

*(AP125)*

Battaglini - Sui complessi di 2° grado (connessi)

Una quadratura circoscritta al tett. fondato:

$$(1) \quad a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4 = 0$$

sia' un cono di vertice  $y$  quando:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{12}y_1 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 &= 0 \\ a_{12}y_1 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 &= 0 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{34}y_4 &= 0 \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 &= 0 \end{aligned}$$

dove moltiplicando la 1° per  $y_1$ , la 2° per  $y_2$ , la 3° per  $y_3$  e la 4° per  $y_4$  e sottraendo a due a due si ha

$$\begin{aligned} a_{13}y_1y_3 - a_{24}y_2y_4 + a_{14}y_1y_4 - a_{23}y_2y_3 &= 0 \\ a_{13}y_1y_3 - a_{24}y_2y_4 + a_{23}y_2y_3 - a_{14}y_1y_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$a_{12}y_1y_2 = a_{34}y_3y_4, \quad a_{13}y_1y_3 = a_{24}y_2y_4, \quad a_{14}y_1y_4 = a_{23}y_2y_3$$

$$\frac{a_{12}}{y_3y_4} = \frac{a_{34}}{y_1y_2} = c', \quad \frac{a_{13}}{y_2y_4} = \frac{a_{24}}{y_1y_3} = c'', \quad \frac{a_{14}}{y_2y_3} = \frac{a_{23}}{y_1y_4} = c'''$$

dove la (2) mostra che  $c' + c'' + c''' = 0$ . Allora la (1) diventa

$$(3) \quad c'(y_3y_1x_2 + y_1y_2x_3x_4) + c''(y_4y_2x_1x_3 + y_1y_3x_4x_2) + c'''(y_2y_3x_1x_4 + y_1y_4x_2x_3) = 0$$

Applicando i criteri andati a vedere pure che quest' equazione sotto la condizione

$$(4) \quad c' + c'' + c''' = 0$$

representa un cono di vertice  $y$ . La (3) si può anche scrivere tenendo conto delle

$$(5) \quad (c'' - c')(x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3) + (c''' - c')(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_4 - x_4y_2) + (c' - c'')(x_1y_4 - x_4y_1)(x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

ad anche tenendo conto della (4) e dell' identità  $(xy)_{12}(xy)_{34} + (xy)_{13}(xy)_{42} + (xy)_{14}(xy)_{23} = 0$ .

$$(6) \quad \frac{(xy)_{12}(xy)_{34}}{c'} = \frac{(xy)_{13}(xy)_{42}}{c''} = \frac{(xy)_{14}(xy)_{23}}{c'''}$$

di 2 eqaz. di cui una sola, a ragione della (4) e' indipendente.

A riguardo della (4) vi si dicono cosi' coni quadrati uscenti dal punto dato  $y$  e circoscritti al tettedro. Se  $y$  non e' dato la (6) rappresenta un complesso tethedre, supposto dato lo  $c$ . Ma se quel cono deve anche passare per uno punto dato  $a$ , sarà sostituendo nella (6):

$$\frac{(ay)_{12}(ay)_{34}}{c'} = \frac{(ay)_{13}(ay)_{42}}{c''} = \frac{(ay)_{14}(ay)_{23}}{c'''}$$

e quindi l'equazione del cono di vertice  $y$  e passante per i 5 punti dati e' :

$$(7) \quad \frac{(xy)_{12}(xy)_{34}}{(ya)_{12}(ya)_{34}} = \frac{(xy)_{13}(xy)_{42}}{(ya)_{13}(ya)_{42}} = \frac{(xy)_{14}(xy)_{23}}{(ya)_{14}(ya)_{23}}$$

La retta  $xy$  e' una generatrice di un tel cono. E' invece considerato il cono che ha

$$(8) \quad \frac{z_{12}z_{34}}{(ya)_n(ya)_{34}} = \frac{z_{13}z_{42}}{(ya)_{13}(ya)_{42}} = \left( \frac{z_{14}z_{23}}{(ya)_{14}(ya)_{23}} \right)$$

Se ogni punto dato  $y$  quest' equazione di un complesso tetraedro. E' per l'occa-  
sione fatto d'anzj se si ponе  $z_{ik} = (yx)_{ik}$ , cioè se si considera il cono  $\pi$   
del complesso corrispondente al punto  $y$ , esso e' appunto quel cono quadricio che  
passa per i 5 punti dati. Il qual complesso tetraedro appartiene la retta  $ya$ .  
Noi giungiamo così alle seguenti proprietà di un cono quadricio: «tutte le ge-  
neratrici di un cono quadricio tagliano le 4 facce di un tetraedro iscritto in esso  
secondo un rapporto anarmonico costante».

Se nella (8) si suppone invece data la retta  $z$ , essa mostra che  $y$  ha  
per luogo il cono, del complesso tetraedro corrisp. a quella retta, il quale corrisponde  
al punto  $a$ .

La (7) mostra che il luogo dei vertici dei coni quadrici passanti per  
6 punti dati e' una superficie di  $4^{\circ}$  ordine. Si chiede di dimostrarlo  
facilmente considerando le spaziali omografie sovrapposte. - Alla superficie appartenono  
le congiunti dei 6 punti e le 10 rette d'intesa delle 10 coppie di punti, cui appartengono quei punti a 3 a 3, e  
finalmente appartengono alla superficie le altre spaziali passanti per 6 punti.  
Si consideri un fascio  $\Pi$ : le coniche  $\gamma$  corrispondenti nel fascio di  
comp. tetraedri formano un sistema iscritto nel tetraedro, e le coni che  $\gamma$   
corrispondenti al punto  $a$  sono quelli formanti un fascio. Generano una curva

(\*) Il luogo dei vertici dei coni passanti per  $y$  (e quindi 8) punti dati e' una curva  
sgombra di  $6^{\circ}$  ordine, e finalmente i coni passanti per 8 punti dati (e quindi  $10^{\circ}$ ) sono 4.

di 6° ordine. « Il luogo dei vertici dei coni passanti per 5 punti dati e tangenti ad un piano dato c'è una sezione giacente in quel piano: essa ha dieci punti doppi (i punti determinati in  $\Pi$  dalle congiungenti dei 5 punti dati presi a due a due) allineati a tre a tre su 10 rette (quelle determinate in  $\Pi$  dai primi congiungenti a 3 a 3 i cinque punti dati); per ogni punto doppio passano 3 rette contenenti 7 di 10 punti doppi; i rimanenti 3 punti doppi sono allineati su una' altra retta.

m  
c

1

105

161.

(Dal Battagliini)

$$\text{completo } c_{12}x_{12}^2 + c_{13}x_{13}^2 + c_{14}x_{14}^2 + c_{23}x_{23}^2 + c_{24}x_{24}^2 + c_{34}x_{34}^2 = 0$$

$$(Battagl. Ff^2 + Gg^2 + Ll^2 + Mm^2 + Nn^2 = 0)$$

Superficie singolare:

$$c_{12}c_3c_4x_1^4 + c_{21}c_{23}c_{24}x_2^4 + c_{31}c_{32}c_{34}x_3^4 + c_{41}c_{42}c_{43}x_4^4 + (c_{13}c_{24} + c_{14}c_{23})(c_{12}x_1^2x_2^2 + c_{34}x_3^2x_4^2) + (c_{12}c_{34} + c_{14}c_{32})(c_{13}x_1^2x_3^2 + c_{24}x_2^2x_4^2) + (c_{12}c_{43} + c_{13}c_{42})$$

	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$x_4^2$
$x_1^2$	0	$c_{34}(c_{13}c_{14} - c_{24}c_{13})$	$c_{42}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})$	$c_{23}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})$
$x_2^2$	$c_{34}(c_{13}c_{14} - c_{24}c_{13})$	0	$c_{14}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})$	$c_{13}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})$
$x_3^2$	$c_{42}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})$	$c_{14}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})$	0	$c_{12}(c_{23}c_{14} - c_{24}c_{13})$
$x_4^2$	$c_{23}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})$	$c_{13}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})$	$c_{12}(c_{23}c_{14} - c_{24}c_{13})$	0

per punti singolari si ottengono i punti di vertice  
della piramide.

Che si tratta in genere con due coni di 4 piani (Piramide tetraedrica v. Salmon pag. 412)

Sei punti singolari ponendo:  $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ,  $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ,  $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

cosicché il cono corrispondente al vertice, se  $f_1 = 0$  ..., e così  $P_1 \rightarrow$  si dà la conica corris. alle facce 1, se avrà annullando i determinanti di 2<sup>o</sup> ordine del discriminante che i 16 punti singolari sono dati da:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad x_1 = 0$$

$$f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{e corrett. i 16 punti singolari.}$$

$$f_4(x) = 0$$

I punti coincidenti ai cui si riportano i coni corris. saranno per ogni punto singolare

$$c_{23}c_{42}y_2x_2 + c_{23}c_{34}y_3x_3 + c_{24}c_{34}y_4x_4 = 0, \quad c_3c_{34}y_3x_3 + c_{31}c_{14}y_1x_1 + c_{34}c_{41}y_4x_4 = 0$$

e corrett.

I punti singolari si hanno dunque nei 4 punti fondamentali:

$$\frac{x_1^2}{c_{34}(c_{23}c_{14} - c_{24}c_{13})} = \frac{x_2^2}{c_{42}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})} = \frac{x_3^2}{c_{23}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})}, \quad \dots \quad (\text{altri due})$$

$$\frac{x_4^2}{c_{14}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})} = \frac{x_1^2}{c_{34}(c_{23}c_{14} - c_{24}c_{13})} = \frac{x_2^2}{c_{13}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})}, \quad \dots \quad (\text{altri due})$$

$$\text{osserv: } \pm x_2\sqrt{c_{42}(c_{23}c_{14} - c_{24}c_{13})} \pm x_3\sqrt{c_{13}(c_{34}c_{12} - c_{32}c_{14})} \pm x_4\sqrt{c_{14}(c_{42}c_{13} - c_{33}c_{12})} = 0$$

$$\pm x_3\sqrt{\dots} \quad \pm x_1 \quad \pm x_4\sqrt{\dots}$$

(altri due) e corrett.

L'intersezione di un piano singolare dunque una conica degenera, l'intersezione di quel piano con una delle superf. di 2<sup>o</sup> ordine:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 0$$

$$\text{essendo } \Phi_1 = c_{12}c_{13}c_{14}x_1^2 + (c_{23}c_{14} + c_{13}c_{24})c_{12}x_2^2 + (c_{23}c_{14} + c_{12}c_{34})c_{13}x_3^2 + (c_{31}c_{26} + c_{12}c_{13})c_{14}x_4^2$$

$$\text{e analogam. } \Phi_2, \dots$$

con cui le sing. singolari si può scrivere  $x_i^2\Phi_i + f_i P_i = 0$  dove  $P_i = H^2 + Gz^2 + Lt^2$ . Quindi conseguentemente

Dalle equazioni appare che i 12 p. sing. su 3 facce del tetraedro sono a 6 a 6 (2 su ogni faccia) sui 4 piani tang. sing. passanti per vertice comune a quelle 3 facce, e correlat. anche ogni linea doppia continua 6 punti singolari ed ogni cono... tocca 6 piani tang. sing.

I correlat. delle  $\Phi$  siano le  $F$  e delle p. siano le  $\Pi$ , allora sulla faccia  $x_1 = 0$  la curva  $\Phi_1 = 0$  e' il luogo dei punti da cui le tang. alle coniche  $\Pi_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$  sono ortogoniche. E correlat.

Le rette singolari del complesso appartengono a quest' altro complesso.

$$\Delta = c_{12}c_{34}x_{12}x_{34} + c_{13}c_{42}x_{13}x_{42} + c_{14}c_{23}x_{14}x_{23} = 0$$

$$\Delta = Y_{12}Y_{34}\xi_{12}\xi_{34} + Y_{13}Y_{42}\xi_{13}\xi_{42} + Y_{14}Y_{23}\xi_{14}\xi_{23} = 0$$

che e' un complesso tetraduale relativo allo stesso tetraedro. Geometricam?

E conseguentemente  
di 16 punti sing. e i 16 piani sing. sono vertici e facci di 4 tetraedri di cui ciascuno e' isomorfo e inverso al tetraedro fondamentale.

Bonsuendo i coni  $\Sigma(T)$  le coniche corrispondenti ai vertici  $t$  ed alle facce del tetraedro, oppure le intersez.  $\sigma(T)$  di quei coni con le facce e gli sviluppi dei piani tang. condotti a quelle coniche dai vertici  $\Sigma(T)$  si puo' costituire il complesso. Infatti sia  $p_t$  un punto della faccia  $t$  e siano  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  i p. di contatto di  $\sigma(T)$ ,  $\sigma(T)$  coll tang da  $p_t$ . Saremo  $a, b, c, d$  i punti di contatto del tetraedroide  $\Phi$  coi piani tang.  $T(p_t)$  condotti dalle rette  $Tp_t$ ; siano  $(a', a), (b', b)$  le coppie di inters. di  $\sigma(T)$  con  $p_t a, p_t b$  (cioe' le coppie di p. in cui le tang  $p_t a, p_t b$  di  $\Phi$  in  $a, b$  incontrano di nuovo queste superficie) e siano  $(c', c), (d', d)$  le coppie di punti in cui le tang  $T_t$ ,  $T_d$  di  $\Phi$  in  $c, d$  incontrano di nuovo il tetraedroide; saremo  $(a', a), (b', b), (c', c), (d', d)$  le coppie di p. cui si riduce lo conico corrisp. ai 4 piani  $T(p_t)$  di  $\Phi$ ; considerando i 2 tetraedri corrisp.  $(Q', q')$ ,  $(Q, q)$  avuti per vertici i gruppi di punti  $(a' b' c' d')$ ,  $(a, b, c, d)$  e indicandoli con  $(A' B' C' D')$ ,  $(A, B, C, D)$  le facce opposte, saremo  $(A', A), (B', B), (C', C), (D', D)$  le coppie di piani cui si riduce il cono corrisp. ai punti  $(p)$  d' inters. del tetraedroide  $\Phi$  coll retta  $Tp_t$ ; le 4 rette  $(a' b', b' c', c' d', d' a)$  s'incontrano in un p.  $\Pi$  di  $cd$  e le 4 rette  $(a' b', a, b), (c' d', c, d)$  s'incontrano in un altro p.  $\Pi'$  di  $cd$ ; lo congiungendo i punti  $\Pi$  e  $\Pi'$  con i punti  $(p)$  con le rette principali corrisp. ai 4 p. principali  $(\Phi)$ ; le rette congiungenti i  $\Pi$ , cioe' le parallele  $cd$  di  $p_t$  risp. a  $\sigma(T)$  e le rette ~~corrispondente~~ alle rette  $Tp_t$  (polari); i vertici dei 2 tetraedri  $(q', q)$  sono i p. comuni ai coni

tutti corrispond. ai punti  $p$  della retta  $T_{P_1}$ , si abbia dato  $p$  si ottengono  
anch'essi 4 lati del cono corris. unendo  $p$  ai 4 punti  $(a'_1, a_1, b'_1, b_1)$  e  
similmente se ne avranno altri lati considerando invece della proj.  $P_2$   
di  $p$  fatta da  $T$  su  $t$  le altre proj. di  $p$  fatta dagli altri vertici  $\{f, g, h\}$   
sulle facce opposte di  $Q$ ; le facce dei 2 tetraedri  $(Q'_1, Q_1)$  sono  
i piani tang. comuni a tutte le varie corrisp. ai punti  $P$  per  $T_{P_1}$   
sicché le intersez. di  $P$  con quelle facce e le 2 rette prodotti da  $P$   
nel cono  $\Sigma(T)$  saranno tutte tang. delle 2 coniche corrisp.  
al piano  $P$  per  $T_{P_1}$ . — Correlat.

Per costituire il piano tang. al tetraedro  $q$  in un suo punto  $p$   
si determinino come fu detta la retta singolare (principale) secondo B.  
 $q\pi$  è 4 lati del cono corris. a  $\pi$ , e quindi questi sono che avrà quale  
generatrice: il piano tang. sia lungo il lato  $\pi p$  sarà il piano cercato.  
Correlat.

2 casi particolari. 1°. Se  $FL = GM = K$  ( $V=W=0$ ) e quindi  
anche  $correlat. \{h\}$ , allora le eqs.  $\Phi = 0, \Psi = 0$  del tetraedro si decompongono in:

$$\Phi' = Lx^2 + My^2 + Nz^2 + \frac{LMN}{K}t^2 = 0, \quad \Psi' = \frac{X^2}{f} + \frac{Y^2}{g} + \frac{Z^2}{h} + \frac{k}{fgh}T^2 = 0$$

$$\Phi_1 = \frac{x^2}{F} + \frac{y^2}{G} + \frac{z^2}{H} + \frac{K}{FGH}t^2 = 0, \quad \Psi_1 = lX^2 + mY^2 + nZ^2 + \frac{lmn}{k}T^2 = 0$$

(dove le lettere piccole sono correlate delle grandi); 2 quadriche  $(\Phi', \Psi')$ ,  $(\Phi_1, \Psi_1)$  aventi comune quadrilatero così gr. di contatto nei lati  $XY, ZT$  del tetraedro e i piani tang. per gli angoli  $xy, zt$ . Il complesso  $(A, \delta)$  si riduce a tutte le rette appoggiate su  $(XY, ZT)$  o su  $(xy, ZT)$ . Se  
ogni punto  $p$  di  $xy$ , o di  $ZT$  il cono corris. è circol. a  $\Psi'$  o a  $\Psi_1$   
e correl.; per ognuno dei 4 punti di contatto di  $\Phi'$  e  $\Phi_1$  il cono è  
2 piani circ. col piano tang. comune in  $p$  e correl.

2° se  $FL = GM = HN = K$ , ( $V = W = 0$ ) il tetraedro si riduce alle 2 rette coincidenti di 2° grado  $(\Phi, \Psi)$ :

$$\Phi = \frac{x^2}{F} + \frac{y^2}{G} + \frac{z^2}{H} + \frac{K}{FGH}t^2 = 0, \quad \Psi = lX^2 + \dots + \frac{lmn}{k}T^2 = 0$$

$$\Phi = Lx^2 + \dots \quad (V. sopra)$$

Il complesso  $(A, \delta)$  è indeterminato. Ogni punto  $p$  il compl. è delle tang. alla quadrica. Ogni  $p$  è ogni piano di queste è singolare.

AP 126

184.

Biehle's Journal. Bd 86. pag. 138

Sturm (Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve).

In generale se l'equazione di una conica lineare è

$$C = \alpha p_{12} + \beta p_{23} + \gamma p_{31} + \alpha' p_{34} + \beta' p_{41} + \gamma' p_{14} = 0$$

sarà, come è noto, se  $p$  e  $p'$  sono due rette conjugate cioè  $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \Delta$ ,

$$p'_{12} = -\Delta p_{12} + \alpha' C, \quad p'_{23} = -\Delta p_{23} + \beta' C, \quad p'_{31} = -\Delta p_{31} + \gamma' C$$

$$p'_{34} = -\Delta p_{34} + \alpha C, \quad p'_{14} = -\Delta p_{14} + \beta C, \quad p'_{24} = -\Delta p_{24} + \gamma C$$

dove si ottiene il momento delle due rette conjugate proporzionale a:

$$p_{12}p'_{34} + p_{23}p'_{14} + p_{31}p'_{24} + p_{34}p'_{12} + p_{14}p'_{23} + p_{24}p'_{31} = C^2 = (\alpha p_{12} + \dots + \gamma' p_{14})^2$$

e quindi al quadrato del valore che prende il 2° membro dell'equazione del cono per la sostituzione delle coordinate di  $p$ . (\*)

(\*) Ich mache diesen Zusatz wegen der bezüglichen Notiz in Salmon-Diederl, Raumgeom. 2 Aufl. I. S. 66.

AP 126

185

(Nov. Ann. 1872) Painvin - Étude d'un complexe du second ordre

1. Complesso delle rette da cui si possono condurre due piani tangenti contingenti ad un ellissoide.
2. Il cono del complesso corrispondente ad un punto ha per piani principali i piani tangenti in quel punto alle tre superficie omofocali all'ellissoide passanti per esso.
3. Alla superficie singolare è una superficie delle onde, parallela alla retta dell'ellissoide rispetto ad una certa sfera. La retta d'intersezione dei due piani in cui degenera il cono del complesso corrispondente ad un punto singolare è normale ad una superficie omofocale passante per questo.
4. Ogni conica del complesso ha il centro nel piede della perpendicolare condotta sul suo piano del centro dell'ellissoide. Ne segue che il luogo dei punti di mezzo delle coniche degenerate in coppia di punti è la geodra della superficie singolare relativa al centro dell'ellissoide.
5. La superficie singolare passa per l'intersezione dell'ellissoide dato colla sfera luogo dei vertici dei triadi trrettangoli circoscritti all'ellissoide, ed è iscritta nella sviluppabile circoscritta all'ellissoide ed all'assoluto.

Il cilindro del complesso corrispondente ad un punto all'infinito è retto ed essa inviluppa la superficie singolare. Il cerchio direttrice di quel cilindro è l'intersezione del piano tangente all'ellissoide perpendicolare alla direzione colla sfera luogo dei vertici dei triadi trrettangoli circoscritti all'ellissoide.

AP 127

la conica del complesso corrispondente ad un piano passante per l'asse dell'ellisoido ha questo punto per centro; e il luogo dei punti d'incontro di questo coniche è la superficie singolare.

L'intersezione di ogni piano principale dell'ellisoido colla superficie singolare si compone di una conica e di un cerchio; la conica non è altro che la conica del complesso corrispondente a quel piano principale.

Quando il cilindro del complesso corrispondente al punto all'infinito di un asse principale dell'ellisoido ha per traccia sul piano principale perpendicolare a questo il cerchio della superficie singolare.

Su ogni piano principale la conica focale dell'ellisoido passa per un punto d'incontro della conica e del cerchio della superficie singolare e vi tocca ortogonalmente quella conica; questa, la conica dell'ellisoido e la conica focale sono omofocali.

Il luogo dei punti i cui coni del complesso sono di rivoluzione è l'insieme delle curve focali dell'ellisoido dato (soltanto?). L'asse del cono è la tangente alla curva focale, e la sua generatrice posta in quel piano principale vi tocca la conica della superficie singolare.

I piani per cui la conica del complesso è un cerchio sono quelli perpendicolari agli assintoti delle curve focali, e i centri di quei cerchi stanno su questi assintoti, e il loro diametro sono determinati dalla posizione della

la traccia del piano interseca dal cerchio della superficie singolare.

Per i 16 punti doppii della superficie singolare vi sono i 4 punti d'intersezione della conica e del cerchio di questi posti su ogni piano principale. Su ciascuno di questi il piano doppio del complesso corrispondente è perpendicolare al piano principale ed ha la traccia tangente nel punto doppio a quella conica. Su quel piano doppio corrispond. al punto doppio la conica del complesso degenera in questo punto e nell'altro un punto d'intersezione col cerchio.

Su i 16 piani doppi vi sono i piani perpendicolari ai piani principali ed aventi su questi per traccia una tangente comune al cerchio ed alla conica della superficie singolare. La conica corrispondente a questi piani si riduce a due punti coincidenti sul punto di contatto col cerchio.

Collegamento del compl. di Poincaré col tetracrah.

2. Questa proprietà è in particolare di quest'altro: considerato il complesso come generato da 2 quadriche  $\Sigma, \Sigma'$  come insiemi, il cono corrispond. ad un punto qualunque ha per un trichio proprio - coniato quello proprio - coniato rispetto a quelle due quadriche: esso è così costituito dai 3 piani tangenti in quel punto alle 3 quadriche passanti per queste e formanti sistema con  $\Sigma, \Sigma'$ .

3. La proprietà generale correlativa è questa che quando una conica del complesso si doppia, le rette singolari che ne congiungono i 2 punti facendo parte delle linee di rette coniatae comuni alle 2 coniche intersezioni con  $S, S'$  sarà polare rispetto a queste del punto di un punto di contatto del piano con una quadrica del piano. — L'essere poi le rette singolari delle normali a quel sistema di superficie omofocali corrisponde all'essere in generale punto di un complesso tetracrah, e la proprietà delle normali di tagliare i 3 piani principali in segmenti di rapporto costante (Reye, II, pag. 173) corrisponde alla proprietà della costanza del rapporto anamorfoico.

4. Ogni conica del centro complesso ha il centro nel piede della perpendicularare condotta sul suo piano dal centro dell'ellissoide. In generale consideriamo la conica del complesso.

## 186, Steiner - Systematische Entwicklung etc

In quest'opera la nuova teoria usciva esposta in modo se non completo, almeno molto approfondito. Si può dire che tutti i principali quesiti vi sono risolti. Le forme geometriche delle varie specie e le possibilità del legare tra loro furono subito concepite completamente dall'Steiner (forse non dal Charles). Definiti queste forme lo Steiner passa a considerare retta (gerade, non punkthaber) e fascio, che definisce projektiv quando si possono disporre in modo da essere l'una sezione dell'altro. Da qui nasce l'ugualanza del doppio rapporto di 4 coppie di elementi corrispondenti. Ma dei 6 distinti rapporti doppi, lo Steiner non ne considera che 3, omettendo i 3 reciproci. Caratteristica delle 2 forme projektive gli trova l'ugualanza di 3 rapporti doppi formati in modo uguali agli elementi corrispondenti. Ciò è anche dovuto a che egli non considera i segni nei segmenti e negli angoli (benché in una breve nota allude a questo modo di distinguere i 2 elementi che altrimenti si ottengono dando il rapporto armonico di 4 elementi, di cui 3 dati). Da fascio e retta si passa a definire projektiv rette o fasci valendosi di una forma auxiliaria. Si studia la divisione armonica. Il punto all'infinito è considerato affatto secondo il metodo moderno. Completamente studiati i casi particolari della projektività, sia nelle forme in se stesse (similitudine, uguaglianza), sia per la loro posizione donde si hanno le forme perspettive. Vi si considerano le forme sovraposte e gli elementi doppi. A questo proposito.

9

le due forme sovraposte possono essere ungleichliegend (sempre 2 punti doppi), ovvero gleichliegend (2 punti doppi, ad 1 solo, o nessuno). Anche le costruzioni degli elementi doppi sono quelle usate oggi, e con' quelle degli elementi corrispondenti date più tardi. Bene dimostrate le proprietà armoniche del quadrilatero e del quadrangolo. Poi per la 1<sup>a</sup> volta si parla di quadrangoli completi e quadrilateri completi, anzi di «n-seit» ed «n-eck» completi. La costruzione degli elementi doppi si mette a risolvere il problema di costruire il poligono inscritto ad un dato e circoscritto ad un altro, tutti avendo lo stesso numero di lati.

Nel 2<sup>o</sup> capitolo abbiamo considerazioni nello spazio, senza figura disegnata, e a questo proposito l'A. espone quella sua giustissima opinione riportata poi dallo Schröter come epigrafe alla sua "Oberflächen 2ter Ordnung". Consideri cioè il fascio di piani e lo definisce projektiv ad una punteggiata o ad un fascio che ne siano regioni. Più tardi definisce 2 fasci di piani projettivi. Ba le varie proprietà che competono a questi egli nota l'ugualianza di rapporti doppi. Ma nota che in quest'opera capitale il rapporto doppio non ha l'importanza essenziale che si direbbe avere leggendo il Charles: invece le proprietà di ugualianza di rapporti doppi sono proprietà che lo Steiner enuncia, ma che non entrano che raramente nelle dimostrazioni, sicché la geometria steineriana uggerirebbe benissimo, anche se si togliesse il doppio rapporto. Ed ecco l'origine della Geometrie des Lages dello Staudt, geometria che forse non avrebbe potuto nascer-

AP 128

in Francia, in seguito agli studi imbevuti di relazioni metriche del Charles. Notò intanto come lo Steiner dì sui fasci di piani progettivi, sia prospettivi, sia in posizione obliqua, i teoremi analoghi a quelli sui fasci di rette, ed osservò giustamente l'analogia tra la geometria del cielo e quella della stella. Tagliando questi con una sfera concentrica, l'A. viene a dire brevemente dei fasci di cerchi massimi e delle punteggiate (su cerchi massimi) sulla sfera, dando poca importanza alla geometria della sfera, che a lui giustamente appare solo un caso particolare di quella della stella.

Nel 3° capitolo finalmente si considerano i risultati delle forme progettive. È anzitutto definito il cono di 2° grado come un cono qualunque a base circolare, ed una conica come sezione piana di un tal cono, osserva che il cerchio base si può generare con 2 fasci direttamente uguali e quindi progettivi, od anche come involucro dei « Projectionstahlken » di 2 punteggiate progettive (quest'ultima proposizione dimostrata un po' maleuccio) e ne deduce che in ogni cono di 2° grado ed in ogni conica si hanno forme ~~proiettive~~ operando nel modo corrispondente. Ma i poi lascia il ~~de~~ concludere subito senz'altro i teoremi inversi, com'egli fa, usc' ad esempio che 2 fasci di rette progettive generano, qualunque essi sieno, una conica? Scarsi di no. Fortamente noi quel modo di definire coni e curve di 2° grado non è il più conforme ai metodi moderni, tenché sia stato usato o da Steiner e da Charles. — Studia l'A. i casi particolari di quella generazione che danno casi particolari di coni e di coniche. Studi di alcuni

proprietà delle coniche, come conseguenza di quella generazione, fu il teorema di Pascal coi suoi casi particolari e coi teoremi correlativi. Fu la considerazione delle coniche come punteggiata di cui 4 punti si uniscono ad un 5° qualunque con un fascio di rapporto doppio costante e corretto. Di qui la considerazione di 4 punti o di 4 tang. armonici, il che dà luogo a bei teoremi, fino a concludere che le tangenti in 4 punti armonici sono armoniche e viceversa, ed a questo teorema: rispetto a 2 punti di una conica vi sono infinite coppie di punti di questi armonici coniugati rispetto a quelli, e ognuna di queste coppie giace in linea retta coll'intersezione delle tangenti nei primi 2 punti (ed il teor. correl.). Come si vede questo teorema apreva il campo alla teoria dell'involtuzione su una conica.

Lo Steiner passò quindi a parlare di poli e polari, per mezzo delle proprietà armoniche del quadrilatero circoscritto e del quadrangolo inscritto alla conica. E pare che egli avesse già formato una teoria dell'involtuzione basata sulle forme proiettive. Tuttavia non se ne serve in quelle poche pagine sulla polarità, ma in una nota dice assai chiaramente che questa teoria si può basare su quella dell'involtuzione. Il che egli farà nella 4<sup>a</sup> parte dell'opera! Luckato che quella non sia stata pubblicata!

Dalla generazione generale delle coniche passò poi lo Steiner ad alcuni modi particolari, tra cui citò solo quello di Mac Laurin e quello di Newton.

(1) Avverte il Weierstrass in una nota alla fine del volume che "è tratta appunto dell'involtuzione, teoria che lo Steiner introdusse più tardi nelle sue opere".

d'A. passa quindi a parlare dei risultati delle forme proiettive nello spazio, e particolarmente delle quadriche rigate. Procedendo sempre colla dualità, col metodo delle doppie colonne iniziato dal Gergonne, lo Steiner considera nello spazio due punteggiate proiettive e due fasci di piani proiettivi, le rette proiettanti le prime, e le intersezioni dei secondi; ma contemporaneamente è condotto a considerare il sistema di tutte le rette che ne tagliano 3 date, il che finisce per fargli concludere che i risultati delle prime e delle seconde forme omografiche sono una stessa cosa, ossia l'iperbolide rigato. E studia questa superficie in modo ammirabile e senza il menor uso di uguaglianze di rapporti doppi o simili. Studia poi nei vari modi di generarsi il paraboloido iperbolico, e finalmente i casi particolari della generazione delle quadriche rigate, p.e. l'iperbolide lungo delle spigole del dieciadue facce passand rispettivamente per due date rette. Applica le teorie precedenti a problemi riguardanti poligoni spezzati, le cui facce p.e. passano per date rette ed i cui lati tagliano altre date rette, ecc. Dimostra tra le altre cose la possibilità di costruire un tetraedro che sia nello stesso tempo iscritto e circoscritto ad un altro (questi tetraedri compajono, com'è noto, nella teoria delle cubiche spezzate).

Torna finalmente alla "dipendenza di figure di diverse specie". Abbiansi 2 piani e 2 rette: quei 2 piani punteggiati, come sezioni della congruenza lineare determinata da quelle 2 rette come assi avranno tra loro la corrispondenza quadratica, che studia lo Steiner. Su' la posizione dei 2 triangoli fondamentali

mentali giacenti in quei 2 piani non sono le più generali possibili: un vertice di ognuno dei 2 triangoli viene a giacere sull'intersezione dei 2 piani. Quindi questa retta corrisponde a se stessa punto per punto. Lo Steiner vede il partito che si può trarre da questa trasformazione: trova l'ordine della curva corrispondente ad una curva d'ordine n che passi o no per qualcuno dei punti fondamentali del suo piano. Deduce ad esempio dal teorema che in una conica incisa in un triangolo le congiungenti i punti di contatto coi suoi lati ai vertici opposti s'incrociando in un punto, quest'altro che ogni curva quartica avendo 3 cuspidi gode della proprietà che le 3 tangenti cuspidali concorrono in un punto. In tal modo di far corrispondere i punti dei 2 piani vien detto «schiefe Projection». Ed è il caso più semplice della trasformazione cremoniana effettuata col mezzo di due curve simili, come indicò il Cremona. — Analogamente si ottiene la corrispondenza quadratica tra 2 stelle, usando quelle 2 rette come fasci di piani invece che come punteggiati. Si fa così questa corrispondenza di piani a piani ma di coni a raggi ottenendo 2 stelle con 2 piani la corrispondenza nei punti di rette a rette o di coniche a punti. E analogamente poi per le stelle, e con stelle e sistemi piani combinati, anche si può dire che delle forme geometriche di seconda specie gli dà tutte le possibili combinazioni di corrispondenza quadratica. Alla fine poi nota che le 2 rette, il cui Stahlsystem serviva a determinare la corrispondenza di 2 piani o di 2 stelle, si possono riunire di

posizioni in guisa che, senza che in esse mutino i punti ad i piani, vengano a passare per uno stesso punto, ed a avere un piano comune. Lo Stahlsystem che prima si aveva, ed i due che ora si hanno (di cui l'uno è divenuto il sistema di rette di un piano, e l'altro il sistema di rette per un punto) si corrispondono in modo che nei 3 sistemi le rette si corrispondono ciascuna a ciascuna, che si corrispondono una Regelschaar (con poca esattezza lo Steiner dice «un hyperboloid») del 1<sup>o</sup>, una conico-inviluppo del 2<sup>o</sup>, ed un cono quadricico del 3<sup>o</sup> sistema; che quando quella Regelschaar contiene una retta ben definita del 1<sup>o</sup> sistema, le corrisponderanno un punto ed un piano nel 2<sup>o</sup> e nel 3<sup>o</sup>, e così via. Quindi lo studio dello  $\leftrightarrow$  Reg Stahlsystem, del piano rigato e delle stelle raggiate sono una stessa cosa ed ha ragione lo Steiner osservando che lo studio dello Stahlsystem non può dirsi studio dello spazio, ma sì delle forme di 2<sup>o</sup> specie. Naturalmente poi l'A. da queste ultime considerazioni trae la corrispondenza correttiva tra piano e stelle e quindi (togliendo questi o proiettando quelli) tra piano e piano o tra stelle e stelle. Ma da quelle stesse considerazioni egli mostra notarsi nuovamente ottenere la corrispondenza quadratica, sicché da questa come un caso particolare si ottiene quella di 1<sup>o</sup> ordine. Rinuncia poi notare che in un'altra parte dell'opera approfondendo di più quei concetti si studieranno anche le corrispondenze (di 1<sup>o</sup> e di 2<sup>o</sup> grado) degli spazi tra loro.

*R. Seydewitz — Gumert's Archiv für Math. u. Phys. (I. Theil 1839).*  
AP120

III Theil

Nueve Untersuchungen über die Bestimmung eines gleichseitigen  
Spiegelbild vermittelst vier gegebenen Bedingungen. — Continua le ricerche  
interruppee ad questo soggetto da Poncet e Bianchon nella loro memoria  
degli anni di Jergonne, dei quali anzi correge ed arriva. Dimostra  
per mezzo del rapporto armonico un teorema generale sulle coniche, che  
non è altro poi che un caso particolare di quello di Desargues, in cui  
i 4 vertici del quadrilatero sono coincidenti due in uno e gli altri due in  
un altro punto di una conica. Ponchon dice col teorema che il luogo dei  
centri delle coniche passanti per 2 punti fissi e tangenti a 2 rette fissi  
è l'asseme di due coniche, (ed dove Jergonne) (Annales, tom XI pag 393)  
cas considerazioni analitiche avendo concluso essere un luogo di 4<sup>o</sup> ordine,  
non decomposto in due coniche.

IV und V Theil

Bianco der involutischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Regel-  
schnitte — Scrive gli elementi della teoria delle forme proiettive e pro-  
iettive, tutta ~~questa~~ parte della System. Entr. dello Steiner. E' notevole  
la dimostrazione dell'esistenza di 2 punti doppi in due pantezzate proiettive  
sovraposte. Dimostra quella parte col teorema sui fasci e pantezzate omogra-  
fiche generate da punto e tangente di coniche e lo dimostra osservandolo  
sul cerchio poiché prima dimostra che la proiezione di un fascio  
di rette sopra un nuovo piano è proiettiva a quello. Come fece lo Steiner  
nel suo capolavoro, con qui il Seydewitz non considera i segni nei segmenti  
e negli angoli, sicché il doppio rapporto uguale ad 1 da la divisione or-  
monica. — Segue una teoria dell'involuzione, che non lascia quasi nulla  
a desiderare. L'involuzione su una retta è definita dal coincidere i due punti  
limiti di 2 pantezzate omografiche sovraposte, e di lì con dedotto i vari  
teoremi. Dopo ogni teorema sulle pantezzate dimostra il corrispondente sui fasci,  
anche quando lo teorema è metrico, sicché tutte le relazioni trigonometriche dei  
fasci omografici ed in involuzione vi si trovano. Pensa poscia a parlarne delle coni-  
che, cominciando, come è nel metodo moderno, sulla teoria di poli e polari,  
ma giunge ad questo teoria così considerazione di fasci proiettivi, che mi pare  
inopportuna. Come casi particolari poi deduce le forme del centro, dei dia-  
metri, degli assi, ecc. di una conica. E quindi passa ai noti teoremi  
sulle proprietà metriche delle coniche rispetto ai diametri stessi ecc., che  
possono darne l'equazione. Sono notevoli alcuni teoremi metrici da lui scoperti,  
che corrispondono dualisticamente a teoremi noti a Bianchi corda ideale quando  
una retta non taglia ma conica il segmento compreso tra quei 2 punti omologhi  
nell'involuzione di punti coniugati posti su quella retta i quali sono eguali  
- stanti dal punto centrale dell'involuzione e analogamente. La tangente ideale  
tangenzienwinkel. Alli lunghezza dei diametri coniugati egli fa corrispondere

angoli (tale l'uno, ideale l'altro delle 2 copie di tangenti alla curva condotte da 2 punti coniati di un'asse). Da il teorema che il luogo dei punti da cui partono tangenti perpendicolari è un arco. Sia passo ai fuochi, che definisce come punto isocentrico l'evoluzione di dette coniate rispetto alla conica è una rivoluzione d'angoli retti. E ne deduce tutti i teoremi principali che si conoscano sui fuochi e sulle dirette. Nel volume V poi, passa a considerare i sistemi di coniche, evincendo da due sole coniche: stabilisce coll'omografia il teorema che le polari dei vari punti di una retta rispetto a 2 coniche fissate sono 2 a 2 su una conica. Sia con bel modo giunge a concludere l'esistenza del triangolo reciproco coniato rispetto ad entrambe le coniche. Parla di 2 coniche passate al fascio ed al sistema di coniche, poi alle coniche avanti una seconda od un punto d'incontro di tangenti, come e da su queste figure teoremi assai interessanti ottenuti colla forma proiettiva e colla rivoluzione.

**IV Teil** — Ueber eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den durch Kegelschnitten einander umgeschriebenen Objezonen. — Breve scrittina interessante.

#### VII Teil

Zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

#### VIII Teil

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven (113 - 148)

#### VIII Teil

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittelst projektivischen Gebilde. (1 - 46) (Fortsetzung der ... etc.)

Ueber einige Eigenschaften des Punktes der kleinsten Entfernung (174 - 174). Contiene anche alcune considerazioni generali sulle curve, specialmente generate dalla rotazione di altre curve su rette o su curve.

#### IX Teil

Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittelst projektivischer Gebilde (158 - 214)

#### X Teil

Ueber eine Klasse geometrischer Fläze, deren Beweise auf keinen Größenbestimmungen beruhen, nebst einer elementaren Konstruktion des Mittelpunktes des einfachen Hyperboloids. (59 - 66)

Über den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels  
zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechsecks be-  
rührt. (202 - 203)

Lineare Konstruktion einer Kurve doppelter Krümmung (203-24)

XII Theil

Nova Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines  
gegebenen Vierecks berührt. (44 - 53)

XIII Theil

De ellipsi minima data quadrangulo circumscripto (54 - 68)

XIV Theil

Über die grösste und die kleinste Ellipse, welche durch zwei  
gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade berührt (364 - 387)

XVIII Theil

Leichtfassbarer Konstruktionsbegriff einer Fläche des zweiten Grades, von  
welcher nemn Punkte beliebig gegeben sind (245 - 297)

VII e VIII Theil

Darstellung der geometrischen Verwandtschaften etc. — Consideriamo in  
2 piani E due copie di punti corrispondenti  $M, M'$ ,  $M', M''$ . Ogni punto  $P$  del  
piano E sarà individuato dai 2 raggi passanti per esso dei 2 fasci  $M, M'$ , e  
con ogni punto  $P$  di E, dai 2 raggi per  $P$ , dei fasci  $M, M'$ . Stabiliamo  
omografie tra i 2 fasci  $M, M'$ , e tra i 2 fasci  $M', M''$ ; allora ad ogni punto  $P$   
corrisponde un punto  $P'$ , e viceversa. Dall'esame di questa «verwandtschaft» tra  
i 2 sistemi il Seydewitz deduce che a tutte le rette dell'uno piano corrispondono  
tutte le coniche dell'altro passante per 3 fondamentelpunkte (e dei quali  $MM'P$ )  
e si vale di questa affinità (scoperta dal Magnus: Aufgaben u. Beiträge) a di-  
mostriarsi moltissimi teoremi per via sintetica. Così da' teoremi sui sistemi di  
rette o su coniche si deducono nuovi teoremi sulle coniche (citro' solo questi  
2 che si deducono l'uno dall'altro: una conica qualunque è tagliata da un  
fascio di rette secondo un'involuzione, e una retta qualunque è tagliata da un  
fascio di coniche secondo un'involuzione). Ma li non si forma l'utilità di  
questo genere di corrispondenza, che serve a dimostrare proprio sinteticamente delle  
proprietà generali delle curve geometriche. Così il Seydewitz se ne vale a trovare  
sinteticamente il numero d'intersezioni di 2 tali curve, se darse di una data  
curva coll'influenza che vi hanno i punti multipli, il numero dei punti che  
individuano una curva di dato ordine. Ma in quest'ultima ricerca parte dal  
postulato che un punto in più conti in quel numero per un numero  $\varphi(m)$  di  
punto semplici indipendente dall'ordine della curva. E nella ricerca dei punti  
d'intersezione di 2 curve d'ordine  $m, n$  egli ammette che quel numero sia solo fun-

zione di  $m, n$  e prende perciò 2 curve aventi 1 punto  $m-1$  uplo ed  $n-1$  uplo rispettivamente; e così nella ricerca della classe di una curva d'ordine  $n$  ammette che l'influenza di un punto  $m$  uplo di quello non dipenda da  $n$  ma solo da  $m$ . Ora questi postulati non sono evidentemente corretti. Quelle dimostrazioni la stiano anche a desiderare dal lato della logica lunghezza. Tuttavia sono assai peggiori, le sole sintetiche ed esatte nello stesso tempo che io conosco. — Passa poi a dimostrare sinteticamente per mezzo di quest'affinità delle proprietà delle curve (di genere nullo) d'ordine  $n$  con un punto  $n-1$  uplo che dimostra potersi costruire graficamente alla sola riga, di curve del 3<sup>o</sup> ordine con 1 punto doppio, di 4<sup>o</sup> con 3 punti doppi, di 5<sup>o</sup> con 1 punto triplo e 3 doppi, ecc. Essi il teorema che se una curva c'è scritta in un triangolo le tangenti ai vertici cui punto opposto di contatto passano per uno stesso punto si traduce in quest'altra: le tangenti emigridali di una curva del 4<sup>o</sup> ordine avente 3 cuspidi passano per uno stesso punto.

Tornano poi ai casi particolari di quell'affinità. 1<sup>o</sup> prendendo i fasci  $M, M'$  rispettivamente uguali ai fasci  $M_1, M'_1$  ottiene 2 casi importanti in cui alle rette all'infinito dei 2 piani corrispondono cerchi oppure iperboli equilateri (circoscritte ai triangoli fondamentali); allora si possono considerando le proprietà dei cerchi e delle iperboli equilateri. 2<sup>o</sup> quando i due piani sono sovrapposti. Allora i fasci  $M, M'$  ed  $M_1, M'_1$  generano 2 coniche che determinano l'affinità. I 4 punti comuni sono i 4 corrispondenti ad se stessi. — Segue un accounte alle proporzioni simetiche che nel caso che 2 coppie di rette  $m, m'$ ,  $m, m'$  nei 2 piani danno la corrispondenza di rette a rette (e coincide a punti).

Ma poi si hanno casi particolari importanti, supponendo che alla retta  $MM'$  nel piano  $\Sigma$  come raggi dell'una fascia  $M$  corrisponda la  $M_1M'_1$  come raggi del fascio  $M_1$ , ovvero... Ma il caso principale poi è quello che  $MM'$  nei 2 fasci  $M, M'$  corrisponda ad  $M_1, M'_1$  nei 2 fasci  $M_1, M'_1$ . Si ha allora la collinearità; così pure se nei 2 piani le 2 coppie di rette  $m, m'$ ,  $m, m'$  hanno i punti d'inters. corrispondenti. Le poi si considera in un piano 2 punti  $M, M'$  e nell'altro 2 rette corrispondenti  $m, m'$ ; l'ipotesi analoga de' reciproca. E' con questo considerazioni che si apre il volume VIII. E qui studia sinteticamente collinearità e reciprocità sia in piani separati sia in uno stesso piano, gli elementi coincidenti ecc. e poi i casi particolari come l'omotetia e l'affinità e via d'acqua.

AP-130

138

Annales de Mathématiques (de Gergonne)

Come I (1810-11) — Come VII — V' è una dimostrazione analitica  
del cerchio tangente a 3 dati, la soluzione più semplice che ancora si  
conosca ed a cui egli giunge per via analitica, ma in modo ele-  
gantissimo. Dell' uno dei 3 cerchi prende il centro come origine e  
cerca il punto d' contatto di quel cerchio con quello cercato (tangente ad  
esempio esternamente a tutti 3. ma il metodo dà contemporaneamente quelli  
tangenti che ti contiene tutti 3). Ma per avere quel punto egli ne  
dov'anna  $x, y$  le coordinate, ma non le calcola subito, bensì cerca (ol-  
tre all' equazione d' quel cerchio dato) un' equazione a cui esse debban  
soddisfare, equazione di una retta, che egli trova essere soddisfatta  
in due modi diversi, cioè il 1<sup>o</sup> modo si ha se le coordinate  $x', y'$  di  
un punto della retta soddisfano a 2 certe equazioni, che sono di 1<sup>o</sup> grado,  
onde quella retta passa per i punti d' intersezione delle due rette rappresen-  
tata da queste equazioni. Il 2<sup>o</sup> modo dà un altro punto della prima  
retta cercata e ciò ancora coll' intersezione di due nuove rette. (Alla fine  
dello scritto nota un 3<sup>o</sup> modo di soddisfare l' equazione della prima retta  
che gli dà un 3<sup>o</sup> punto di questa, che trova essere il centro radicale  
dei 3 archi). Allora la prima retta si sarà costituita, avendone 2  
punti, e si ottiene così la soluzione grafica del problema. Il calcolo  
è condotto ammirabilmente e con molta eleganza.

Come VIII. — Entrò in lizza il Sonclet. Comincia ad dare  
 parecchi teoremi oggi più notissimi sulla conica, specialmente relazioni d'an-  
 goli relative ai fuochi. E siccome in un volume precedente del Gergonne  
 aveva preso la difesa della Geometria analitica abbassando un po' troppo  
 la sintetica (pare che a quei tempi si cominciasse a trovare gl'inconve-  
 nienti del metodo delle coordinate ed i molti vantaggi che ha su questo  
 sotto vari aspetti la geometria pura), il Sonclet scrive un articolo  
 molto ragionevole sui due metodi facendo vedere le costruzioni <sup>semplici</sup> cui  
 lo aveva condotta la geometria pura per la risoluzione di problemi come  
 questo: trivolare in una data conica un poligono di  $m$  lati passanti  
 per  $m$  punti dati. Di questo problema dà 2 costruzioni diverse, di cui  
 l'una che consiste nel far 3 prove rivede identica a quella del Chasles.  
 In particolare poi dice se gli  $m$  punti sono in linea retta bisogna  
 distinguere: se  $m$  è pari il problema è impossibile od indeterminato,  
 se  $m$  è dispari, è determinato. Il Gergonne in una risposta che  
 dà è costretto ad ammettere la superiorità del metodo sintetico in alcune  
 questioni come queste. — In un altro articolo il Sonclet parla  
 del metodo delle polari reciproche, considera una curva qualunque  
 d'ordine  $n$ , ecc. Per averne la classe prende il punto da cui si  
 conducono le tangenti all'infinito, il che è facile (proj.). Allora  
 se la curva è  $f(x,y)=0$  d'ordine  $n$ , i punti  $(x,y)$  di contatto

## 3

colle tangenti paralleli alla direzione fisica  $\frac{y}{x} = \alpha$  saranno sulla curva  $\frac{dy}{dx} = \alpha$ . ossia  $\frac{df}{dx} + \alpha \frac{df}{dy} = 0$ , curva d'ordine  $n-1$ . Sono dunque  $n(n-1)$  e di più si trova così che essi stanno sempre su una curva d'ordine  $n-1$ . Prima del Boucelet non si conosceva ancora nessuno di questi teoremi. (Si era solo trovato che le cose  $\epsilon < n^2$ ) Considerando poi la curva polare reciproca il Boucelet spiega come questo essendo d'ordine  $n(n-1)$  non sia che di classe  $n$ . Il che pare contraddirsi a quel teorema. Ma egli giustamente nota come quella non sia la curva generale d'ordine  $n(n-1)$ , ma una particolare. Basta ad esempio la parabola cubica, che è di 3<sup>a</sup> classe. Passo poi a particolarizzare sia riguardo alle curve - sia riguardo alla conica fondamentale.

*Boucelet* tutti 3 gli articoli si trovano nel II vol. delle *Applications*  
**Propre XI.** — Vi è la memoria di Boucelet e Brianchon  
 sull'iperbole egualitaria ecc... Una nuova costruzione del cerchio tangente a 3 dati (sfera tangente a 4, cono retto tangente a 3). Vi è il rapporto fatto da Banchy all'Académie sulla memoria sulle proprietà proiettive delle coniche. Il Gergonne cerca analiticamente il luogo dei centri di coniche soggette a varie condizioni, ma il Boucelet gli aveva già mandato una dimostrazione sintetica del teorema di Newton sul esso che le coniche siano tg a 4 rette dati.

6

Vi è un articolo di Flama sullo sviluppo di cosa medianti i  
centri degli archi multipli. Su questo ritornano diversi nei vol. seguenti.

Come XII. — Vi è quell'articolo di Soncet colta dimostrazione  
sintetica del teorema di Mutois e più in là delle ricerche sintetiche  
nel luogo dei centri delle coniche soggette a varie condizioni, in seguito  
al quale il Gergonne è costretto a rettificare un errore commesso nelle  
sue ricerche analitiche del tomo XI, in cui aveva detto che una certa  
equazione di 4<sup>o</sup> grado non era decomponibile, mentre è tale.

Come XV. — Vi è una costruzione del Poncet (Geom. descriptive)  
del cerchio di curvatura delle curve sghembe. Il Gergonne fa un'a-  
nalisi di una memoria del Dandelin sull'iperboloidi di rivolu-  
zione, pubblicata forse nel Vol. III delle Mémoires de l'Académie  
royale des sciences de Bruxelles, nella quale dimostra che la su-  
perficie generata da una retta che rotta intorno ad un'altro  
è tagliata da un piano qualunque secondo una conica, poiché  
la curva d'intersezione è il luogo dei punti le cui distanze  
da 2 fiber hanno una somma ad una differenza costante. Si  
ha così la costruzione dei fuschi ecc. ecc.

Come XVI — Rapporto di Cauchy sulla memoria del Poncet  
sugli i centri delle medie armatiche — Sturm : mémoire sur  
les lignes du 2<sup>e</sup> ordre (1<sup>re</sup> partie). — Gergonne : considérations

philosophiques sur la nature et les propriétés de l'etendue (comincia qui a parlare di dualità introducendo la scrittura a doppia colonna)

Come XVII — Breve memoria di Abel sulla risoluzione di due equazioni ad 1 incognita. — Seconda parte della memoria di Steiner sulle linee di 2<sup>o</sup> ordine, nella quale viene a daro il suo famoso teorema ed a dedurne conseguenze. Si ottiene per via analitica, la quale domina in tutta la memoria, benché non vi regni esclusiva. — Blücker manda due lavori: nell'uno, brevissimo, trova il cerchio osculatorio per le coniche; nell'altro, che c' sintetico, tratta dei contatti delle sezioni coniche — Gergonne: recherche des quelques lois générales qui régissent les lignes et les surfaces de tous les ordres<sup>(x)</sup> — Bobillier dimostra analiticamente e semplicemente che tutte le superficie di 2<sup>o</sup> ordine per 7 punti dati hanno i piani polari di un dato punto ~~passante~~<sup>per</sup> un punto fisso, donde il teorema corollario che ha questo caso particolare: le quadriche tangenti a 7 piani dati hanno tutte il centro su uno stesso piano, e quindi le quadriche tangenti ad 8 piani dati hanno il centro su una stessa retta. — Gergonne estrae dal Journal von Frello (1<sup>o</sup> volume?) una teoria di Steiner dei contatti ed intersezioni dei cerchi, colla quale si risolve ad esempio il problema di Malfatti: trovare 3 cerchi, ciascuno dei quali tocchi gli altri 2 e poi 2 dei 3 lati di un dato triangolo.

(x) Da' proprietà grafiche delle curve e superficie e ne scrive subito account e corrispondenti per dualità, coll'errore madornale di far sempre comprendere l'ordine  $n$  all'ordine  $n$ .

16

Come XVIII — Regola dei segni di Cartesio dimostrata da Gauss.  
(estratto dal giornale di Friburgo?) — Blücher: mémoire sur les contacts et intersections des cercles (analytico). — Ferguson dimostra analiticamente la proprietà delle coniche di un fascio. — Bobillier ~~la~~ <sup>la</sup> memoria. Una <sup>analitica</sup> recherche de quelques lieux géométriques dans l'espace (come il luogo del vertice del tricordio trirettangolo circoscritto ad una quadrica, ovvero avendo i 3 spigoli che scorrono su una conica). L'altra è: casai sur un nouveau mode de recherches des propriétés de l'étendue, in cui introduce la notazione abbreviata nell'equazione della retta o del piano ( $A=0, \infty$ ) e colla quale dimostra importanti teoremi sui circhi e sulle coniche (come l'esagono di Pascal, ecc.). Una terza <sup>et cetera</sup> memoria sur les coniques confocales. — Charles di nuovo ricorre in quest'argomento. — Charles: mémoire (synthetic) sur les propriétés des systèmes de coniques, nel quale studia ad esempio la relazione d'analogia di 2 coniche, gli "axes de symétrie", ecc. — Steiner propone di dimostrare dei teoremi sull'ogramma mistico, cioè: le 60 rette di Pascal passano 3 a 3 per 1 punto (di Steiner), dei quali almeno si hanno 20, che sono a 4 a 4 su 5 rette concorrenti in 1 punto; ed i teoremi corollari. — Charles: mémoire sur les projections stéréographiques et sur les coniques semblables et semblablement situées. — Bobillier ~~ora~~

7

abb 3 già' detta ha vari coserelle nelle quafi anch'esso fa co-  
-relativi ordine ed ordine. Importante la memoria: proprietà ana-  
-logues à celles des polaires et polaires dans les lignes et surfaces  
algébriques de tous les ordres, in cui per via analitica semplicissima  
ottiene la proprietà già' nota che i punti di contatto delle tangenti  
condotte da un punto qualunque (l'origine) ad una curva d'ordine  
m sono su una curva d'ordine  $m-1$ , detta polare di quel  
punto e sopra quest'altra (per la retta all'infinito, non proiettandone)  
che le curve polari dei punti di una retta passano per  $(m-1)^2$   
punti fissi, che chiama poli di quella retta; da' poi i due-  
mi correlativi (coll'errore dell'ordine correlativo all'ordine) e  
quelli analoghi per le superficie. Bobillier: "recherches sur les  
lignes et surfaces algébriques de tous les ordres", et "suite des  
recherches etc" (continua a studiarla la teoria dei più generali).

- Gergonne rectifica l'errore commesso confondendo l'ordine colla  
classe, come pure quello di Bobillier ringraziando in tuono melato  
« M. Poncelet dont les donnes bien que vaguement exprimées <sup>l'ont</sup> <sub>(questo vero)</sub> conduites à quelle rectification. — Poncelet, réclamation (dal Bul-  
-letin del Barone di Vernescac) et réponse de Gergonne. È' certo che  
il tutto è anche da parte del Poncelet, che se la prende con tutti, per-  
-sino col Blücker, pretendendo, che tutti abbiano letto il suo famoso

"Grafito", che qui non può che citare. E quando fa notare al Georges l'errore del far corrispondere ordine ad ordine b' fa proprio in modo che pare incerto su quale deve dire. Del resto c' è notevole che in quei tempi si trovano intragliati in generale a congiunti la classe  $m(m-1)$  corrispondente all'ordine (grado secondo Zargonne)  $m$ .

Bonno XIX — Galois: démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques — Bläckler: recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés (analitico, breve e bello). Dimostra ad esempio che tutte le curve di grado  $m$  passante per gli stessi  $\frac{m(m+3)}{2}$  punti fissi si trovano ancora in  $\frac{m^2 - m(m+3)}{2} + 1$  altri punti fissi ed il corollario. Più avanti si trova un analogo teorema per le superficie. — Bobillier: due teoremi su curve c' sugg. d' 2° ordine, e poi un "Mémoire sur l'hyperbole équilatère. « Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques » c' più in là "... les surfaces algébriques"; non c' altro che i teoremi già detti, ma ora in modo più semplice. — Chioèrnes sur les polaires successives. — Steiner: recherches des relations entre les rayons des cercles qui touchent 3 droites données sur un plan et entre les rayons des sphères qui touchent 2 plans donnés (per es. l'inverso dei raggi del cerchio inscritto ad un triangolo è uguale alla somma degli inversi dei raggi circ. ex-inscritti). Steiner: développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques (lungo, sintetico). — Démonstration de quelques théorèmes. — Phasles: recherches sur les projections

9

stereographiques et sur diverses propriétés des surfaces du 2. ordre.  
L'ergonne s' sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres.

Come XX (1829 - 30) — L'ergonne : exposition élémentaire  
des principes du calcul différentiel — des maxima et minima.

Come XXI <sup>ed ultimo</sup> — L'ergonne vi comincia un corso di matematiche  
pure.

AP 131

189

Dimostrazione di un teorema del Voss.

(Mathem. Annalen, Bd IX, s. 66)

Dato un complesso quadratico e la sua serie omofocale, composti cioè di complessi quadratici aventi gli stessi punti e gli stessi piani singolari, per ogni retta passano 4 di quei complessi quadratici, ed il loro rapporto armonico è uguale a quello dei 4 punti singolari (o dei 4 piani singolari) della retta stessa.

Suppongo noto il seguente teorema del Klein: i punti ed i piani singolari si corrispondono fra loro in modo che un punto singolare ed un piano singolare corrispondenti sono in posizione unita e determinano quindi un fascio di rette corrispondenti proiettivamente ai complessi della serie omofocale di guisa che un complesso di questa contiene come retta singolare la retta corrispondente di ciascuno di quei ( $\infty^2$ ) fasci. — E' posto sia dato nello spazio una retta  $r$  qualunque e no siano  $A, B, C, D$  i quattro punti singolari, di cui siano  $\alpha, \beta, \gamma$  i piani singolari corrispondenti nel modo sudetto; e consideriamo in particolare  $A$  ed  $\alpha$ . Se un complesso quadratico della serie contiene  $r$ , allora siccome  $A$  ne è un punto singolare, la cui retta singolare corrispondente sta su  $\alpha$ , il resto di quel complesso corrispondente ad  $A$  si uide in una coppia di piani (singolari) di cui uno passa per  $r$  e taglia  $\alpha$  nella retta singolare, che corrisponde

2

ad  $A\alpha$  rispetto al quel complesso quadratico. Quel piano singolare è dunque uno dei 4 piani singolari che, com'è noto, passano per  $r$ . Viceversa un piano singolare passante per  $r$  taglia  $\alpha$  secondo una retta, che considerato piano singolare ha per corrispondente nella serie omofocale un complesso quadratico per quale il centro del complesso corrispondente ad  $A$  si scinde in due piani (tagliantisi in quella retta singolare) di cui uno sarà il suddetto piano singolare passante per  $r$ , sicché  $r$  sarà una retta di quel complesso quadratico. Dunquid dal fatto che per  $r$  passano quattro piani singolari della serie omofocale segue anzitutto che per  $r$  passano per quattro complessi quadratici di questa serie, il che non si suppone noto. E in secondo luogo, poiché il rapporto anarmonico di quei 4 piani singolari passanti per  $r$  è uguale a quello delle 4 rette in cui così tagliano il piano  $\alpha$ , e queste 4 rette si vedono essere le rette singolari dei suddetti 4 complessi quadratici le quali appartengono al fascio  $A\alpha$ , segue finalmente dalla proposizione ammessa sul principio che il rapporto anarmonico dei 4 piani singolari passanti per  $r$  è uguale a quello dei 4 complessi quadratici passanti per  $r$ , come volevamo dimostrare.

Sembra si dimostrerebbe (o no segue per dualità) che se quest'ultimo rapporto anarmonico è uguale quello dei 4 punti singolari posti su  $r$  si ha dunque quest'altro teorema di Klein: I 4 punti singolari, ed

AP 134

i 4 piani singolari di una retta qualunque dello spazio hanno lo stesso rapporto anarmonico. — E' d'qui segue, come già notò lo stesso Klein, l'identità delle due superfici dei punti singolari e dei piani singolari, che cosi' riceve una dimostrazione semplicissima. Ess' è semplice ancora che quella del Klein, poiché il teorema di questo or ora enunciato ha cosi' una dimostrazione più breve e più naturale che quella del Klein. Non occorre più, come in questa, conoscere i teoremi del Blücher sulla sua superficie del complesso e dedurne l'esistenza di 4 complessi lineari rispetto a cui questo corrisponde a se stessa, per poi concludere l'ugualanza dei due rapporti anarmonici. E' inoltre questa viene dimostrata facendo uso sintetico di tutta la serie omofocale di complessi quadratici, e non di un solo di questi complessi; e ciò è più nella natura del teorema, poiché i 4 punti ed i 4 piani singolari sono tali per tutti i complessi della serie, non per uno solo.

Borrado Segre

P. S. Dal teorema dimostrato dal Voso si deduce immediatamente una proprietà caratteristica del complesso tetraedrale. In una serie omofocale vi sono in generale (6) complessi quadratici specializzati, come involucri, una volta. Per ciascuno può esservene uno doppiamente specializzato (V. mie ricerche), e quindi tale che ogni punto dello spazio a 5 dimensioni gli appartenga, come luogo.

(precisamente come nello spazio ordinario dopo la quadrica — involuppo una volta specializzata, cioè la conica — involuppo di piani, si presenta come quadrica doppialmente specializzata la coppia di punti, a, un, come luogo di punti, appartiene ogni punto dello spazio — nello stesso modo che la coppia di piani ha ogni piano dello spazio per tangente) Ogni tal complesso quadratico della serie di luoghi ad un fascio di complessi fondamentali, e viceversa. Il complesso tetraedrale va definito come quello che possiede 3 rette di complessi fondamentali nella classificazione dei complessi quadratici; quindi nella sua serie omofocale (composta tutta di complessi tetraedri collo stesso tetraedro singolare) vi sono tre complessi quadratici, i quali, considerati come luogo, contengono tutte le rette dello spazio. Quindi per tutte le rette di un complesso tetraedrale i 4 complessi della serie omofocale che passano per ciascuna di esse sono fissi, ed è quindi fisso il loro rapporto anarmonico; sicché applicando il teorema del Voso concludiamo che: «In un complesso tetraedrale il rapporto anarmonico, che su una sua retta qualunque è determinato dal tetraedro singolare, è costante.»