Resoconti di scritti
letti.

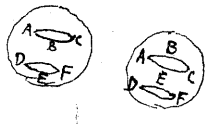
1

Klein. — Lezioni sulle funz. anal.e
(Leipzig. 1880-81). Vol. 1°

Estensione del teorema d'Eulero ad una rete segnata su una superf. qualunque: $E+P=K+2-2p$, ove p è il numero massimo dei contorni chiusi che si posson tracciare senza spezzare la superficie. Ne trae che p non muta mutando questi contorni.

Applica quella formola ad una superf. di Riemann a μ falde con ν punti di diramazione, tracciando delle linee chiuse che congiungano tutti i punti di diramazione che servono al passaggio fra due falde e che vengono a stare risp. sulle μ falde. Ed ottiene la formola $p=1+\frac{\nu}{2}-\mu$.

La sfera doppia di Riemann con $\mu=2$, $\nu=4$ si converte nell'anello staccando le 2 sfere e poi congiungendole prima lungo il taglio AC fra 2 punti di diramaz.e e poi lungo l'altro DF.



AP1

2

Rigate biquadratiche

(Cremona's Oberflächen, pag. 224)

1. Rigata ad una sola falda. Vi sono due quadriche fondamentali reali.

   Le direttrici possono esser reali (Typ. II, fig. 17[a])

   Od imaginarie (Typ. II, fig. 17[b])

2. Rigata a due falde a direttrici reali e le quadriche fondamentali tutte imaginarie (Typ. I, fig. 16[b]).

3. Rigata a due falde colle quattro quadriche reali.

   Le direttrici possono esser reali (Rohn, Typus I, fig. 16[a])

   Od imaginarie. (Rohn Typ. I. fig. 16[c])

4. Rigata imaginaria

   A direttrici reali (Typ. I)

   Od imaginarie (Typ. I)

AP2

3

Brani diversi per concorrere ad un libro sulla geometria moderna (1880)

Clebsch — Vorl. über Geometrie

Le direz. p. ciclici formano con tutte le altre direz. lo stesso ang. (inf. grande)
Difatto per $\operatorname{tg}\alpha = i$, si ha $\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = -i$. Di più $\operatorname{arc\,tg}\alpha = \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2}$, integrale infinito per $\alpha = i$ [mia dimostr. $\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{3} + \dots$]

Dunque mentre i p. distanti ∞ da ogni p. sono su una retta all'∞, le rette che fanno con ogni altra retta angolo in finito risviluppano i 2 p. ciclici.

2 rette perp. rapp. arm. con direz. p. ciclici

l'angolo di 2 rette è uguale al logaritmo moltipl. per $\frac{i}{2}$ del rapp. anarmonico che quelle rette formano colle direz. p. cicl.

1 cerchio è deter. da 3 punti

~~tutti~~ gli ang. iscr. ... sono uguali

2 diam. coni. sono perp.

assi rad. archi

Coniche — Fuochi come 4 inters. tg dei p. cicl.

Il segm. una tg mobile compreso tra 2 tg fisse è visto dal fuoco sotto ang. cost.

2 rette coni. pel fuoco sono perp.

Sistema confocale: ogni retta è toccata da una conica del sistema, per ogni punto 2 con. del sistema (v. dopo) le 3 coppie di p del sistema sono i p. cicl. — i fuochi — tutte le curve hanno assi comune che formano colle 2 all'∞ il tr. polare comune a tutte le curve del sistema — 2 coniche del sist. — ma si tagliano ortogonalmente in ogni punto — in particolare si ottiene che le tg in i p. di una con. fa ang. uguali ~~colle rette che~~ coi 2 raggi focali di quel punto. — per ogni p. del piano passano solo un' ellisse ed un'iperbole appartenenti al sistema

---

Salmon — Kegelschn.

Reciproche polari — La reciproca polare (rispetto a un cerchio fondamentale) di un cerchio qual. è una conica avente l'origine per 1 fuoco, la ~~direttr~~ retta corrispondente al centro di quello per direttrice. — quindi pag 629 e segg.

Due tang. 1 circ. fanno colla corda di contatto ang. uguali.

2 Le congiung. 1 fuoco all'inters. 2 tg biseca l'angolo sotto cui sono visti dal fuoco i 2 p. di contatto

4 Ogni ~~punto di~~ segm. 1 tg tra la curva e la direttrice è visto dal fuoco corrisp. sotto ang. retto

AP3

Annales de l'Ecole normale tome I. 2ᵉ série

Darboux

Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace

In un piano tang. al cerchio all'infinito tutte le quadriberali sono isoterme. Nella (2) sfera nulla A (A') passante pel cerchio C, la tangente da 1 p. del piano è costante, uguale a quella al cerchio (per tutte le sfere per C). Se si ha un altro cerchio rappresentato da B (B'), sarà $\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2$ e AB è la tg comune esterna, A'B' la interna. — Si vede che lorq. si prend. 2 punti rappresentanti i cerchi dont. les rayons sont pris avec le même signe, la distance de ces 2 points est la tg commune extérieure. C'est l'inverse quand les rayons des 2 cercles sont pris avec des signes différents. Donc la distance AB sera nulle toutes les fois que les deux cercles seront tangents intérieurement; si les cercles sont tangents extér., ce sera au contraire, A'B' qui sera nul.

Dunque se A, B, C rappresentano i 3 cerchi, per aver M che rappresenta il cerchio tg a quelli, sarà M uno dei 2 cerchi nulli passanti per ABC. — È quasi evidente che AC, AB, BC vanno a tagliar P in 3 punti a' b' c' che sono i centri di similitudine dei 3 cerchi a 2 a 2 e che 3 p. saranno su una stessa retta DD' che l'asse di similitudine.

Siano SS' i centri sfere nulle per ABC, tagliran P secondo 2 cerchi tg a dati, cioè S et S' sono a una distanza nulla tra le dense di A, di B et di C.

D'altronde SS' tg. fra P in p. O a dist. ugn. da A B C e quindi le tg dei 3 cerchi sono uguali, cioè centro radicale dei 3 dati.

In 2° luogo le dist. ogni p. di DD' da S S' sono ugn. e quindi le tg dei p. di DD' ai 2 cerchi tg rappresentanti da S S' sono ugn., ossia l'asse di similitudine DD' è l'asse rad. dei 2 cerchi tg.

Infine i cerchi (S) (A) essendo tg, le 2 sfere S, A son tg in tutti i p. di SA. I punto di contatto del cerc. A coi S S' sono sul piano A, SS', O.

Il piano SAS' contiene O, e di più la perp. al piano P' in A, cioè la polare di DD' rispetto alla sfera A. Questa retta e quindi il piano SAS' andran a passar in P pel polo a, di DD' rispetto ad (A), donde la costruz. di Gergonne.

La denomin. di fuochi del cerchio a quei 2 p. che lo rappresentano (Darboux, — Cayley propone conta fuochi) i son proiettati in un piano qual. secondo una conica e i 2 fuochi.

Darboux trova pure la soluz. gener. probl. proposto da Steiner: cerchio che taglia 3 dati sotto ang. dato.

Altra questione proposta dallo Steiner: costruire cerchio che ne tagli 4 dati sotto ang. uguali. — Anzitutto la serie cerchi per 3 dati D D' D'', di cui d d' d'' siano 3 fuochi. 1 sfera qual. per d d' d'' taglia P secondo 1 cerc. C che taglia D D' D'' sotto stesso ang. Dunque

AP 4

Tutti questi cerchi son in 4 serie di assi rad. e 4 assi di simm.
Tra essi il cerchio radicale e 2 cerchi G ai 3 dati
Costruire cerchio avente con 4 dato G com. dato

Il 1° che trattò di questi casi fu il Chasles nella Geom. Sup.
e poi nel ... poi Cayley dalle relaz. di Cayey! Poi Darboux
ed altri

AP4

5 Brani di storia della matematica

estratti dagli Elementi der Mathematik
del Baltzer

AP 5

1 Archimede considera una grandezza, una curva p.e., come un limite a cui s'avvicinano di più in più i poligoni iscritti e circoscritti, di modo che la differenza, che si c-
-ancelli in certo modo, divenga più piccola che una quantità data (metodo che perciò si dice di esaurimento) (Chasles Geom. Sup. pag. 556. Ed. 2ª). ~~Così vedesi~~ Si può veder qui il germe dei metodi infinitesimali, od almeno l'idea fondamentale, su cui essi riposano, specialmente nelle concezioni di Eratosth e di Eudoso. (idem).

2 Vièta (la data?) fondava l'Algebra..... Poco dopo (1637) Descartes pubblicava il suo libro «la Geometria» in cui pone le basi della Geometria analitica (vi si trova il metodo dei coefficienti indeterminati, e la regola dei segni). Un problema vi è che consiste nel condurre le tangenti alle curve geometriche qualunque e Descartes pel primo lo risolse.

1 ~~Più tardi~~ Nello stesso tempo Fermat dà di quel problema una risoluzione, il cui principio si estende alle curve trascendenti, e che riposava su considerazioni, che implicavano il calcolo dell'infinito e che i geometri i più illustri d'Alembert, Lagrange, Laplace, Poncelet, hanno riguardato come la vera origine dei metodi infinitesimali (ibid. pag. 567)

1 Roberval diede un altro metodo generale delle tangenti. Di più scrisse il trattato degl'indivisibili: un metodo generale pel calcolo delle grandezze curvilinee ed altre pure, aggiungendo egli in pubblicato uscì il «Metodo degl'indivisibili» del Cavalieri, libro che ebbe una grande celebrità. (ibid. pag. 567)

1 Pascal trovò al calcolo integrale nell'applicare il metodo degl'indivisibili alle questioni più difficili, come allo studio della cicloide, che allora occupava tutti gli spiriti (ibid. pag. 567)

2 Gli antichi considerate le sezioni coniche nel cono a base circolare avevano dal cerchio dedotto una proprietà di quelle curve e poi le avevano studiate isolate. Desargues estese alle coniche molte proprietà del cerchio e ~~dimostrò~~ così che le 3 specie di coniche godono delle stesse proprietà. Di più diede il suo teorema sull'involuzione. Pascal seguì il suo metodo, particolarmente nel suo trattato delle coniche, che andò perduto. Però nell'Essai pour les coniques lo dice (V. parole nella Gram. sup. del Schwoles. pag. 569). E forse dal teorema di Desargues egli dedusse quello sull'esagono.

3. Furono Fermat e Pascal che scoprirono contemporaneamente il calcolo delle probabilità (Appunti historiques del Theodey, pag. 63) e le combinazioni?

3. Pascal scoprì il triangolo aritmetico con cui si formano con facilità i coefficienti delle potenze di un binomio. Newton dà una formula che dà immediatamente ogni potenza di un binomio. Leibniz trovò le potenze di un polinomio qualunque.

4 Sturm scoprì il suo teorema importantissimo, ma dopo che Descartes, Rolle (?), Budan, Fourier (e che d'altri?) avevano già lavorato assai sulla separazione delle radici.

1 Kepler estendeva le ricerche di Archimede fondandosi sull'idea dell'infinito, e conducendo con ciò al calcolo infinitesimale. Egli giunse a forza di calcoli alle leggi del movimento dei corpi celesti. E Newton poi nei "Principii matematici della filosofia naturale" pose il principio della gravitazione universale, che comprendeva le leggi di Kepler. Ma l'idea di un'attrazione mutua dei corpi era allora in tutte le menti: Kepler, Bacone, Fermat, Roberval, ~~Elugin~~ Hevelius (?), Hook l'avevano emessa e ne avevano

intravedute le conseguenze. La legge relativa alle distanze era sconosciuta, è vero, e fu la prima scoperta di Newton; ma essa non poteva emanare a lungo nascosta (Chasles. id. pag. 472). Ma ciò che fu più ammirato Newton fuori gli sviluppi matematici da lui dati a quel principio, colla sola geometria degli antichi.

Osserviamo all'Astronomia dedicarsi Kepler, Huygens, Newton, Halley,

2 Trattando la geometria pura al modo degli antichi dopo essere stata coltivata da tanti grandi, e per ultimo da Halley, Newton e Maclaurin, cede il campo alla geometria di Descartes, ed al calcolo di Leibnitz. Quindi il calcolo infinitesimale applicato alle curve e alle superfici. Viene Eulero, col suo celebre teorema

5 Ma s'apre questo secolo ed ecco Monge e Carnot. Monge nella "Géométrie descriptive" stabilisce in questa un metodo preciso, che gli operai stessi potevano capire. Alla del resto già prima si doveva per forza rappresentare su un piano solo le figure dello spazio e perciò si erano usati metodi anche complicati. Ma già si proiettava ortogonalmente su piani fissi: Monge risolse tutti con 2 piani di proiezione fissi. — Nell'"Application de l'Analyse à la Géométrie" Monge continua, per così dire, la "Géométrie" di Descartes, cioè viene a considerare al contrario di questa le quantità infinitesime. Egli estese parecchi risultati di Eulero, che già anch'esso aveva applicato benissimo il calcolo infinitesimale alla ~~studio di~~ Geometria.

6. Ma Carnot si dà nella "Géométrie de position" alla geometria degli antichi,

senza ricorrere in generale al metodo di Descartes. Egli l'applica a provare che è inutile di dimostrare un teorema, come fin allora si era fatto, per ogni relazione possibile di posizione degli elementi di una figura (ed a questi il nome di Geom. di posizione), ma che bastava tutt'al più cambiare qualche segno in ne' singoli. Egli dà metodi di dimostrazione facilissimi e tinti nella Geometria di posizione, quanto alla "Théorie des transversales" riunisce in bell'ordine teoremi importanti e semplicissimi. Il suo celebre teorema sulle curve tracciate da un poligono lo ricavò da quelle di Newton.

6. L'impulso è dato: la Geometria Moderna è nata. Dalla scuola Politecnica escono valenti geometri. Il Dupin, il Poncelet ed altri combattono in favore della Geometria pura, che a poco a poco viene a costituirsi indipendente. Il Poncelet estende il metodo di proiezione; dà una teoria delle reciproche polari, studia il metodo delle trasversali come già il Carnot. Più fuori a poco a poco il rapporto doppio od anarmonico (Möbius in Germania, poi il Chasles). Si fa un passo avanti nelle dimostrazioni: con convenzioni essi segni i teoremi sono veri per tutti i casi della figura. Non solo, ma si introduce (Poncelet) anche l'idea che siano veri quando alcuni elementi diventano immaginari.

6 ~~Quadrangolo e~~ quadrilatero completo e incompleto (già), questo nome dal Poncelet e forse si usavano già prima nel Carnot (Géométrie de Pos.); più tardi in Steiner (System. Entw.) Quadrangolo. Kirkeck. — Segmenti e retta

7 Determinanti. — "La prima idea di venir in aiuto all'algebra colla formazione di aggregati combinatori che oggi vengono chiamati determinanti, proviene, come Dirichlet l'ha notato, da Leibniz. Nella lettera all'Hospital 1693 (Gerhardt 24) e dalle scritte Acta Erud. 1700 p. 200, in cui Leibniz espone la convinzione della fecondità della sua idea non pare essersi altro da cui si possa conchiudere che Leibniz si sia adoperato per più lontani frutti di quest'idea. La seconda scoperta dei determinanti per Cramer 1750 non rimase perduta, per i servigii che ne risultarono all'Algebra, parte per lo stesso Cramer, parte dopo una serie di anni per mezzo di Bézout, Vandermonde, Laplace, Lagrange. Specialmente fu Vandermonde (sur l'élimination 1771) che cercò di fondare un algoritmo dei determinanti, mentre Lagrange nella dissertazione sur les pyramides 1773 faceva uso dei determ. di 3° grado per problemi della geometria analitica in più grande estensione. Il principale attacco tuttavia alla più larga formazione del calcolo coi determinanti hanno dato le "Disquisitiones arithmeticae" 1801 del Gauss, ~~Portando dalla considerazione dell'algoritmo, che in~~ Cauchy et Binet 1812 stabilivano le regole generali per la moltiplicazione dei determinanti, con cui calcoli con aggregati difficili a sviscerarsi guadagnarono un'inattesa facilità. Del nuovo calcolo, che particolarmente Cauchy aveva coltivato si appropriava vantaggiosamente Jacobi 1826, i cui lavori del Journal de Crelle danno sicuramente prova di quanto possa prestare il nuovo strumento ~~nelle~~ in mano ~~del~~ maestro. Solo per mezzo delle dissertazioni di Jacobi "de formatione et proprietatibus determinantium" e "de determinantibus functionalibus 1841" divennero i determinanti proprietà comune dei matematici la quale d'allora in poi ha ricevuto da varie parti delle essenziali addizioni." (Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten, Vorrede zur ersten Auflage)

8 Notazioni algebriche. — Si usavano nomi per indicar numeri indeterminati (Diofante e sgg. dicevano ἀριθμός, res cosa, idem (l'incognita) e lo vediamo ancora nella risoluzione dell'eqn. di 3° grado da Cardano. Buttaldi Regiomontan che nel 1464 sostituiva al sistema sessagesimali usati dai matematici greci e dai successori il più comodo sistema decimale delle frazioni decimali (Baltzer. Mathematik, erster Band. 1879. pag. 41) (che solo più tardi nella 2ª metà del secolo XVI cominciò ad essere di uso generale) usava già i principii del calcolo letterale, che venne ad estendersi più tardi per Viète nella 2ª metà del secolo XVI. — I segni + e — che vediamo dal principio in Germania già nella 2ª metà del secolo XV sono secondo il Baltzer (idem. pag. 66) ed altri puramente la deformazione delle lettere p. m iniziali di più, meno, plus, moins, plus minus, che ancor gli Italiani ed i Francesi usavano e che probabilmente anche i tedeschi usavano anticamente. — Le differenze erano dagli antichi suddivise in eccessi e difetti. L'introduzione dei numeri negativi per questa distinzione forma un importante progresso, che quasi contemporaneamente al calcolo letterale fu ~~mat~~ cominciato nel secolo XVI ed ~~po~~ esteso nel secolo seguente (idem. pag. 69), ed in Viète vediamo già la distinzione tra i numeri affermativi (positivi) e negativi.

Si ha per k crescente all'infinito $\lim \frac{1^n+2^n+\dots+k^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$. (Baltzer. 83)

Questa legge, i cui principii si trovano già presso Archimede (Spirali 10) e la cui fu il primo passo al calcolo di integrali determinati ~~trovarono~~ sviluppata i matematici della 1ª metà del secolo XVII Fermat, Roberval, Pascal Wallis (id. pag. 83, tradotto)

9 I numeri immaginari vennero presi in considerazione dopo la risoluzione algebrica delle equazioni di 3° e di 4° grado e furono anzitutto chiamati "impossibili". Descartes nella

3 ~~g~~ una geometria distingue tra le radici delle eqn. le reali dalle immaginarie. Più tardi cominciarono i numeri complessi a venire considerati (D'Alembert ed Eulero), finchè Gauss ~~nel~~ fissava il concetto generale del numero ed introdusse il simbolo i, e nome "numero complesso, normale". Finalmente in questo secolo Cauchy ~~ed Eulero~~ perfezionò massimo la teoria: Cauchy introdusse la considerazione dei numeri "coniugati" e del "Modulo". (id. 107)

9 La prima traccia d'un calcolo con esponenti si trova in Archimede. Assai più recentemente fu introdotto l'esponente negativo e si estese colla scoperta dei logaritmi. Ma la nozione più generale di potenza fu data poi da Newton (111), che ad esempio considerò le radici come potenze d'indice frazionario.

9 I logaritmi furono scoperti e così nominati da Lord Neper che dava i logaritmi naturali del seno e della tangente. 1614. Il sistema volgare di logaritmi fu introdotto da Briggs. 1616. Indipendentemente dalla scoperta degl'inglesi costruì Bürgy un sistema di logaritmi mediante il calcolo delle potenze della base 1,0001. La quadratura dei settori iperbolici per mezzo dei logaritmi naturali fu insegnata nel 1668 da Mercator e Gregory. Più tardi poi la teoria dei logaritmi si andò perfezionando (1784), e si fecero tabelle logaritmiche per la somma e la differenza, come quelle di Gauss.

1 Calcolo infinitesimale (Lacroix) Fino Archimede; Cavalieri in Italia considerando le linee come composte di punti, le superficie di linee ed i volumi di superficie dava il suo metodo degl'indivisibili, e contemporaneamente Roberval in Francia, entrambi mossi dallo studio d'Archimede, che aveva trattato delle linee e delle superficie curve (Trattati sulla sfera e sul cilindro(?)). Del resto già prima (Lacroix), fin dal principio dello studio della Geometria si doveva riconoscere antagonisti che dopo lo studio della retta, del piano veniva quello delle curve, delle superficie curve, e l'idea di valori delle ~~curve~~ prese le altre deve essere nata ben presto. — Pascal, Fermat, Descartes. Grégoire de St. Vincent, Vallis (che primo studiò le serie), che cominciarono allora ad occupar di geometria e che contribuirono assai a far nascere il calcolo infinitesimale). — finalmente Leibniz (calcolo differenziale) e Newton (metodo delle flussioni, ecc) poi i Bernoulli. Ma il calcolo integrale riscontrava maggiori difficoltà e fu Eulero che ~~—~~ cominciò a coltivarlo veramente.

3 Una tabella dei coefficienti binomiali si trova prima del triangolo aritmetico di Pascal già presso Stifel Aritmetica 1544 (Baltzer. pag. 131). La formazione dei coefficienti stessi degli esponenti fu preparata dalle formule trovate da Fermat e Pascal dei numeri figurati. Il teorema del binomio per ~~coefficienti~~ esponenti interi positivi e poi per esponenti reali qualunque fu più tardi scoperto dal Newton 1676 (Lettere ad Oldenburg). Similmente Leibnitz 1695 (Lettera a Giovanni Bernoulli) scopriva il suo teorema sulle potenze di un polinomio.

3 Combinazioni (Baltzer 144) I principii dell'analisi combinatoria si trovano nel secolo XVI presso Buckley, Cardano ed altri. La prima dissertazione più lunga sulle combinazioni fu data dal Pascal nel 1650: egli ~~coincidendo~~ con Fermat spiegava la connessione dei numeri di combinazioni coi numeri figurati. Il lavoro di Leibniz "de arte combinatoria" 1666 contiene non tanto del nuovo teorico quanto parecchie applicazioni della teoria delle combinazioni e delle permutazioni. Finalmente nel 1713 Giacomo Bernoulli "ars conjectandi" ~~dava non~~ perfezionava questi studi.

3 La formazione dei numeri figurati, poligonali e poliedrali con sommazione progressiva viene ascritta alla scuola pitagorica. Il più antichi scritti su ciò sono di Nicomaco (e Diofanto?). Nei secoli XV e XVI furono studiati e finalmente nel XVII Fermat (1656 lettera a Roberval) e quasi contemporaneamente Pascal ne trovarono la formula sotto di quoziente di prodotti di numeri consecutivi. Più modernamente si svolse la teoria delle differenze finite, che Newton studiò assai e Bernoulli poi nell'ars conjectandi.

gli antichi conoscevano $1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$ per $n = 1$. Archimede per $n = 2$, ~~Sugg~~ Nicomaco per $n = 3$. Finalmente Fermat ed altri lo diedero per $n = k$ e finalmente per n qualunque. Per questo caso Giacomo Bernoulli "ars conjectandi" diede formule generali, per cui poi Eulero (Calcolo differenziale) li chiamò: numeri bernoulliani. Ciò c'legati coi num. figurati

3 Probabilità. — Problemi su questo furono congetturati posti e risolti ~~sulla fine~~ verso la metà del XVII specialmente da Fermat e Pascal. Poi Huygens stese quel calcolo e finalmente una teoria ne diede Bernoulli "ars conjectandi" 1713, e più andò completandosi (Moivre doctrine of chances 1717, Laplace théorie anal. des probab. 1812)

3 Frazioni continue. — Già da lungo dovevano essere note, non il primo ~~scritto~~ che ne parlò espressamente è quello ~~dotto di~~ di Lord Brouncker 1655 che ne fece uso. Huygens ne diede dopo 1683 una teoria, che venne a poco a poco estesa e perfezionata da Eulero, Lambert, Lagrange, Gauss, Möbius ecc.

1 Serie. — Newton pel primo usò delle serie infinite a rappresentare grandezze. Egli trovò pel primo le serie esponenziale e^x e quelle che danno $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ in funzione di x ma separatamente e solo più tardi Eulero mostrò la dipendenza di queste dalla serie esponenziale, come pure fu solo nel 1761 che Lambert pel primo dimostrò l'irrazionalità di e e di π. — Mercator e Gregory contemporaneamente 1668 trovano la serie logaritmica, e poco dopo anche ~~prima anche che~~ Newton ~~lo~~ indipendentemente da essi la trovò. Il Gregory e poi Newton e Leibniz scoprirono la serie $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \dots$ da cui il Leibniz deduceva $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Newton ne dedusse valori di π più comodi al calcolo, così ponendo $x = \frac{\pi}{6}$ si ha $\frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}^3 + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}^5 - \dots$, ~~od anche meglio ponendo~~ $x = \frac{\pi}{12}$

4 Equazioni. — Quelle di 1° grado a più incognite furono risolte nel modo d'oggi dal Leibniz, che adottava il moderno simbolo del determinante colla matrice nello scorcio del secolo XVII e poi più tardi (1750) fu ritornato dal Cramer. — Il primo passo alla risoluz. eqn. 2° grado è in Euclide, ~~ecc~~ e sta nel fare scomporre il 1° membro nella somma di 2 quadrati, così $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Ma l'eqn. è più risolta dagli arabi (Mohammed ben Musa ed altri ancor prima) e poco dagli indiani. — La radice reale dell'eqn. di 3° grado fu data Scipione dal Ferro 1505 e poi quasi subito da Tartaglia, che non la pubblicò ma la confidò a Cardano, che nel 1545 la pubblicò dandone la dimostrazione. — L'equazione di 4° grado venne risolta da Ludovico Ferrari e poi da Cardano 1545 e da Bombelli 1572 — L'equazione di 5° grado fu dimostrata nella metà di questo secolo da Hermite potersi fare ma con ~~equazioni~~ funzioni ~~trigonometriche~~ trascendenti. — L'impossibilità della risoluzione algebrica delle equazioni di grado superiore al 4° fu congetturata da Gauss 1799 e da Ruffini, ma non fu dimostrata realmente che più tardi assai da Abel 1825.

3 La risoluzione in interi dell'equazione $ax + by = c$ è proposta da Diofanto, ma non si ritrova che in Bachet de Méziriac (problèmes plais. 1624) e più tardi in Eulero, Lagrange.

3 Fermat (1640) dava il suo teorema (e Wilson nel 1770 il suo). L'equazione "pitagorica" $x^2 + y^2 = z^2$ si trova risolta in interi in Euclide: essa è, com'è noto risolta da $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$. Fermat poi enunciava che l'equazione $x^n + y^n = z^n$ è irrisolubile in interi per $n > 2$, ma non ci dava la dimostrazione, ed ancor non si riuscì a darla.

4 Funzione — La divisibilità di $f(x) - f(a)$ per $x - a$ fu provata nel principio del secolo XVII nella Geometria di Descartes. — Il fatto che la somma prod. ~~m~~ ad m rad. un'eqn. è uguale al rapporto coeff $m+1$ ino al coeff 1° era noto per casi particolari a Cardano, in generale a Viète più tardi. — Le somme pot. 2° rad., 3° rad., 4° sono in Girard 1629, ma più tardi Newton per ogni pot.

7

~~[illegible]~~ e oggidì tutte le funz. sinn. si sanno esprimere coi coeff. — Formula di Taylor 1715 — Riconoscimento radici multiple Hudde 1657. — Regola dei segni, scoperta da Harriot. ed in precisamente enunciata dal Descartes nella Geometria. — Teor. di Sturm (1829 all'Accademia di Parigi) — Teorema di Cauchy sui punti radice (1831 all'accademia di Torino) — Che ogni eqn. abbia rad. e quindi si fu indovinato da D'Alembert, Eulero, Lagrange. La 1ª dimostraz. è di Gauss 1799, che poi ne dare altre; ed una pur bellissima fu data da Cauchy 1821 (Teoret. Alg. Superiore)

8

~~sgg~~ i oggi di tutte le funz. sinom. si sanno esprimere col coeff. — Formula di Taylor 1715 — Riconoscimento radici multiple Hudde 1657. — Regola dei segni, seguita da Harriot. ed più precisamente enunciata dal Descartes nella Géométrie. — Teor. di Sturm (1829 all'Accademia di Parigi) — Teorema di Cauchy sui punti radici (1831 all'accademia di Torino) — Che ogni eqn. alg. ind. e quindi si fu indovinato da D'Alembert, Eulero, Lagrange. La 1ª dimostraz. è di Gauss 1799, che poi ne dare altre; ed una pur bellissima fu data da Cauchy 1821 (Exercit. Alg. Superiore)

8

Carnot, Gergonne, Steiner, Poncelet, Feuerbach studiano il cerchio

Gauss 1796 (dig. 17 a.) scopre che la divisione del cerchio in n parti ug. dove n è numero primo non si può in generale effettuare, salvo che contemporaneamente n − 1 sia una potenza di 2.

Gauss 1810 scopre che i 3 punti di ½ diagonali un quadrilatero sono in retta.

Steiner introduce il nome di potenza d'un punto

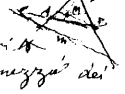
Archimede (?) aveva trovato considerando la circonferenza dell'poligono lato i limiti $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$ per π si trovarono poi da Apollonio e tra i moderni da Viète (1579), da Ludolph van Ceulen (1596) tra-- lori più approssimati (a motivo di quest'ultimo fu detto π il numero ludolphiano): Metzio, un costruttore di Ceulen diede $\frac{355}{113}$. Si eseguirono calcoli analitici di π da Viète, Vallis e Brounc-ker e finalmente si trovò la serie (Sc. Gregory, Newton, Leibniz)

Segmenti negativi son considerati dal principio del XVII secolo specialmente da Girard, Descartes, ecc. - Ma la differenza di segno tra AB e BA si trova per la 1ª volta in Möb-- bius 1827 (Barycentrischer calcul) introdotto nel calcolo geometrico

Gaultier 1812 introduce il nome di "axe radical". Poncelet usa ed estende così la co-- munità (propr. proj.). Magnus "Collineationsaxe" dei 2 cerchi. Steiner "Linie der gleichen Potenzen", Plücker "Chordale" dei 2 cerchi

Trasformaz. delle figure. — Già in Apollonio si trovano (luoghi piani) teoremi: 1° Se i p. M si congiungono ai p. A, B... di un cerchio e sulle congiung. si prende MA₁ . MA = MB₁ . MB = ... = p costante, i punti A₁, B₁ ... sono su un altro cerchio (Baltzer. 2° pag. 118). 2° in particolare se M è sul 1° cerchio, il 2° diventa una retta e viceversa ad ogni retta corrisponde un cerchio per M (ibid.). Questa affinità di figure in cui vi è anche una sfera colla sua forma stereografica è considerata sotto un punto di vista generale da Magnus (Aufgaben (2)), usata da Thomson (?), estesa da Liouville e finalmente detta dal Möbius Kreisverwandt-schaft e trattata nella sua Theorie der Kreisverwandtschaft 1855

La legge di Coloneo (Almagesto) sui 4 punti di un cerchio, come fu consi-- derata da lui? Möbius la diede per 4 p. qual. (ibid. pag. 120)

Trasformaz. — Duella  in cui ad M. m sono "armonicali" (Salmon-- Fiedler, Anal. Geom. der Kegelschnitte pag. 172, Wiezke verbesserte Auflage 1878)

L'area del tr. per mezzo dei lati è dimostrata geom. in Erone, Scritti ge-- odetici περὶ διόπτρας

Brahmagupta dà pel raggio del cerchio circ. $r = \frac{abc}{4A}$ (Chasles ?) ed an-- che l'area quadrilatero con i suoi lati.

Poncelet introdusse la retta all'∞ di un piano dopo però che era già stata no-- minata da Desargues (Steinmetzie)

Brianchon 1811 diede polo di una retta, Gergonne 1813 polare di un punto. La dualità in relazioni metriche fu osservata anzitutto nel triangolo sferico e nel suo triangolo polare da Viète, Vanaberg, Snellius. Quella nei rapporti grafici per figure piane e solide, nel principio di questo secolo osservando poli e polari. Fu detta dualità da Gergonne, reciprocità da Monge, Poncelet e Plücker.

~~[illegible]~~ (tradotto alla lettera dal Baltzer II pag. 152) le projezioni sono state usate dagli astronomi greci (Ipparco, Tolomeo ed altri) alla rappresentazione dell'apparente sfera celeste. Nel secolo XVI fu più lungamente sviluppata la prospettiva, già nota dall'antichità, finchè ~~alla~~ venne alla fine del 18° secolo la geometria descrittiva formata da Monge. A ricerche agrometriche ha usato pel primo nel 1640 le projezioni Desargues; l'importanza di quest'uno è stata posta in chiara luce dalla scuola di Monge, ma in particolare da Poncelet (proiez. proj.)

L'area del tr. sferico è data da Girard 1629, dimostrata semplicemente da Cavalieri 1632. Finalmente 1690 Brosco dà l'area di qual. pol. sferico.

Lexell studiava i tr. sferici. Scopriva e dimostrava 1781 il suo teorema: il vertice di un triang. sferico di base costante e di costante somma ang. alla base è su un cerchio (detto Lexelliano) passante pei vertici alla base. Teorema che Eulero dimostrava poi direttamente. — Lexell dimostrava 1782 che in un quadrilatero sfer. è un cerchio la somma 2 ang. opp. è uguale somma altri 2 ed il correlativo pel quadr. sfer. circoscr. ad un cerchio.

Già in Desargues c'è il teorema: se 2 t. sono prospettivi, i loro lati si tagliano su una retta. — Ma sull'omologia poi Möbius pas. Calcul (collinearen figuren chiamò le omologiche). Poncelet (homologiques) .... Chasles (ne introdusse il nome di "homographique" equivalente al "collineare"). Magnus chiamò collineazioni centrali, assiali, generazioni (retta limite). Le figure affini fu considerata da Clairaut 1731. Eulero che è dato tal nome, Poncelet, Möbius. — Poncelet diede come corrispondente nella Geom. dello spazio a quel teor. di Desargues: quando 2 tetraedri hanno i vertici posti 2 a 2 su 4 rette per 1 punto, le loro facce si tagliano 2 a 2 secondo rette di un piano. Il Chasles (Aperçu hist. pag. 564 ed 1875) lo generalizzò così: quando 2 tetraedri hanno i loro vertici posti 2 a 2 su 4 rette che sono le generatrici di un stesso iperboloide, le loro facce si tagliano 2 a 2 secondo 4 altre rette, che sono le generatrici di un 2° iperboloide.

Il teorema di Eulero $S_1+2 = A+F$ .... era secondo il Baltzer (Band. II pag. 213) probabilmente noto già ad Archimede. E del resto nelle Lettere inedite di Descartes 1860 lo si trova già. Eulero più tardi lo scoprì e fece noto.

Archimede dà non solo il cerchio, ma vol. e sup. della sfera nel libro su cilindro e sfera.

I centri di gravità tanto dei corpi fisici (figure materiale) quanto di figure geometriche sono anzitutto ricercati da Archimede ed usate nella Geometria (~~alla~~ quadratura della parabola, dell'equilibrio dei piani ~~su~~, dei corpi galleggianti). Uso del centro di grav. furono fatto da Pappo, e più recentemente da L'Huilier (1789 polygonométrie). Carnot (géom. de position 1803), Möbius (Barycentr. Calcul 1827) Steiner 1828

Il teorema sulla sup. e sul vol. generato dalla rotazione di una figura piana intorno ad una retta ~~fu~~ posto il nome di regola di Guldin. Alle ricerche sulle forme di rotazione furono ~~cominciate~~ fatte da Archimede (Sferoide e conoide) proseguite da Kepler 1615, che ~~considerò~~ trattò ~~casi~~ lungamente casi di quelle regole i quali era ignoto. Ma la regola fu trovata da Pappo, poi dal Guldin Centrobary. 1640 corretta di molto esempi, ma non ancora generalizzata. — Lubienic e poi Eulero estesero ancora ad altro modo più generale le rotaz. quei teor.

Tavole dei seni furono già date dagli antichi, ~~come~~ forse ~~quelle~~ le più antiche che si hanno da Tolomeo (Almagesto). Tavole delle tangenti furono costruite dagli Arabi nel nono secolo con quelle

Il problema di Rothenot (trovare il punto da cui è dato di un triangolo trigonometrico con vista sotto dato angolo) era già stato risolto dallo Snellius 1614: più tardi 1692 dal Rothenot, poi dal Lambert 1769 e da altri

Tavole delle secanti furono fatte nel secolo XVI ma con altri nomi. Divennero inutili quest'ultimi logaritmi.

Il nome di seno (sinus latino) comparve nel XII in una traduz. latina di un'opera astronomica dell'arabo Al Batani (circa il 900)

Il nome di cosinus di complemento sinus viene dal Gunther contemporaneo di Bigg. Quelli di tangente e di secante dal Fink (geom. rotundi 1583) che molto si applicò alla trigonometria

Le prime leggi della trigonometria sferica son contenute nel 3° libro della Sferica di Menelao e nel 1° libro dell'Almagesto di Tolomeo. Più tardi fu continuata questa disciplina per l'uso nell'astronomia dagli Arabi, e così di seguito. Nel Menelao ad esempio si trova già, ma altramente espressa la legge che nei triangoli sferici i seni degli angoli stanno come quelli dei lati. Pare dall'Almagesto che il teorema, che si trova nella Sferica di Menelao sul triangolo sferico tagliato da un cerchio massimo, fosse il fondamento dell'antica trigonometria sferica.

L'involuzione ~~fu~~ il suo nome da Desargues, che diede il suo celebre teorema. Già prima però Pappo parla di quella relazione tra i segmenti determ. dai lati di un quadrangolo sia non retto qualunque. Così l'uguaglianza dei rapporti anarmonici di un fascio e la retta che lo taglia era già stata data da Pappo nei lemmi ai porismi d'Euclide.

Da polare di un punto già era noto ad Apollonio ed altri ~~che~~ dividesse col polo armonicamente le trasversali.

11

Fine

AP5

— 6/ Malus Optique. Journ. Ec. Polyt. t. 7 (14ᵉ cahier) 1808
p. 1 – 44

Comincia considerando retta uscente da $x'y'z'$ con coeff.ti di i che io chiamo $\alpha\ \beta\ \gamma$, che egli chiama m, n, o. $\frac{x-x'}{\alpha} = \frac{y-y'}{\beta} = \frac{z-z'}{\gamma}$, e questi coeff.ti son date funz.i di $x'y'z'$. Scrive che la retta inf. vicina è incidente cioè deriva risp. $x'y'z'$, con $x\,y\,z$ fisse. $-\frac{dx'}{\alpha} + \frac{x-x'}{\alpha^2} d\alpha = \dots$ ossia $-\frac{dx'}{\alpha} + k\frac{d\alpha}{\alpha} = \dots$, $\left| \begin{matrix} dx' & d\alpha & \alpha \end{matrix} \right| = 0$ (numeratore di k nella mia pag 111)
Quest'equaz. determinante (sviluppata) vi si trova già. È la condiz. d'incidenza della retta $(x' \dots \alpha \dots)$ colla inf. vicina: equaz. che poste per $\alpha\ \beta\ \gamma$ le date funz. di $x'y'z'$ diventa di 2° grado in $dx'\ dy'\ dz'$, e rappresenta un cono di direz.i uscenti da $x'y'z'$ corrisp.ti all'incidenza: il cono di Malus di 2° ord.

Poi (p. 3) limita $(x'y'z')$ ad una superf. e ha una congruenza generale di rette; e quella equ. differ. dà le 2 direz.i d'incidenza (o l'intersez. del cono di Malus col piano tg. alla sup.) onde le 2 sviluppabili e le 2 sup. focali (tranne il nome) luoghi degli spigoli di regresso p. 5.

Pag. 7–8 dal cos ang. piani focali trae condiz. d'ortogonalità = rette normali a 1 sup.

Pag. 13 chiama sup. caustiche le sup. focali del sistema di r.i riflessi di una stella di r.i incidenti

Pag. 15 – 17 vi è già (per quel sist.a di raggi riflessi) un calcolo ~~simile~~ di densità (F nei vari p.i di un raggio (riflesso), con risultato $\frac{\text{cost}}{(D \pm R)(D \pm R')}$ ove $R.\ R'$ son le ascisse dei fochi, D l'ascissa del p. che si considera.

F (cioè clarté de l'image o intensité de la lumière)

(Malus) Suite du Mémoire de M. Malus sur l'Optique. — Dioptrique. Poi p. 84.

Rifrazione. Anche per la congr.ᵃ dei r.i rifratti di una stella di r.i ottiene l'intensità luminosa (come la densità in Hamilton.) con espressione simile a quella citata ora. P. 103 quella 1ª congr.ᵃ di r.i rif.ti è normale, ma le successive in generale no!

AP6

Hamilton Theory of Systems of Rays (1824) 1827 p. 69-173

La condiz. che $X dx + Y dy + Z dz$ debba essere un differ. esatto se la congr. è normale chiama V funz. caratteristica

Alla fine p. 173, poiché l'intensità luminosa può per ragioni fisiche non incluse nella legge di riflessione differire sensibilmente dalla densità, propone di chiamare questa Geometrical Density

Monge Journ. Ec. Pol. 2e cahier p. 145 Mém. Acad. des s. 1781 p. 684 (déblais et remblais)

Dupin Applications de Géom. et de Mécanique 4e Mémoire 1846

(v. Darboux II p. 278)

citare Lie Berührungstransf. p. 268-275

Monge Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais Mém. Acad. des sciences de Paris 1781, pag. 666. Vi è a p. 684 e seg. la decomposiz. della congr. delle normali ad 1 sup. in sup. sviluppab., linee di curvatura ecc. come le più convenienti per gli sterri e riporti

Hamilton 1° Supplem. p. 22 fine attribuisce a Malus quel che è di Monge

In Lie p. 271 nota ~~+++~~ 3ª a piè di pag. è notevolissima la frase "Einige ältere Verfasser haben wohl..."

J. J. Sylvester Algebraical Researches ... Phil. Trans. 154, 1864, p. 579 seq. (Note a p. 613)

Herein I think one clearly discerns the internal grounds of the coincidence or parallelism, which observation has long made familiar, between the mathematical and musical ἔθος. May not Music be described as the Mathematic of sense, Mathematic as Music of the reason? the soul of each the same! Thus the musician feels Mathematic, the mathematician thinks Music, — Music the dream, Mathematic the working life — each to receive its consummation from the other when the human intelligence, elevated to its perfect type, shall shine forth glorified in some future Mozart — Dirichlet or Beethoven — Gauss — a union already not indistinctly foreshadowed in the genius and labours of a Helmholtz!

AP7

AP8

8

Cremona Sulle tang.i sfero-coniugate
Annali di s. mat 6 (1855) p. 382-392

Tang.i sfero-coniugate in un punto P ad una superf. sarebbero la tg. in P ad una linea L della superf. e la tg. in P alla caratteristica di una ∞^1 di sfere tg.i alla sup. nei punti di L. ~~A tutta prima (p. 384 lin 8, o pag. 385 verso la metà, prima del teor.a)~~ Si noti bene che ~~quella~~ che il raggio k di quelle sfere ~~dobbe esser cost.; o meglio,~~ ~~fatto~~ dev'essere fissato per ogni punto della superf. Allora in ogni punto di questa si ha un'involuz. di tangenti sfero-coniugate, dipendente essenzialmente dal valore di k in quel punto P. ~~Ho verificato che~~ ~~Probabilmente~~ è l'involuz. di cui son raggi doppi le tang.i in P alla curva inters. della sup. colla sfera di raggio k. — A pag. 388 →

(1) AP8

1ª righe vi è l'enunciato "Teorema. Se si ha "una serie di sfere tangenti una superficie qual-"siasi lungo una sua linea di curvatura, quelle "sfere sono osculatrici della linea medesima in ogni "suo punto". Evidentemente assurdo!

A pag. 390 – 392 si scelgie successivamente k in vari modi $\left(\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right.$; $k^2 = R_1 R_2$; $k = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Ma gli enunciati che ne seguono contengon la frase "tangenti sfero-coniugate" senz'avvertire in che senso (cioè per quel valore di k); sicchè possono indurre in errore! Due tang.i in P alla sup. sono sempre sfero-coniugate (per un certo valor di k!). È ciò che non appare bene da tutto il contesto del lavoro

---

Si può generalizzare il concetto di tang.i coniugate e quello di tg.i sferoconiugate sostituendo agli ∞^2 piani tg.i, o a ∞^2 sfere tg.i di una data sup. F nei suoi ∞^2 punti un qualunque sistema

continuo Σ di sup. tale che in ogni punto di F vi sia una sup. tang. di Σ. Per ogni punto P di F si tiri una linea L, si considerino le ∞^2 sup. di Σ tang. a F nei punti di L, si prenda la caratteristica (passante per P) di quella sup. S di Σ che è tang. in P: la tg. in P a questa caratteristica e la tang. in P alla L si corrisponderanno in un' involuz.: quella che ha per raggi doppi le tg.i in P alla linea FS.

Per dimostrare ciò, ossia che le due tg.i in P prima nominate son coniugate armoniche risp. alle 2 tg.i in P alla linea FS, considero 3 superficie F, S e la Φ inviluppo delle ∞^1 sup. di Σ tg.i a F nei punti di L. Applico a queste 3 superf., tangenti in P allo stesso piano il teor. secondo cui le loro 3 curve d'inters. mutua hanno nel loro punto doppio P 3 coppie di tg.i appartenenti ad una stessa involuz.+) Dunque la curva $F\Phi$, e così la $S\Phi$ danno 2 rette doppie; onde ecc.

Si noti poi che il mio teor. gener. può derivarsi da quello ordinario relativo alle ordinarie

---

+) Le 3 superf. si rappresentino così: $z = a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2 + \dots$, $i = 1, 2, 3$. Sottraendo membro a membro le loro equaz.i si hanno le proj. delle curve inters.i e le coppie di tg.i risultan $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $\varphi_2 - \varphi_3 = 0$, $\varphi_3 - \varphi_1 = 0$, che sono appunto in invole.

tang.ti coniugate con una trasf. puntuale, purchè il sist. Σ si possa assumere entro un sistema ∞^3, sì che dicendo $\lambda\ \mu\ \nu$ i parametri, si possa l'equaz. di questo sviluppare in serie $\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\varphi_3 + \dots = 0$. Pare che allora per $\lambda\ \mu\ \nu$ convenientem. piccole si possa limitare Σ ai primi 4 termini: la trasformaz. $x'_i = \varphi_i$ muta allora quel sistema nel ~~sa~~ sistema dei piani, ed essendo trasform. <u>puntuale</u> tutto si trasporta...

Schläfli Briefwechsel Steiner-Schläfli p. 78 considera le curve rappres. da $\begin{Vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+b_{n-1} & a_2+b_{n-1} & \cdots & a_n+b_{n-1} \end{Vmatrix} = 0$, ove si segnano solo i gradi. ~~Assegna~~ Assegna come ordine $\sum a_i a_k + \sum a_i \sum b_\ell + \left(\sum b_\ell\right)^2 - \sum b_\ell b_m$

Cfr. Roberts, Giambelli, Stuyvaert (il genere?)
(Si trae dalle formole di Salmon su interseziali parziali)

Schläfli p. cit. dà esempi $C^5 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$; $C^6 \begin{Vmatrix} 2 & 3 \end{Vmatrix}$; $C^6 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; $C^7 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$, $C^7 \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$; $C^8 \begin{Vmatrix} 2 & 4 \end{Vmatrix}$; $C^8 \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$

AP9

Del Pezzo. Estensione di un t. di Noether

Non è dimostrato (nella nota posteriore esplicativa) che esista un ordine m così grande che 1° vi siano delle F^m aventi le stesse singolarità (con che si deve intendere — v. la detta nota — anche gli stessi piani tangenti, superf. osculatrici, ecc. quando le singolarità sono superiori); e in ogni modo non è ben precisato che cosa s'intenda dicendo le stesse singolarità: forse per ogni punto bisogna supporre che una trasformaz. la riduca a punti e linee singolari ordinarie — e contatti con sup. o linee fisse — e questi devon esser comuni perchè si dica le stesse singolarità superi); 2° che queste singolarità siano svincolate fra loro e con passaggi per altri punti ... (n. 2); 3° che quelle F^m formino un sistema lineare.

Il 2° punto non sembra essenziale.

Ma ammesso pur tutto, non è evidente che la trasformata di F^n mediante quel sistema sarà priva di punti singolari (n. 4), i quali potrebbero corrispondere (se non a gruppi di punti non fond.li di F^n, almeno) a punti fond.li della trasformaz., cioè singolari di F^n. E no-

AP10

tende che nel lavoro posteriore <u>Intorno ai punti singolari delle curve algebriche</u> egli adopera per la trasformaz. un sistema γ^m di curve avente <u>non</u> le stesse singolà della data γ^n, ma singolarità simili a quelle <u>delle prime polari</u> di γ^n. Anche qui del resto vi è la stessa lacuna.

Ricorrendo alle F^m <u>con le stesse</u> singolà della F^n bisognerebbe che: 1° in un punto sing. P fra le rette t_i ad F^n non ve ne fossero di <u>associate</u> pel passaggio di coni t_i in P alle F^m; 2° che le F^m t_i in P ad 1 t_i in P ad F^n non venissero perciò mai, accoppiandole, a dare più di 1 interse (delle 2 e di F^n) cadente in P; 3° cose analoghe per le <u>linee</u> singolari