenza che "identifica" segmenti orientati che siano lati opposti di uno stesso parallelogramma; equivalentemente, due segmenti orientati si dicono equivalenti se possono essere sovrapposti per mezzo di traslazioni rigide (senza rotazioni). Si consideri l'insieme delle classi di equivalenza così ottenute

$$\mathcal{V} := \left\{ \vec{v} \,\middle|\, \begin{array}{c} \vec{v} = \text{classe di equivalenza di segmenti} \\ \text{di uguale lunghezza (modulo), direzione e verso} \end{array} \right\} ; \tag{32}$$

questo insieme può essere munito dell'operazione di somma $+ : (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$ definita dalla regola del triangolo (si veda la figura **??**) e dell'operazione di prodotto per uno scalare $\cdot :$ $(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$ definita come la dilatazione di $\vec{v}$ per un fattore α (si veda la figura **??**).
Si verifica facilmente che la terna $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ costituisce uno spazio vettoriale. In particolare, il vettore nullo è dato dalla classe di equivalenza di tutti i segmenti orientati di lunghezza nulla.

Esempio 0.2.4. Si consideri l'insieme dei polinomi (di grado qualsiasi) con coefficienti reali

$$\mathcal{P}[\mathbb{R}] := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \alpha_m x^m \;\mid\; \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\,,\; m \in \mathbb{N}\} . \tag{33}$$

Siano $+_\pi$ e $\cdot_\pi$, rispettivamente, le operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare definite nel modo descritto di seguito, tramite una azione sui coefficienti a grado fissato. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare e p, q una coppia di polinomi, rispettivamente di grado $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ ([5]),

$$p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m \,, \qquad q(x) := \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n \,; \tag{34}$$

il polinomio "somma" $p +_\pi q \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ (di grado n) e il polinomio "prodotto per α" $\alpha \cdot_\pi p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$ (di grado m), sono rispettivamente definiti come

$$(p +_\pi q)(x) := (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \ldots + (\alpha_m + \beta_m)x^m + \beta_{m+1} x^{m+1} + \ldots \beta_n x^n \,, \tag{35}$$

$$(\alpha \cdot_\pi p)(x) := (\alpha \cdot \alpha_0) + (\alpha \cdot \alpha_1)x + \ldots + (\alpha \cdot \alpha_m)x^m \,. \tag{36}$$

Si noti che a destra delle uguaglianze (35) (36) i simboli $+$ e $\cdot$ indicano rispettivamente le usuali operazioni di somma e di prodotto in $\mathbb{R}$.
Si verifica facilmente che la terna $(\mathcal{P}[\mathbb{R}], +_\pi, \cdot_\pi)$ è uno spazio vettoriale. In particolare, il vettore nullo è il polinomio

$$o(x) = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + \ldots 0\,x^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \,. \tag{37}$$

Esempio 0.2.5. Sia X un insieme e $(V, +_V, \cdot_V)$ uno spazio vettoriale (ad esempio $\mathbb{R}^n$). L'insieme $\mathfrak{F}(X, V)$ delle funzioni da X a V è uno spazio vettoriale se munito delle operazioni seguenti.

i. Somma puntuale

$$+_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F}(X,V) \times \mathfrak{F}(X,V) \to \mathfrak{F}(X,V)\,, \qquad (f, g) \;\mapsto\; f +_{\mathfrak{F}} g\,, \tag{38}$$

definita in modo tale che

$$(f +_{\mathfrak{F}} g)(x) = f(x) +_V g(x) \quad \text{in } V\,, \qquad \forall\, x \in X\,. \tag{39}$$

[5] La scelta $m < n$ è del tutto arbitraria e serve solo a fissare le idee.

ii. Prodotto per uno scalare

$$\cdot_{\mathfrak{F}} : \mathbb{R} \times \mathfrak{F}(X,V) \to \mathfrak{F}(X,V)\,, \qquad (\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot_{\mathfrak{F}} f\,, \tag{40}$$

definita in modo tale che

$$(\alpha \cdot_{\mathfrak{F}} f)(x) = \alpha \cdot_V f(x) \quad \text{in } V\,, \qquad \forall\, x \in X\,. \tag{41}$$

In particolare, l'elemento neutro per la somma puntuale (cioè per la somma di vettori) è la funzione identicamente nulla O che ad ogni $x \in X$ associa il vettore nullo $o \in V$

$$O : X \to V\,, \qquad x \mapsto O(x) = o\,. \tag{42}$$

0.2.2 Sottospazi vettoriali, combinazioni lineari e basi

Nel seguito si considera uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$, che per brevità sarà indicato solo con V.

Definizione 0.2.7. Sia $W \subset V$ un sottoinsieme di V. Si dice che W è un *sottospazio vettoriale* di V se soddisfa le proprietà seguenti.

i. W è chiuso rispetto alla operazione di somma in V

$$v + w \in W\,, \qquad \forall\, v, w \in W\;; \tag{43}$$

ii. W è chiuso rispetto alla operazione di moltiplicazione per uno scalare in V

$$\alpha\, v \in W\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, v \in W\;; \tag{44}$$

iii. Il vettore nullo di V appartiene a W

$$o \in W\,. \tag{45}$$

Osservazione 0.2.6. Il concetto di sottospazio vettoriale è l'analogo nella teoria degli spazi vettoriali della nozione di sottoinsieme nella teoria degli insiemi. In particolare, un sottospazio vettoriale è a sua volta uno spazio vettoriale.

Esempio 0.2.6. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ analizzato in precedenza. Il sottoinsieme $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ dei vettori con la prima componente nulla

$$W_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\} \tag{46}$$

è un sottospazio vettoriale. Infatti si verifica facilmente che i suoi elementi soddisfano le proprietà i,ii,iii della Definizione 0.2.7.

Esempio 0.2.7. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ fissato, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a m

$$\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}] := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n \;\mid\; \alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ n \leqslant m\}\,, \tag{47}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio $(\mathcal{P}[\mathbb{R}], +_\pi, \cdot_\pi)$ descritto nell'esempio 0.2.4.

Si consideri ora una famiglia di m vettori in V

$$\{v_1, \ldots, v_m\}\,, \qquad m \in \mathbb{N}\,. \tag{48}$$

Definizione 0.2.8. Sia $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ una famiglia di scalari. Il vettore dato dall'espressione

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, v_i = \alpha_1 \, v_1 + \ldots + \alpha_m \, v_m \ \in \ V \tag{49}$$

è detto *combinazione lineare* dei vettori $v_1, \ldots, v_m$ con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Definizione 0.2.9. Si dice *sottospazio generato* dalla famiglia $\{v_1, \ldots, v_m\}$ l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall \, i = 1, \ldots, m \right\} . \tag{50}$$

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono detti *generatori* del sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Lemma 0.2.2. Il sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 0.2.10. I vettori $v_1, \ldots, v_m$ si dicono *linearmente dipendenti* (*su* $\mathbb{R}$) se il vettore nullo può essere ottenuto come loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, cioè se

$$\exists \, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \, , \text{ non tutti nulli, tali che} \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, v_i = o \, . \tag{51}$$

I vettori $v_1, \ldots, v_m$ si dicono *linearmente indipendenti* (*su* $\mathbb{R}$) se non sono linearmente dipendenti, cioè se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, v_i = o \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = 0 \, , \quad \forall \, i = 1, \ldots, m \, . \tag{52}$$

Lemma 0.2.3. Valgono i seguenti risultati.

1) Se i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$ sono linearmente dipendenti, allora risultano tali anche i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m$ da essi ottenuti aggiungendo il vettore v_m .

2) Se i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti, allora risultano tali anche i vettori $v_1, \ldots, v_{m-1}$ da essi ottenuti rimuovendo il vettore v_m .

Esempio 0.2.8. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ed in esso i vettori

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 5 \end{pmatrix} . \tag{53}$$

Allora i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti, mentre i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti. Infatti, da una parte si ha

$$2 \, \mathbf{x} + (-1) \, \mathbf{y} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \, . \tag{54}$$

Dall'altra parte, si consideri una generica combinazione lineare di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{z}$ con coefficienti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si imponga che questa sia uguale al vettore nullo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \doteq \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2\alpha+3\beta \\ 1\alpha+\frac{3}{2}\,\beta \\ 3\alpha+5\beta \end{pmatrix} \quad ; \tag{55}$$

si avrebbe allora

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta = 0 \\ 1\alpha+\frac{3}{2}\,\beta = 0 \\ 3\alpha+5\beta = 0 \end{cases} \tag{56}$$

Questo sistema può essere risolto per sostituzione ([6]), ottenendo come unica soluzione

$$\alpha = 0\,, \qquad \beta = 0\,, \tag{57}$$

la quale mostra che l'unica combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ che permette di ottenere il vettore nullo è quella con entrambi i coefficienti nulli. Ciò equivale a dire che i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti. Per il punto 1) nel Lemma 0.2.3, si può inoltre concludere che anche i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono linearmente dipendenti.

Esempio 0.2.9. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ fissato, si consideri la famiglia di polinomi $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ definita come

$$p_i(x) = x^i \qquad \text{per } i = 0, 1, \ldots, m\,. \tag{58}$$

E' evidente che i polinomi $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ così definiti sono linearmente indipendenti; inoltre si verifica facilmente che questi generano il sottospazio $\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}]$ discusso nell'esempio 0.2.7, cioè che

$$\mathcal{P}_{\leqslant m}[\mathbb{R}] = \langle p_0, \ldots, p_m \rangle\,. \tag{59}$$

Definizione 0.2.11. I vettori $v_1, \ldots, v_m \in V$ sono detti una *base di* V se

i. sono linearmente indipendenti;

ii. il sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ da essi generato coincide con lo spazio vettoriale V, cioè ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$.

Esempio 0.2.10. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. La famiglia di vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

è una base. Per l'importanza che questa base ricopre, ad essa viene attribuito il nome specifico di *base canonica*.

[6] Si veda la sezione 0.4 per altri metodi risolutivi.

Esempio 0.2.11. Si consideri lo spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. La famiglia di vettori

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

è una base (diversa da quella canonica introdotta nell'esempio precedente).

Definizione 0.2.12. La *dimensione* di uno spazio vettoriale V è il numero di vettori che compongono una sua qualunque base.

Osservazione 0.2.7. Gli Esempi 0.2.10, 0.2.11 mostrano chiaramente che in generale uno spazio vettoriale ammette più basi distinte. Si può però dimostrare che tutte le possibili basi di un dato spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Quindi, la Definizione 0.2.12 di dimensione di uno spazio vettoriale è ben posta, nel senso che è indipendente dalla base considerata.

0.3 Applicazioni Lineari

In questa sezione si introducono il concetto di applicazione lineare tra spazi vettoriali e le varie nozioni ad esso associate. Anche in questo caso, ad una prima formulazione assiomatica e rigorosa seguirà la discussione di alcuni degli esempi più rilevanti in matematica.

Si considerino due spazi vettoriali (reali) generici ([7])

$$(V, +, \cdot) \qquad \text{e} \qquad (V', +', \cdot')\,. \tag{62}$$

Definizione 0.3.1. Una mappa tra gli insiemi V e V'

$$L : V \to V'\,, \qquad v \mapsto L(v) \equiv L\,v\,. \tag{63}$$

è detta *applicazione lineare* se soddisfa i seguenti assiomi ([8]).

a.1. Compatibilità con l'operazione di somma di vettori

$$L(u + v) = Lu +' Lv \quad \text{in } V'\,, \qquad \forall\, u, v \in V\,. \tag{64}$$

a.2. Compatibilità con l'operazione di moltiplicazione per uno scalare

$$L(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot' Lv \quad \text{in } V'\,, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, v \in V\,. \tag{65}$$

Si indicherà con il simbolo $\mathfrak{L}(V, V')$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in V'

$$\mathfrak{L}(V, V') = \{L : V \to V' \mid L \text{ è una applicazione lineare}\}\,. \tag{66}$$

[7] In generale gli spazi V e V' sono diversi anche a livello insiemistico, perciò le operazioni di somma e prodotto per uno scalare su essi definite sono a loro volta diverse.

[8] Gli assiomi seguenti vengono spesso riassunti dicendo che la mappa L "rispetta" (oppure "preserva") la struttura di spazio vettoriale, vale a dire le operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare.

Osservazione 0.3.1. Si noti che a sinistra delle uguaglianze (64) e (65) compaiono rispettivamente le operazioni di somma $+$ e prodotto per uno scalare $\cdot$ nello spazio vettoriale V, mentre a destra delle stesse uguaglianze compaiono rispettivamente le operazioni di somma $+'$ e prodotto per uno scalare $\cdot'$ nello spazio vettoriale V'.

Questa distinzione verrà sottointesa nel seguito e, per semplicità di notazione, si utilizzeranno i simboli $+, \cdot$ per indicare le operazioni di somma di vettori e di prodotto per uno scalare in qualsiasi spazio vettoriale. Lo spazio in cui si sta lavorando sarà indicato dagli elementi che compariranno nelle espressioni.

Gli assiomi a.1 - a.2 della Definizione 0.3.1 permettono di dimostrare i seguenti risultati.

Lemma 0.3.1. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare.

1) L mappa combinazioni lineari in combinazioni lineari, nel senso che

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, L \, v_i \,, \qquad \forall \, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \,, \quad \forall \, v_1, \ldots, v_m \in V \,. \tag{67}$$

2) L mappa il vettore nullo $o \in V$ nel vettore nullo $o' \in V'$, nel senso che

$$L \, o = o' \,. \tag{68}$$

Esempio 0.3.1. Sia V uno spazio vettoriale. Due particolari tipi di applicazioni lineari da V a V sono l'*applicazione identica*

$$id : V \to V \,, \qquad v \mapsto id \, v := v \quad \forall \, v \in V \,, \tag{69}$$

e l'*applicazione nulla* (o è il vettore nullo nello spazio vettoriale V)

$$O : V \to V \,, \qquad v \mapsto O \, v := o \quad \forall \, v \in V \,. \tag{70}$$

0.3.1 Un esempio di applicazioni lineari: le matrici

Nel seguito si indicheranno con $m, n, p, \ldots$ dei numeri naturali non nulli

$$m, n, p, \ldots \in \mathbb{N} \,. \tag{71}$$

Definizione 0.3.2. Una *matrice di ordine* (m, n) ([9]) (*reale*) è una tabella di $m \cdot n$ numeri reali $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$) disposti su m righe ed n colonne nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \tag{72}$$

Nel seguito si indicheranno sempre le matrici con delle lettere maiuscole (ad esempio $A, B, C, \ldots$). Per ogni $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, il numero a_{ij} è detto *elemento* ij della matrice, intendendo ovviamente che è l'elemento appartenente all i-esima riga e alla j-esima colonna.

[9] Si dice anche *matrice di tipo* (m, n), oppure *matrice* m *per* n.

Esempio 0.3.2. La seguente scrittura rappresenta una matrice di ordine $(2, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} . \tag{73}$$

Essa ha 2 righe

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} , \tag{74}$$

e 3 colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} . \tag{75}$$

L'elemento 1 3 della matrice A è

$$a_{13} = -5 . \tag{76}$$

Definizione 0.3.3. Si indicherà con $\mathfrak{M}(m, n)$ l'insieme di tutte matrici di ordine (m, n)

$$\mathfrak{M}(m, n) := \{A \mid A \text{ è una matrice di ordine } (m, n) \text{ reale}\} . \tag{77}$$

Nel seguito per dire che A è una matrice di ordine (m, n) si scriverà semplicemente $A \in \mathfrak{M}(m, n)$.

Tipi particolari di matrici

Osservazione 0.3.2. I vettori in $\mathbb{R}^n$ sono matrici di ordine $(n, 1)$, cioè sono elementi di $\mathfrak{M}(n, 1)$. Analogamente, i loro trasposti sono matrici di ordine $(1, n)$, cioè sono elementi di $\mathfrak{M}(1, n)$.

Definizione 0.3.4. Una matrice A si dice *quadrata di ordine* n se ha lo stesso numero n di righe e di colonne. Si indicherà con $\mathfrak{M}(n)$ l'insieme di tutte matrici quadrate di ordine n.
La *diagonale principale* di una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ è l'insieme degli elementi $\{a_{ii}\}_{i=1,\ldots,n}$.

Definizione 0.3.5. Particolari tipi di matrici quadrate sono i seguenti.

1) Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *triangolare superiore* (*inferiore*) se ha tutti gli elementi sotto (sopra) la diagonale principale nulli, cioè se

$$a_{ij} = 0 , \qquad \forall\, i > j \; (i < j), \; i, j = 1, \ldots, n . \tag{78}$$

2) Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ si dice *diagonale* se gli unici elementi non nulli sono quelli appartenenti alla diagonale principale, cioè se

$$a_{ij} = 0 , \qquad \forall\, i \neq j , \; i, j = 1, \ldots, n . \tag{79}$$

3) La *matrice nulla* $\mathbb{0}_n \in \mathfrak{M}(n)$ è la matrice quadrata con tutti gli elementi nulli

$$\mathbb{0}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \tag{80}$$

4) La *matrice identità* $\mathbb{1}_n \in \mathfrak{M}(n)$ è la matrice diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale principale uguali a 1

$$\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} . \tag{81}$$

Esempio 0.3.3. Un esempio di matrice triangolare superiore è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \tag{82}$$

mentre uno di matrice diagonale è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{83}$$

Entrambe sono ovviamente matrici quadrate, rispettivamente in $\mathfrak{M}(3)$ ed $\mathfrak{M}(2)$.

Moltiplicazione di vettori per matrici

Definizione 0.3.6. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(m, n)$ una matrice di ordine (m, n) e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore. Si definisce il *prodotto a sinistra* di $\mathbf{x}$ per A come il vettore $A\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ le cui componenti sono

$$(A\,\mathbf{x})_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad \text{for } i = 1, \ldots, m \, . \tag{84}$$

Esempio 0.3.4. Siano $A \in \mathfrak{M}(,)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^a$ la matrice e il vettore rispettivamente definiti come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} . \tag{85}$$

Il vettore risultante dal prodotto di $\mathbf{x}$ per A a sinistra è il vettore $A\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ dato da

$$A\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + (-5) \cdot (-3) \\ (-7) \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \end{pmatrix} . \tag{86}$$

Vale il seguente risultato fondamentale.

Proposizione 0.3.1. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$. Allora tutte e sole le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$ sono rappresentabili come prodotto a sinistra per matrici in $\mathfrak{M}(m, n)$. Più precisamente, si ha che

i. per ogni applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esiste una matrice $A_L \in \mathfrak{M}(m, n)$ tale che

$$L\,\mathbf{x} = A_L \cdot \mathbf{x} \quad \text{in } \mathbb{R}^m \, , \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; ; \tag{87}$$

ii. per ogni matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ esiste una applicazione lineare $L_A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$A \cdot \mathbf{x} = L_A \mathbf{x} \quad \text{in } \mathbb{R}^m, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n . \tag{88}$$

In entrambi i casi, le espressione $A \cdot \mathbf{x}$ e $A_L \cdot \mathbf{x}$ sono da intendersi come prodotto a sinistra tra le matrici $A, A_L \in \mathfrak{M}(m,n)$ ed $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(n,0)$ $(\equiv \mathbb{R}^n)$.
Si può allora concludere che esiste una biezione

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{M}(m,n), \qquad L \mapsto A_L . \tag{89}$$

Esempio 0.3.5. Si considerino i due spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. Allora la mappa

$$P_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto P_3 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{90}$$

è una applicazione lineare detta *proiezione*; essa può essere rappresentata come la mappa di moltiplicazione a sinistra per la matrice $\mathbb{P}_3 \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come

$$\mathbb{P}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{91}$$

Infatti l'azione della mappa P_3 su un qualsiasi vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ può essere scritta come

$$P_3 \mathbf{x} = \mathbb{P}_3 \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \tag{92}$$

dove $\mathbb{P}_3 \cdot \mathbf{x}$ è il prodotto tra la matrice $\mathbb{P}_3 \in \mathfrak{M}(2,3)$ ed il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ $(\equiv \mathfrak{M}(3,0))$.

0.3.2 Operazioni tra applicazioni lineari

Definizione 0.3.7. Due applicazioni lineari $L, M \in \mathfrak{L}(V, V')$ si dicono *uguali* (si scrive $L = M$) se la agiscono allo stesso modo su tutti gli elementi dello spazio vettoriale di partenza, cioè se

$$L\, v = M\, v \quad \text{in } V', \qquad \forall v \in V . \tag{93}$$

Definizione 0.3.8. Si definiscono le seguenti operazioni tra applicazioni lineari. ([10])

i. *Somma di applicazioni lineari* ([11])

$$+_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L}(V, V') \times \mathfrak{L}(V, V') \to \mathfrak{L}(V, V'), \qquad (L, M) \mapsto L +_{\mathfrak{L}} M , \tag{94}$$

definita in modo tale che l'azione dell'applicazione lineare somma $L +_{\mathfrak{L}} M$ è data da

$$(L +_{\mathfrak{L}} M)\, v = L\, v + M\, v \quad \text{in } V', \qquad \forall v \in V . \tag{95}$$

[10] Si dice che le operazioni di somma e prodotto per uno scalare di applicazioni lineari sono *indotte* dalle analoghe operazioni nello spazio vettoriale di arrivo V'.

[11] **N.B.**: Come si era osservato per la somma tra vettori e la somma di matrici, anche la somma di applicazioni lineari è definita solo per applicazioni nello stesso spazio $\mathfrak{L}(V, V')$.

ii. *Moltiplicazione per uno scalare*

$$\cdot_{\mathfrak{L}} : R \times \mathfrak{L}(V, V') \to \mathfrak{L}(V, V') , \qquad (\alpha, L) \mapsto \alpha \cdot_{\mathfrak{L}} L , \tag{96}$$

definita in modo tale che l'azione dell'applicazione lineare risultante $\alpha \cdot_{\mathfrak{L}} L$ è data da

$$(\alpha \cdot_{\mathfrak{L}} L)\, v = \alpha \cdot (L\, v) \quad \text{in } V' , \qquad \forall\, v \in V . \tag{97}$$

Lemma 0.3.2. La terna $(\mathfrak{L}(V, V'), +_{\mathfrak{L}}, \cdot_{\mathfrak{L}})$, dove le operazioni di somma di applicazioni lineari e di prodotto per uno scalare sono rispettivamente quelle definite nelle equazioni (94) (96), è uno spazio vettoriale.

Si dimostra facilmente che la mappa ottenuta come composizione di applicazioni lineari è a sua volta una applicazione lineare. Ciò permette di dare la seguente definizione.

Definizione 0.3.9. Siano U, V, W tre spazi vettoriali. La *composizione* di applicazioni lineari è la mappa

$$\circ : \mathfrak{L}(U, V) \times \mathfrak{L}(V, W) \to \mathfrak{L}(U, W) , \qquad (L, M) \mapsto M \circ L , \tag{98}$$

definita in modo tale che l'azione dell'applicazione lineare risultante $M \circ L$ è data da

$$(M \circ L)\, v = M(L\, v) \quad \text{in } W , \qquad \forall\, v \in V . \tag{99}$$

Operazioni tra matrici

Definizione 0.3.10. Due matrici $A, B \in \mathfrak{M}(m, n)$ si dicono *uguali* (si scrive $A = B$) se ([12]) i loro elementi sono uguali posizione per posizione

$$a_{ij} = b_{ij} , \qquad \forall\, i=1, \ldots, m ,\ j=1, \ldots, n . \tag{100}$$

Definizione 0.3.11. Si definiscono le seguenti operazioni tra matrici.

i. *Somma di matrici* ([13])

$$+ : \mathfrak{M}(m, n) \times \mathfrak{M}(m, n) \to \mathfrak{M}(m, n) , \qquad (A, B) \mapsto A + B , \tag{101}$$

definita in modo tale che gli elementi della matrice somma $C = A + B$ sono date dalla somma dei rispettivi elementi delle matrici A, B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} , \qquad \forall\, i=1, \ldots, m ,\ j=1, \ldots, n . \tag{102}$$

[12] Come per i vettori in $\mathbb{R}^n$, non ha senso definire una relazione di uguaglianza tra matrici appartenenti a spazi diversi; ad esempio

$$A \in \mathfrak{M}(2, 3) ,\ B \in \mathfrak{M}(5, 2) \quad \Rightarrow \quad A \neq B .$$

[13] **N.B.**: Come si era osservato per la somma tra vettori, anche la somma di matrici è definita solo per matrici nello stesso spazio $\mathfrak{M}(m, n)$. Non si possono sommare matrici di ordine diverso (ad esempio non è definita l'operazione $A+B$ per $A \in \mathfrak{M}(2, 3)$ e $B \in \mathfrak{M}(7, 4)$).

ii. *Prodotto per uno scalare*

$$\cdot : R \times \mathfrak{M}(m,n) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad (\alpha, A) \mapsto \alpha\, A\,, \tag{103}$$

definita in modo tale che gli elementi della matrice risultante $C = \alpha\, A$ sono date dal prodotto dei singoli elementi della matrice A per lo scalare α:

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,, \qquad \forall\, i=1,\ldots,m\,,\; j=1,\ldots,n\,. \tag{104}$$

Lemma 0.3.3. La terna $(\mathfrak{M}(m,n), +, \cdot)$, in cui le operazioni di somma di matrici e prodotto per uno scalare sono rispettivamente quelle definite nelle equazioni (101) (103), è uno spazio vettoriale.

Definizione 0.3.12. Sia $A \in \mathfrak{M}(m,n)$. L'*opposta* di A è la matrice $-A \in \mathfrak{M}(m,n)$ definita come

$$-A := (-1) \cdot A\,. \tag{105}$$

Osservazione 0.3.3. Si consideri la corrispondenza biunivoca introdotta nella proposizione 0.3.1

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathfrak{M}(m,n)\,, \qquad L \mapsto A_L\,.$$

Si può dimostrare che due applicazioni lineari $L, L' \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sono uguali nel senso della definizione 0.3.7 se e solo se le matrici $A_L, A_{L'} \in \mathfrak{M}(m,n)$ ad esse associate sono uguali nel senso della definizione 0.3.10. Similmente, si dimostra che la biezione preserva le operazioni di somma e prodotto, nel senso che

$$L +_{\mathfrak{L}} L' \mapsto A_L + A_{L'}\,, \quad \alpha \cdot_{\mathfrak{L}} L \mapsto \alpha \cdot L \qquad \text{per ogni } L, L' \in \mathfrak{L},\ \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{106}$$

Esempio 0.3.6. Si considerino le matrici $A, B \in \mathfrak{M}(2,3)$ definite come

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{107}$$

La somma $A + B$ è

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7+(-7) & 2+(-1) & -5+3 \\ -1+0 & 2+0 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{108}$$

Il prodotto per uno scalare $-8\,A$ è

$$\begin{aligned} -8\,A &= (-8) \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8\cdot 7 & -8\cdot 2 & -8\cdot(-5) \\ -8\cdot(-1) & -8\cdot 2 & -8\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56 & -16 & 40 \\ 8 & -16 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{109}$$

La matrice opposta di A è

$$-A = (-1) \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

In alcuni casi si può anche definire una operazione di prodotto tra matrici come segue.

Definizione 0.3.13. Si definisce il *prodotto di matrici* ([14])

$$\cdot : \mathfrak{M}(m,n) \times \mathfrak{M}(n,p) \to \mathfrak{M}(m,p)\,, \qquad (A,B) \mapsto A \cdot B \equiv A\,B\,, \tag{111}$$

in modo tale che gli elementi della matrice prodotto $C = A \cdot B$ siano dati dalla relazione

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\,, \qquad \forall\, i=1,\ldots,m\,,\ j=1,\ldots,p\,. \tag{112}$$

Lemma 0.3.4. L'insieme $\mathfrak{M}(m,n)$ munito delle operazioni di somma di matrici (101) e prodotto tra matrici (111) è un anello.

Osservazione 0.3.4. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ e le corrispondenze biunivoche (si veda la proposizione 0.3.1)

$$\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{M}(n,m)\,, \qquad \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \to \mathfrak{M}(p,n)\,, \qquad \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p) \to \mathfrak{M}(p,m)\,. \tag{113}$$

Siano $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ e $M \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ due applicazioni lineari alle quali, tramite le prime due biezioni nell'equazione (113), sono rispettivamente associate le matrici $A_L \in \mathfrak{M}(n,m)$ e $A_M \in \mathfrak{M}(p,n)$. Si può considerare la composizione di queste applicazioni $M \circ L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ e dimostrare che la matrice associata a questa applicazione, tramite l'ultima biezione in (113), è data dal prodotto delle matrici A_L, A_M

$$A_{M\circ L} = A_M \cdot A_L \ \in\ \mathfrak{M}(p,m)\,. \tag{114}$$

Quindi, identificando le applicazioni lineari tra spazi $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) con delle matrici, l'operazione di composizione di tali applicazioni deve essere identificata con l'operazione di prodotto tra le matrici ad esse associate.

Esempio 0.3.7. Si considerino le matrici $A \in \mathfrak{M}(2,3)$, $B \in \mathfrak{M}(3,4)$ definite come segue

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{115}$$

La matrice prodotto $A \cdot B \in \mathfrak{M}(2,4)$ è calcolata come segue

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0{\cdot}1+(-3){\cdot}(-8)+5{\cdot}9 & 0{\cdot}(-2)+(-3){\cdot}7+5{\cdot}1 & 0{\cdot}3+(-3){\cdot}(-6)+5{\cdot}0 & 0{\cdot}(-4)+(-3){\cdot}5+5{\cdot}1 \\ 4{\cdot}1+(-6){\cdot}(-8)+0{\cdot}9 & 4{\cdot}(-2)+(-6){\cdot}7+0{\cdot}1 & 4{\cdot}3+(-6){\cdot}(-6)+0{\cdot}0 & 4{\cdot}(-4)+(-6){\cdot}5+0{\cdot}1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 69 & -16 & 18 & -10 \\ 52 & -50 & 48 & -46 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{116}$$

Si noti che, viceversa, non si può definire il prodotto $B \cdot A$ perché il numero di colonne di B è diverso dal numero di righe di A.

[14] **N.B.**: Anche in questo caso, si presti attenzione al fatto che il prodotto è definito solo tra matrici tali che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda.

Esempio 0.3.8. Un altro esempio che sarà molto utile quando si parlerà di sistemi lineari è il prodotto di una matrice per un vettore, intendendo quest'ultimo come matrice in $\mathfrak{M}(n,1)$. Si considerino la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ e i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\,(\equiv \mathfrak{M}(3,1))$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2\,(\equiv \mathfrak{M}(2,1))$ definiti come segue

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Allora il prodotto $A \cdot \mathbf{x} \in \mathfrak{M}(2,0)\,(\equiv \mathbb{R}^2)$ è dato dall'espressione seguente

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 \\ -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -3x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}. \tag{118}$$

Perciò ha senso considerare l'equazione

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2 , \tag{119}$$

che equivale, per via della Definizione 0.2.4 di uguaglianza tra vettori in $\mathbb{R}^2$, al sistema in due equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} . \tag{120}$$

Lemma 0.3.5. Il prodotto di matrici (111) soddisfa le seguenti proprietà.

i. Associatività

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C , \qquad \forall A \in \mathfrak{M}(m,n) ,\ B \in \mathfrak{M}(n,p) ,\ C \in \mathfrak{M}(p,q) . \tag{121}$$

ii. Distributività rispetto alla somma di matrici

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C , \qquad \forall A \in \mathfrak{M}(m,n) ,\ B, C \in \mathfrak{M}(n,p) . \tag{122}$$

Osservazione 0.3.5. Sebbene queste proprietà rendano il prodotto di matrici (111) simile al prodotto di scalari, in realtà i due si distinguono per altri motivi. Ad esempio, per il prodotto di matrici si ha quanto segue.

i. *Non è commutativo*, nel senso che

$$A \cdot B \neq B \cdot A . \tag{123}$$

Uno dei due prodotti potrebbe addirittura non essere definito (si veda l'Esempio 0.3.7).

ii. *Non vale la proprietà di annullamento del prodotto*, nel senso che ([15])

$$A \cdot B = A \cdot C \quad \text{e} \quad A \neq \mathbb{0}_n \qquad \not\Rightarrow \qquad B = C . \tag{124}$$

[15] Posto $D := B - C$, ciò equivale a dire che

$$A \cdot D = \mathbb{0}_n \quad \text{e} \quad A \neq \mathbb{0}_n \qquad \not\Rightarrow \qquad D = \mathbb{0}_n .$$

Esempio 0.3.9. Si considerino due matrici $A \in \mathfrak{M}(m,n)$, $B \in \mathfrak{M}(n,m)$ con $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Allora il prodotto $A\cdot B$ è una matrice in $\mathfrak{M}(m,m)$, mentre il prodotto $B \cdot A$ è una matrice in $\mathfrak{M}(n,n)$; chiaramente per $m\neq n$ gli spazi $\mathfrak{M}(m,m)$ e $\mathfrak{M}(n,n)$ sono diversi (in quanto costituiti da matrici di ordini differenti), quindi i prodotti $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono a loro volta matrici diverse.

Si considerino ora le matrici quadrate $A, B, C \in \mathfrak{M}(2)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}. \tag{125}$$

I prodotti $A\cdot B$, $B\cdot A \in \mathfrak{M}(2)$ sono entrambi definiti e sono rispettivamente dati dalle espressioni

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}. \tag{126}$$

Questi risultati mostrano chiaramente che il prodotto di matrici non è commutativo e non soddisfa la proprietà di annullamento. Infatti si ha

$$A \cdot B \neq B \cdot A \qquad \text{e} \qquad A \cdot B = \mathbb{0}_2 \quad \text{con} \quad A, B \neq \mathbb{0}_2 \,. \tag{127}$$

Definizione 0.3.14. Si definisce la *trasposizione* di matrici come la mappa

$$\cdot^T : \mathfrak{M}(m,n) \to \mathfrak{M}(n,m)\,, \qquad A \mapsto A^T\,, \tag{128}$$

tale che gli elementi della matrice trasposta A^T siano dati dalla relazione

$$a^T_{ij} = a_{ji}\,, \qquad \forall\, i=1,\ldots,m\,,\ j=1,\ldots,n\,. \tag{129}$$

Lemma 0.3.6. La trasposizione di matrici (128) soddisfa le proprietà seguenti.

1) Involutività
$$(A^T)^T = A\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\,. \tag{130}$$

2) Distributività rispetto alla somma di matrici e al prodotto per uno scalare
$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad \text{e} \qquad (\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T\,, \qquad \forall\, A, B \in \mathfrak{M}(m,n)\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{131}$$

3) Composizione con il prodotto di matrici ([16])
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\,,\ B \in \mathfrak{M}(n,p)\,. \tag{132}$$

Esempio 0.3.10. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{133}$$

La matrice trasposta di A è

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}. \tag{134}$$

[16] Più in generale, per ogni famiglia $A_1, \ldots, A_k$ per cui sia definito il prodotto $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$, vale

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^T = A_k^T \cdot \ldots \cdot A_2^T \cdot A_1^T\,,$$

cioé la trasposta della matrice prodotto è il prodotto delle matrici trasposte.

Definizione 0.3.15. Una matrice quadrata $A \in M(n)$ si dice *simmetrica* se

$$A^T = A\,. \tag{135}$$

Una matrice quadrata $A \in M(n)$ si dice *antisimmetrica* se

$$A^T = -A\,. \tag{136}$$

0.3.3 Nucleo e Immagine di una applicazione lineare. Isomorfismi e applicazioni inverse

Definizione 0.3.16. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare. Si danno le seguenti definizioni.

1) Il *nucleo* (o *kernel*) di L è il sottoinsieme $\mathrm{Ker}L \subset V$ definito come

$$\mathrm{Ker}L := \{v \in V \mid L\,v = o' \ \text{ in } V'\}\,, \tag{137}$$

dove si indica con o' il vettore nullo nello spazio vettoriale V'.

2) L'*immagine* di L è il sottoinsieme $\mathrm{Im}L \subset V'$ definito come

$$\mathrm{Im}L := \{w \in V' \mid \exists\, v \in V \text{ tale che } w = L\,v \ \text{ in } V'\}\,. \tag{138}$$

Esempio 0.3.11. Si consideri l'applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a cui è associata tramite la biezione (89) la matrice

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,. \tag{139}$$

Per determinare il nucleo $\mathrm{Ker}L$, si devono trovare i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $L\mathbf{x} = A_L \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \doteq A_L \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}\,. \tag{140}$$

Ciò equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}\,. \tag{141}$$

Si trova che l'insieme delle soluzioni è

$$x_1 = x\,, \qquad x_2 = x\,, \qquad x_3 = -2x\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \tag{142}$$

perciò si ha che

$$\mathrm{Ker}L = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix}\,,\ \ x \in \mathbb{R} \right\}\,. \tag{143}$$

Lemma 0.3.7. Sia $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ una applicazione lineare. Allora valgono i seguenti risultati.

1) Il nucleo $\mathrm{Ker}L$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V.

2) L'immagine ImL è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V'.

Lemma 0.3.8. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ è iniettiva se e solo se il suo nucleo Ker$L$ è costituito dal solo vettore nullo $o \in V$

$$L \text{ iniettiva} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}L = \{o\} \,. \tag{144}$$

Definizione 0.3.17. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ è detta *invertibile* se esiste una seconda applicazione lineare $M \in \mathfrak{L}(V', V)$ tale che

$$M \circ L = id_V \qquad \text{e} \qquad L \circ M = id_{V'} \,. \tag{145}$$

Si dice che M è l'*inversa* di L, ed è anche indicata con L^{-1}.

Lemma 0.3.9. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ che sia anche una mappa biunivoca (cioè iniettiva e suriettiva) tra gli insiemi V e V' è anche invertibile ([17]).

Definizione 0.3.18. Una applicazione lineare $L \in \mathfrak{L}(V, V')$ biunivoca (e quindi invertibile) è detta *isomorfismo* tra gli spazi vettoriali V e V'. Si dice che gli spazi V e V' sono *isomorfi*.

Si ha il seguente risultato fondamentale.

Proposizione 0.3.2. Ogni spazio vettoriale V di dimensione finita $n \in \mathbb{N}$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, cioè esiste almeno un isomorfismo tra i due spazi ([18]).

Matrici quadrate

Lemma 0.3.10. Sia $A \in M(n)$ una qualsiasi matrice quadrata. Allora valgono le relazioni ([19])

$$A \cdot \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \cdot A = A \qquad \text{in } \mathfrak{M}(n) \,, \tag{146}$$

$$A \cdot \mathbb{0}_n = \mathbb{0}_n \cdot A = \mathbb{0}_n \qquad \text{in } \mathfrak{M}(n) \,. \tag{147}$$

Definizione 0.3.19. Si definisce la *traccia* di una matrice quadrata come la mappa

$$\mathrm{Tr} \,:\mathfrak{M}(n) \,\to\, \mathbb{R}\,, \qquad A \,\mapsto\, \mathrm{Tr}\,A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,, \tag{148}$$

che ad A associa la somma di tutti gli elementi sulla diagonale principale.

Esempio 0.3.12. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(4)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 11 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{149}$$

La traccia di A è data dall'espressione

$$\mathrm{Tr}\,A = 7 + 4 + (-6) + 0 = 5\,. \tag{150}$$

[17] Si noti che l'enunciato non è banale: la biunivocità di L garantisce l'esistenza di una mappa inversa L^{-1} di cui però non è garantita la linearità, che è invece assicurata dal lemma enunciato.

[18] In realtà ne esistono infiniti di tali isomorfismi; più precisamente ne esiste uno per ogni scelta di base in V.

[19] Queste relazioni chiariscono perché $\mathbb{0}_n$ e $\mathbb{1}_n$ siano rispettivamente dette matrice nulla e matrice identica.

Lemma 0.3.11. La traccia soddisfa le seguenti proprietà.

1) Ciclicità
$$\mathrm{Tr}\,(A\cdot B) = \mathrm{Tr}\,(B\cdot A)\,, \qquad \forall\, A, B \in M(n)\ . \tag{151}$$

2) Invarianza per trasposizione
$$\mathrm{Tr}\,A^T = \mathrm{Tr}\,A\,, \qquad \forall\, A \in M(n)\ . \tag{152}$$

Definizione 0.3.20. Sia $A \in \mathfrak{M}(n)$ una matrice quadrata. Si indicherà con A_{ij} la sottomatrice di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Definizione 0.3.21. Il *determinante* di una matrice quadrata è la mappa

$$\det : \mathfrak{M}(n) \to \mathbb{R}\,, \qquad A \mapsto \det A\,, \tag{153}$$

definita induttivamente come segue.

i. Per $n=1$, il determinante di una matrice $A = (a) \in \mathfrak{M}(1)\ (\equiv \mathbb{R})$ è
$$\det A := a\ . \tag{154}$$

ii. Per $n>1$, il determinante di una matrice $A \in \mathfrak{M}(n)$ è dato dalla *formula di Laplace*
$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}\det A_{1n}\ . \tag{155}$$

Osservazione 0.3.6. Se $A \in \mathfrak{M}(2)$ il calcolo del determinante di A si riduce a

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\ . \tag{156}$$

Se $A \in \mathfrak{M}(3)$ il calcolo del determinante di A si riduce a

$$\det A := a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\ , \tag{157}$$

dove i determinanti delle matrici quadrate di ordine 2 restanti sono calcolati secondo la (156).

Esempio 0.3.13. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(3)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{158}$$

Il suo determinante è

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)\det\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 0\end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 0\end{pmatrix} + 6\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1\end{pmatrix} = \\ &= (-2)\cdot(3\cdot 0 - 8\cdot(-1)) - 4\cdot(0\cdot 0 - 8\cdot 5) + 6\cdot(0\cdot(-1) - 3\cdot 5) = 54\ . \end{aligned} \tag{159}$$

Lemma 0.3.12. Il determinante soddisfa le seguenti proprietà, le quali possono risultare utili anche per il calcolo esplicito dello stesso. Siano $A, B \in \mathfrak{M}(n)$ due matrici quadrate.

1) Invarianza per trasposizione
$$\det A^T = \det A \,. \tag{160}$$

2) Scambio di righe e colonne. Sia $\tilde{A}$ la matrice ottenuta da A spostando una riga (o una colonna) di p posizioni. Allora vale
$$\det \tilde{A} = (-1)^p \det A \,. \tag{161}$$
In particolare, se $\tilde{A}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro due righe (o due colonne), allora si ha
$$\det \tilde{A} = -\det A \,. \tag{162}$$

3) Dipendenza lineare di righe o colonne. Se le righe (o le colonne) di A, intese come vettori in $\mathbb{R}^n$, sono linearmente dipendenti, allora
$$\det A = 0 \,. \tag{163}$$

4) Composizione con il prodotto di matrici (*Teorema di Binet*)
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \,. \tag{164}$$

5) Se $A \in \mathfrak{M}(n)$ è una matrice triangolare (superiore o inferiore), in particolare se A è diagonale, il determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale
$$\det A \;=\; a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \,. \tag{165}$$
In particolare, per il determinante della matrice identica si ha
$$\det \mathbb{1}_n = 1 \,. \tag{166}$$

Osservazione 0.3.7. Il risultato 3) del Lemma 0.3.12 fornisce un buon metodo per determinare la dipendenza o indipendenza lineare di una famiglia di n vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n \in \mathbb{R}^n$. E' sufficiente considerare la matrice quadrata $X \in \mathfrak{M}(n)$ ottenuta affiancando i vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$
$$X := \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} , \tag{167}$$
e calcolarne il determinante. Allora i vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$ sono linearmente indipendenti (e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$) se e solo se il determinante della matrice X è non nullo
$$\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n \text{ linearmente indipendenti} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det X \neq 0 \,. \tag{168}$$

Definizione 0.3.22. Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(n)$ è detta *invertibile* se esiste una seconda matrice quadrata $M \in \mathfrak{M}(n)$ tale che

$$A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{1}_n \qquad \text{in } \mathfrak{M}(n) \ . \tag{169}$$

La matrice M è detta l'*inversa* di A.
Il sottoinsieme della matrici quadrate di ordine n costituito dall'insieme di tutte matrici invertibili è detto *gruppo generale lineare* ([20]) ed è indicato con il simbolo

$$GL(n) := \{A \in \mathfrak{M}(n) \mid A \text{ è invertibile}\} \subset \mathfrak{M}(n) \ . \tag{170}$$

Lemma 0.3.13. Valgono i seguenti risultati.

1) Sia $A \in \mathfrak{M}(n)$. La matrice inversa di A, se esiste, è unica ed è comunemente indicata con il simbolo A^{-1}
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n \ . \tag{171}$$

2) Sia $A \in \mathfrak{M}(n)$. Allora A è invertibile se e solo se il determinante di A è non nullo
$$A \in GL(n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\, A^{-1} \in \mathfrak{M}(n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det A \neq 0 \ . \tag{172}$$
In tal caso, il determinante della matrice inversa soddisfa
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \ , \qquad \forall\, A \in GL(n) \ . \tag{173}$$

3) $GL(n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{M}(n)$.

4) La matrice identica è invertibile e coincide con la sua inversa
$$\mathbb{1}_n \in GL(n) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{1}_n^{-1} = \mathbb{1}_n \ . \tag{174}$$

5) Siano $A, B \in GL(n)$. Allora la matrice prodotto $A \cdot B \in \mathfrak{M}(n)$ è anch'essa invertibile
$$A \cdot B \in GL(n) \ , \tag{175}$$
e vale la seguente relazione
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \ . \tag{176}$$

6) Sia $A \in GL(n)$. Allora la matrice inversa A^{-1} è anche essa invertibile e la sua inversa è A
$$A^{-1} \in GL(n) \qquad \text{e} \qquad (A^{-1})^{-1} = A \ , \qquad \forall\, A \in GL(n) \ . \tag{177}$$

Proposizione 0.3.3. Sia $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in sé, e sia $A_L \in \mathfrak{M}(n)$ la matrice quadrata ad essa associata per mezzo della biezione (89). Allora L è un isomorfismo se e solo se A_L è una matrice invertibile. Il punto 2) del Lemma 0.3.13, implica allora che

$$L \text{ è un isomorfismo} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_L \text{ è invertibile} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det A_L \neq 0 \ . \tag{178}$$

[20] Si può infatti dimostrare che lo spazio delle matrici invertibili munito dell'operazione di moltiplicazione di matrici è un gruppo.

Metodo di Gauss per il calcolo della inversa di matrici quadrate

Sia $A \in GL(n)$ una matrice quadrata invertibile. Esistono vari metodi per calcolare la matrice inversa A^{-1}; uno di questi metodi, una cui semplice variante sarà utilizzata nel seguito come tecnica risolutiva per i sistemi lineari, è il cosiddetto *metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa*. Questo consiste nei seguenti passaggi.

1. Si verifica che la matrice A sia invertibile, calcolando il determinante e verificando che
$$\det A \neq 0 \ . \tag{179}$$

2. Si costruisce la matrice $(A \,|\, \mathbb{1}_n) \in \mathfrak{M}(n, 2n)$ accostando a destra della matrice $A \in \mathfrak{M}(n)$ la matrice identica $\mathbb{1}_n \in \mathfrak{M}(n)$
$$(A \,|\, \mathbb{1}_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) . \tag{180}$$

3. Si cerca di ridurre la matrice $(A \,|\, \mathbb{1}_n)$ nella forma $(\mathbb{1}_n \,|\, C)$, con $C \in \mathfrak{M}(n)$, cioè
$$(A \,|\, \mathbb{1}_n) \ \to \ (\mathbb{1}_n \,|\, C) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right) , \tag{181}$$
per mezzo delle operazioni seguenti
   i. scambio di due righe;
   ii. moltiplicazione una riga per un numero reale diverso da zero;
   iii. somma di una riga con un multiplo (reale) di un'altra riga.

4. La matrice inversa A^{-1} è data dalla matrice $C \in \mathfrak{M}(n)$ ottenuta a destra della linea di separazione verticale
$$A^{-1} = C \ . \tag{182}$$

Esempio 0.3.14. Si consideri la matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}(2)$ definita come
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{183}$$

1. Il suo determinante è dato dall'espressione
$$\det A = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) = 1 \neq 0 \ . \tag{184}$$

2. Si considera la matrice $(A \,|\, \mathbb{1}_2) \in \mathfrak{M}(2, 4)$ ottenuta accostando a destra della matrice A la matrice identica $\mathbb{1}_2$
$$(A \,|\, \mathbb{1}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) . \tag{185}$$

3. Si considera la sequenza di operazioni seguente.
   i. Si moltiplica la seconda riga per 3.
   ii. Si somma la prima riga alla seconda riga.
   iii. Si somma la seconda riga moltiplicata per 2 alla prima riga.
   iv. Si moltiplica la prima riga per 1/3.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{i}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{ii}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{iii}{\to} \overset{iii}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{iv}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) . \tag{186}$$

4. La matrice inversa è ([21])

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \tag{187}$$

Rango di una matrice

Concludiamo questa sezione introducendo il concetto di rango di una matrice e le nozioni ad esso associate; queste saranno utilizzate nella sezione seguente per discutere la risolvibilità dei sistemi lineari.

Definizione 0.3.23. Sia $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ una matrice. Si dice che $B \in \mathfrak{M}(p,q)$, con $p \leq m$ e $q \leq n$, è una *sottomatrice* di A se può essere ottenuta da A eliminando $m-p$ righe ed $n-q$ colonne.

Esempio 0.3.15. Si considerino le matrici $A \in \mathfrak{M}(4,3)$ e $B \in \mathfrak{M}(2,2)$ definite come

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} . \tag{188}$$

Allora B è la sottomatrice di A ottenuta eliminando la terza riga, e la prima e la terza colonna.

Definizione 0.3.24. Il *rango* di una matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ è definito come segue

$$\mathrm{rk}A := \text{massimo numero di righe di } A \text{ linearmente indipendenti} . \tag{189}$$

Lemma 0.3.14. Il rango di una matrice soddisfa i seguenti risultati.

1) Equivale al massimo numero di colonne linearmente indipendenti

$$\mathrm{rk}A = \text{massimo numero di colonne di } A \text{ linearmente indipendenti} . \tag{190}$$

2) Invarianza per trasposizione

$$\mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}A , \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n) . \tag{191}$$

[21] Come verifica si possono calcolare esplicitamente i prodotti $A \cdot A^{-1}$ e $A^{-1} \cdot A$ e verificare che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_2 .$$

3) Non può assumere valori superiori al numero di righe o al numero di colonne della matrice

$$\mathrm{rk}A \leq \min\{\, m \,,\, n \,\}\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\ . \tag{192}$$

4) Composizione con il prodotto di matrici

$$\mathrm{rk}(A \cdot B) \leq \min\{\, \mathrm{rk}A \,,\, \mathrm{rk}B \,\}\,, \qquad \forall\, A \in \mathfrak{M}(m,n)\,,\ B \in \mathfrak{M}(n,p)\ . \tag{193}$$

Vale il seguente risultato che fornisce una caratterizzazione molto utile del rango di una matrice.

Lemma 0.3.15. Il rango di una matrice $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ equivale all'ordine della più grande sottomatrice quadrata invertibile ([22])

$$\mathrm{rk}A = \max\{n\in\mathbb{N} \mid \exists\, B \in \mathfrak{M}(n) \text{ sottomatrice di } A \text{ con } \det B \neq 0\}\ . \tag{194}$$

Esempio 0.3.16. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(3,4)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{195}$$

Le sottomatrici quadrate di A di ordine massimo (ordine 3) sono quelle ottenute da A eliminando una colonna qualsiasi; ad esempio, eliminando la prima colonna di A si ottiene la sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3)\,. \tag{196}$$

il cui determinante è

$$\begin{aligned} \det B &:= 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 11 \neq 0\ . \end{aligned} \tag{197}$$

Poiché questo determinante è non nullo, la sottomatrice $B \in \mathfrak{M}(3)$ è invertibile e si può allora concludere che

$$\mathrm{rk}A = 3\ . \tag{198}$$

Esempio 0.3.17. Si consideri la matrice $A \in \mathfrak{M}(2,3)$ definita come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}\ . \tag{199}$$

Le sottomatrici quadrate di A di ordine massimo (ordine 2) sono quelle ottenute da A eliminando una colonna qualsiasi

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}\,, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\,, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\,, \tag{200}$$

[22] Cioè, per il punto 2) del Lemma 0.3.13, della più grande sottomatrice quadrata con determinante non nullo.

i cui determinanti si calcolano facilmente ottenendo

$$\det B_1 = \det B_2 = \det B_3 = 0 \, . \tag{201}$$

Perciò, dato che tutte le sottomatrici di ordine 2 hanno determinante nullo (e quindi non sono invertibili), si ha

$$\mathrm{rk}A < 2 \, . \tag{202}$$

D'altra parte esistono sottomatrici di ordine 1 (cioè componenti) di A non nulle, e quindi invertibili, perciò si può concludere che

$$\mathrm{rk}A = 1 \, . \tag{203}$$

0.4 Sistemi Lineari

La teoria degli spazi vettoriali, delle applicazioni lineari e del calcolo matriciale analizzata finora costituisce il linguaggio corretto per lo studio e la risoluzione dei sistemi lineari che verranno considerati in questa sezione.

Definizione 0.4.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Un *sistema di m equazioni lineari* (detto anche *sistema lineare*) nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è una espressione della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} , \tag{204}$$

in cui si suppongono noti i numeri reali $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Un sistema di equazioni lineari si dice *omogeneo* se i coefficienti $b_1, \ldots, b_m$ sono tutti nulli.

Definizione 0.4.2. Si consideri un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Si danno le definizioni seguenti.

1) Una *soluzione* di tale sistema è una qualsiasi n-upla di numeri che, sostituita alle incognite, soddisfa simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

2) Il sistema si dice *risolubile* se ammette almeno una soluzione, e in tal caso si dice che le equazioni del sistema sono *compatibili*. Il sistema si dice invece *non risolubile* (o *impossibile*) se non esiste neanche una soluzione.

3) Il sistema si dice *determinato* se è risolubile ed ammette una unica soluzione.

4) Il sistema si dice *indeterminato* se è risolubile ed ammette infinite soluzioni.

5) Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se ammettono le stesse soluzioni.

0.4.1 Rappresentazione matriciale

Nell'Esempio 0.3.8 si è visto che è possibile riscrivere un sistema di 2 equazioni in 3 incognite come uguaglianza tra vettori in $\mathbb{R}^2$, uno dei quali è dato dal prodotto di una matrice in $\mathfrak{M}(2,3)$ per un vettore (il vettore delle incognite) in $\mathbb{R}^3$.

Più in generale, è chiaro che un sistema lineare di m equazioni lineari in n incognite come quello in Eq.(204) può essere riscritto in *forma matriciale* come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{205}$$

in cui $A \in \mathfrak{M}(m,n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sono rispettivamente detti *matrice dei coefficienti*, *vettore delle incognite* e *vettore dei termini noti*; questi sono definiti come segue

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{206}$$

In particolare un sistema lineare omogeneo ammette la rappresentazione matriciale

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \tag{207}$$

in cui $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ è il vettore nullo.

Definizione 0.4.3. Si dirà che $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è *soluzione* del sistema lineare considerato se verifica l'equazione (205) ([23]).

Definizione 0.4.4. Si consideri un sistema lineare con forma matriciale come in (205). La *matrice associata* al sistema è la matrice $(A\,|\,\mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n+1)$ ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathfrak{M}(m,0)$ $(\equiv \mathbb{R}^m)$ alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(m,n)$

$$(A\,|\,\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{208}$$

Si dirà che un sistema lineare è costituito da equazioni linearmente indipendenti (o dipendenti) se le righe della matrice ad esso associata lo sono.

Lemma 0.4.1. Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammette sempre come soluzione il vettore nullo

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{209}$$

Teorema 0.4.1. (*Teorema di Rouché-Capelli*) Un sistema lineare la cui rappresentazione matriciale sia come nell'Eq.(205) è risolubile se e solo se il rango della matrice ad esso associata $(A\,|\,\mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n+1)$ è uguale al rango della matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(m,n)$

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ è risolubile} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{rk}(A\,|\,\mathbf{b}) = \mathrm{rk}A = r \in \mathbb{N}\,. \tag{210}$$

[23] Ciò equivale a dire che le componenti del vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ costituiscono una n-upla che soddisfa il sistema lineare, cioè che queste sono una soluzione nel senso del punto 1) della Definizione 0.4.2.

Inoltre si ha che ([24])

i. se $r = n$ il sistema lineare considerato è determinato, cioè ammette una ed una sola soluzione;

ii. se $r < n$ il sistema lineare considerato è indeterminato, cioè ammette ∞^{n-r} soluzioni, nel senso che esistono infinite soluzioni dipendenti da $n-r$ parametri indipendenti.

Lemma 0.4.2. Ogni sistema lineare è equivalente al sistema lineare da esso ottenuto tenendo solo le equazioni linearmente indipendenti, ed eliminando le altre equazioni.

Osservazione 0.4.1. Per via del Lemma 0.4.2, un qualsiasi sistema lineare di m equazioni in n incognite risolubile è equivalente ad un sistema di r equazioni in n incognite, con $r = \mathrm{rk}A$, ottenuto dal sistema lineare di partenza eliminando $m - r$ equazioni linearmente dipendenti dalle equazioni di partenza.

0.4.2 Metodo risolutivo di Gauss

Si consideri un sistema lineare risolubile di m equazioni in n incognite come in (204), con rappresentazione matriciale come in (205). Poiché si assume che il sistema sia risolubile, la matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(m,n)$ e la matrice associata al sistema $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n+1)$ soddisfano

$$\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}(A \,|\, \mathbf{b}) = r \leq n \,. \tag{211}$$

Il *metodo di Gauss per la risoluzione di sistemi lineari* consiste nei seguenti passaggi.

1. Si verifica per mezzo del teorema di Rouché-Capelli che il sistema sia risolubile.

2. Si considera la matrice associata al sistema $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(m, n+1)$

$$(A \,|\, \mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) . \tag{212}$$

3. Si cerca di ridurre la matrice associata $(A \mid \mathbf{b})$ ad una matrice della forma seguente, in cui $D_{r,n-r} \in \mathfrak{M}(r, n-r)$ è una matrice qualsiasi, $O_{a,b}$ è una matrice di ordine (a,b) con tutte le componenti nulle, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ è un vettore qualsiasi e $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m-r}$ è il vettore nullo,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbb{1}_r & D_{r,n-r} & \mathbf{c} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} & \mathbf{0} \end{array}\right) \tag{213}$$

per mezzo delle seguenti operazioni

   i. scambio di due righe;

   ii. moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da zero;

   iii. somma di una riga con un multiplo di un'altra riga.

[24] Si ricordi che, per il punto 3) del Lemma 0.3.14, il rango di una matrice non può essere maggiore del numero di righe e del numero di colonne, perciò

$$\mathrm{rk}A = r \leq n \,.$$

4. Le soluzioni del sistema lineare considerato sono i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, le cui componenti sono determinate come segue
   i. le ultime m–r componenti sono dei parametri indipendenti arbitrari $x_{r+1}, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$;
   ii. le prime r componenti sono definite come
$$x_i = c_i - \sum_{j=m+1}^{n} d_{ij} x_j \ , \qquad \forall\, i = 1, \ldots, r \ . \tag{214}$$

Osservazione 0.4.2. Le operazioni i,ii,iii del punto 2 del metodo risolutivo di Gauss corrispondono rispettivamente alle seguenti operazioni sul sistema lineare di partenza.

i. Scambio di due equazioni nel sistema lineare.
ii. Moltiplicazione per un numero reale diverso da zero a destra e sinistra dell'uguale di una delle equazioni del sistema lineare.
iii. Somma termine a termine di una equazione con un multiplo (reale) di un'altra equazione del sistema lineare.

Esempio 0.4.1. Si consideri il sistema lineare di tre equazioni in quattro incognite
$$\begin{cases} -x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 2 \end{cases} . \tag{215}$$

Questo sistema può essere riscritto in forma matriciale come
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \, , \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} . \tag{216}$$

1. Si verifica facilmente che
$$\mathrm{rk} A = \mathrm{rk}(A \,|\, \mathbf{b}) = 3 \ , \tag{217}$$
   perciò il sistema è risolubile ed ammette ∞^1 soluzioni.
2. Si considera la *matrice associata* al sistema $(A \,|\, \mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(3,5)$ ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ($\equiv \mathfrak{M}(3,0)$) alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3,4)$
$$(A \,|\, \mathbf{b}) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) . \tag{218}$$
3. Si considera la sequenza di operazioni seguente.
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma alla terza riga la prima.
   iii. Si somma alla terza riga la seconda moltiplicata per -1.
   iv. Si moltiplica la terza riga per $-1/2$ e la seconda riga per -1.

v. Si somma alla seconda riga la terza moltiplicata per 5.

vi. Si somma alla prima riga la terza riga moltiplicata per -3 e la seconda riga moltiplicata per -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{ii} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{iii}$$
$$\xrightarrow{iii} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{iv} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{v} \tag{219}$$
$$\xrightarrow{v} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{vi} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) .$$

4. Le soluzioni sono i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ le cui componenti sono determinate come segue.

   i. L'ultima componente di $\mathbf{x}$ è un parametro arbitrario $x_4 \in \mathbb{R}$.

   ii. Le prime 3 componenti di $\mathbf{x}$ sono rispettivamente definite come

$$x_1 = -2 - x_4 \ , \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \ , \qquad x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_4 \ . \tag{220}$$

   Perciò le soluzioni sono date dai vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ della forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 - x_4 \\ -\frac{1}{2}x_4 \\ 1 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \ , \qquad x_4 \in \mathbb{R} \ . \tag{221}$$

0.4.3 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Si consideri un sistema lineare di n equazioni in n incognite tale che la matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(n)$ ad esso associata sia una matrice quadrata di ordine n invertibile

$$A \in GL(n) \ . \tag{222}$$

Per il punto 2) del Lemma 0.3.13, si ha allora un sistema la cui rappresentazione matriciale è

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{con} \quad \det A \neq 0 \ . \tag{223}$$

Il teorema di Rouché-Capelli permette di dimostrare facilmente il seguente Corollario.

Corollario 0.4.1. Un sistema lineare come quello in Eq.(223) è determinato.

Nel caso di sistemi lineari come quello in Eq.(223) esistono diversi metodi risolutivi. Uno di questi è il metodo di Gauss (valido per sistemi lineari qualsiasi) analizzato precedentemente. Altri metodi, validi *solo per sistemi lineari del tipo* (223) sono il metodo della matrice inversa e il metodo di Cramer che verranno ora discussi.

Il metodo risolutivo della matrice inversa

1. Si stabilisce se il sistema lineare è del tipo (223) verificando che il determinante della matrice dei coefficienti sia non nullo
$$\det A \neq 0 \; . \tag{224}$$

2. Si calcola la matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ ([25]), ad esempio con il metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa analizzato in precedenza.

3. La soluzione è ottenuta moltiplicando a sinistra per la matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ $(\equiv \mathfrak{M}(n,1))$ ([26])
$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{228}$$

---

[25] L'esistenza della matrice inversa $A^{-1} \in GL(n)$ è garantita dal fatto che la matrice dei coefficienti è invertibile $A \in GL(n)$ (si veda il punto 6) del Lemma 0.3.13).

[26] La dimostrazione è molto semplice. Si procede nel modo seguente.

i. Si moltiplicano a sinistra le espressioni su entrambi i lati dell'uguaglianza nell'equazione (223) per la matrice inversa A^{-1}, ottenendo
$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{225}$$

ii. A questo punto, si ricordi che
$$A^{-1} \cdot (A \cdot \mathbf{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \mathbf{x} \; , \qquad A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n \; , \qquad \mathbb{1}_n \mathbf{x} = \mathbf{x} \; , \tag{226}$$
rispettivamente per l'associatività del prodotto di matrici, per la definizione di matrice inversa e per la definizione di matrice identica. Quindi, ricapitolando, l'equazione (225) permette di determinare la soluzione $\mathbf{x}$ come
$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} \; . \tag{227}$$

Il metodo risolutivo di Cramer

1. Si stabilisce se il sistema lineare è del tipo (223) verificando che il determinante della matrice dei coefficienti sia non nullo

$$\det A \neq 0 \ . \tag{229}$$

2. Per ogni $i = 1, \dots, n$, si costruisce la matrice quadrata $A_i \in \mathfrak{M}(n)$ ottenuta sostituendo nella matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(n)$ la colonna i-esima con il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ($\equiv \mathfrak{M}(n,1)$)

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{230}$$

3. La soluzione del sistema lineare considerato è data dal vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, le cui componenti sono determinate come segue

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \ , \qquad \forall\, i = 1, \dots, n \ . \tag{231}$$

Un esempio

Esempio 0.4.2. Si consideri il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \tag{232}$$

In forma matriciale questo sistema lineare può essere riscritto come

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \ , \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} . \tag{233}$$

Si calcola il determinante della matrice dei coefficienti e si trova che

$$\det A = 1 \neq 0 \ , \tag{234}$$

perciò, per il Corollario 0.4.1, il sistema è determinato e si può determinare la (unica) soluzione per mezzo di uno dei metodi introdotti precedentemente.

Metodo di Gauss.

1. Si considera la *matrice associata* al sistema $(A\,|\,\mathbf{b}) \in \mathfrak{M}(3,4)$ ottenuta accostando il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathfrak{M}(3,0)$ ($\equiv \mathbb{R}^3$) alla matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3,3)$

$$(A\,|\,\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) . \tag{235}$$

2. Si considera la sequenza di operazioni seguente.
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma la prima riga alla seconda e alla terza riga.
   iii. Si scambiano la seconda e la terza riga.
   iv. Si somma la seconda riga moltiplicata per -3 alla terza riga.
   v. Si somma la terza riga moltiplicata per -1 alla seconda riga.
   vi. Si sommano la terza riga moltiplicata per 2 e la seconda riga alla prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \stackrel{i}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \stackrel{ii}{\to}$$
$$\stackrel{ii}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \stackrel{iii}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \stackrel{iv}{\to} \tag{236}$$
$$\stackrel{iv}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \stackrel{v}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \stackrel{vi}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) .$$

3. La soluzione è il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ definito come

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{237}$$

Metodo della matrice inversa.

1. Si è già verificato (si veda l'Eq.(234)) che la matrice dei coefficienti è invertibile.
2. Si determina la matrice inversa $A^{-1} \in GL(3)$ con il metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa, procedendo con i seguenti passaggi.
   i. Si scambiano la prima e la seconda riga.
   ii. Si somma la prima riga alla seconda e alla terza riga.
   iii. Si scambiano la seconda e la terza riga.
   iv. Si somma la seconda riga moltiplicata per -3 alla terza riga.
   v. Si somma la terza riga moltiplicata per -1 alla seconda riga.
   vi. Si sommano la terza riga moltiplicata per 2 e la seconda riga alla prima riga.

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \\
&\xrightarrow{i} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{ii} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{iii} \\
&\xrightarrow{iii} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{iv} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{v} \\
&\xrightarrow{v} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{vi} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) .
\end{aligned}
\tag{238}
$$

Perciò l'inversa della matrice dei coefficienti è

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} . \tag{239}
$$

2. La soluzione è ottenuta moltiplicando a sinistra il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ $(\equiv \mathfrak{M}(3,1))$ per la matrice inversa $A^{-1} \in GL(3)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{240}
$$

Metodo di Cramer.

1. Si è già verificato (si veda l'Eq.(234)) che la matrice dei coefficienti è invertibile.

2. Per ogni $i = 1, 2, 3$, si costruisce la matrice quadrata $A_i \in \mathfrak{M}(3)$ ottenuta sostituendo nella matrice dei coefficienti $A \in \mathfrak{M}(3)$ la colonna i-esima con il vettore dei termini noti $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Si hanno così le matrici

$$
A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{241}
$$

i cui rispettivi determinanti sono

$$
\det A_1 = -2 \,, \qquad \det A_2 = 2 \,, \qquad \det A_3 = -1 \,. \tag{242}
$$

3. La soluzione del sistema lineare considerato è data dal vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, le cui componenti sono determinate come segue

$$
x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-2}{1} = -2 \,, \tag{243}
$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2}{1} = 2 \; , \tag{244}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{1} = -1 \; . \tag{245}$$

Perciò la soluzione è

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; . \tag{246}$$

Bibliografia

[1] A. Guerraggio, *Matematica Generale* (Bollati Boringhieri, 1995).

[2] S. Lang, *Algebra Lineare* (Bollati Boringhieri, 2003).

[3] *http://en.wikibooks.org/wiki/Linear_Algebra* .