

180 Ad. Schumann - Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes
 (Schrift f. M. u. W. Bd 27. 1882 pag. 368-369)

Dati 5 punti dello spazio, il prodotto del tetraedro di 4 di essi per la potenza del quinto rispetto alla sfera passante per questi ha lo stesso valore assoluto, comunque si scelgano quei 4 tra i 5 punti.

Infatti considerando l'equazione, sotto forma di determinante, della sfera passante per 4 punti, dalla quale (se il coefficiente di $x^2 + y^2 + z^2$ è 1) si ha la potenza di un punto qualunque (x, y, z), e ricordando l'espressione del volume di un tetraedro, c'è chiaro che il prodotto considerato è in valore assoluto

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}$$

Ferdinando Ruffini - Sulla ricerca della conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche (Memoria R. Acc. sci. lettere e arti Modena Maggio 1872, vol. 13 pag. 3-17)

Il solo risultato notevole è che due coniche aventi doppio contatto:

$ax_1^2 + fx_2x_3 = 0$, $a'x_1^2 + f'x_2x_3 = 0$ sono polari reciproche rispetto a due coniche del loro fascio - schiera $\sqrt{aa'}x_1^2 \pm 2\sqrt{ff'}x_2x_3 = 0$ e rispetto a tutte le coniche della serie d'indice 2: $\sqrt{aa'}x_1^2 + wx_2^2 \pm \frac{1}{w}\sqrt{ff'}x_3^2 = 0$, dove w è un parametro arbitrario.

Lo stesso risultato viene trovato indipendentemente dal Battaglini nella Nota intorno alle coniche rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche tra di loro. (Atti Acc. Lincei, vol. 25, Aprile 1872, pag. 195-202). In questa nota il Battaglini dà molte le equazioni delle 4 coniche rispetto a cui due date sono polari reciproche espresse mediante queste coniche ed una conica covariante e con coefficienti che sono espressi dalle radici di 3 equazioni cubiche i cui coefficienti sono invarianti omologhi delle due date coniche.

Battaglini - Nota intorno alle quadriche rispetto alle quali due quadriche date sono polari reciproche tra di loro (Atti Lincei, Dicembre 1872, vol. 26 pag. 5-16)

Provata la posizione mutua notevole delle 8 quadriche soddisfacenti al problema considera il caso in cui le due quadriche date si tocchino in due punti qualunque, siam $xy = c'z^2 + d't^2$, $xy = c''z^2 + d''t^2$. Trova che esse sono polari reciproche rispetto alle 4 quadriche $xy = \pm z^2\sqrt{c'c''} \pm t^2\sqrt{d'd''}$ ed inoltre rispetto alle due serie d'indice 2 di quadriche $x^2d + \frac{y^2}{\theta} = 2(z^2\sqrt{c'c''} \pm t^2\sqrt{d'd''})$ essendo θ un param.

Se le due quadriche date hanno comuni 4 generatrici, cioè sono $h'xy = h'zt$, $h''xy = h''zt$, allora esse saranno polari reciproche rispetto alle due $xy\sqrt{h'h''} = \pm zt\sqrt{k'k''}$ ed alle serie doppiamente infinite di quadriche (con parametri α, β, γ): $\alpha x^2 + \frac{h'h''}{\alpha} y^2 = \gamma z^2 + \frac{k'k''}{\gamma} t^2$. — Le due quadriche si trovano lungo una conica: $x^2 + y^2 + z^2 = d't^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = d''t^2$, vi saranno le due quadriche $x^2 + y^2 + z^2 = \pm \sqrt{d'd''}t^2$, ed inoltre le due serie doppiamente infinite (parametri $\alpha : \beta : \gamma$):

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}yz + 2\sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}zx + 2\sqrt{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}xy = \pm t^2(\alpha+\beta+\gamma)$$

— Se di due quadriche una è polare reciproca rispetto all'altra esse avranno 0

4 generatrici comuni, ovvero una conica di contatto

193 Tracci - Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni.

(Atti dell'Acc. Lavoro, 1872, vol. 7^o pag. 772)

Indicando con A, B i determinanti $|a_{rs}|, |b_{rs}|$ d'ordine n e con α_{rs}, β_{rs} i complementi algebrici di a_{rs}, b_{rs} , si ha:

$$|a_{rs} + b_{rs}x| = AB \left| \frac{\alpha_{rs}}{A} x + \frac{\beta_{rs}}{B} \right|$$

Se in luogo delle a_{rs}, b_{rs} si pongono quantità del tipo $\lambda_r \lambda'_s a_{rs}$ e $\mu_r \mu'_s b_{rs}$ si avrà: $|\lambda_r \lambda'_s a_{rs} + \mu_r \mu'_s b_{rs}| = AB \left| \frac{\mu_r \mu'_s \alpha_{rs}}{A} + \frac{\lambda_r \lambda'_s \beta_{rs}}{B} \right|$ che comprende la formula precedente come caso particolare.

Tra essi seguono i seguenti corollari:

1^o. Se a_{rs}, b_{rs} sono i coefficienti di due sostituzioni ortogonali, si ha:

$$|\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}| = |\mu a_{rs} + \lambda b_{rs}|$$

2^o. Se agli elementi principali del determinante di una sostituzione ortogonale di grado n si aggiungono le quantità $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ovvero $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$, i due determinanti che ne risultano sono eguali se $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = 1$

3^o. Se n è dispari ed a_{rs}, b_{rs} sono i coefficienti di due sostituzioni ortogonali, si ha $|a_{rs} - b_{rs}| = 0$

4^o. Sotto $A = |a_{rs}|, B = |b_{rs}|$ ed $f(x) = |a_{rs} + b_{rs}x|$, si avrà $\frac{f(x)f(-x)}{AB} = |h_{rs} - k_{rs}x^2|$, essendo

$$h_{rr}k_{s1} + h_{2r}k_{s2} + \dots + h_{nr}k_{sn} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \geq s \\ 1 & \text{se } r = s \end{cases}$$

Ponendo inoltre $H = |h_{rs}|, K = |k_{rs}|$ e indicando con S_m la somma di tutti i minori d'ordine m di H moltiplicati nei rispettivi coniugati, e con T_m la somma analogia per K si ha: $HK = 1, B^2 S_m = A^2 T_{n-m}$,

$$\begin{aligned} f(x)f(-x) &= (-1)^n B^2 (x^{2n} - S_{n-1} x^{2n-2} + \dots \mp S_1 x^2 \pm H^2) = \\ &= (-1)^n A^2 (K^2 x^{2n} - T_{n-1} x^{2n-2} + \dots \mp T_1 x^2 \pm 1) \end{aligned}$$

154 Siacci - Intorno ad alcune trasformazioni di determinante
(Annali di mat. serie 2^a, tomo 5^o pag. 296 - 304)

Viene in sostanza a dimostrare il suo teorema che

$$|\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}| = AB |\mu x_{rs} + \lambda \beta_{rs}|$$

facendo prima la sostituzione di determinante A, che gli dà

$$|\lambda a_{rs} + \mu b_{rs}| = A \begin{vmatrix} \mu h_{11} + \lambda & \cdots & \mu h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu h_{n1} & \cdots & \mu h_{nn} + \lambda \end{vmatrix}$$

dove $h_{ts} = \sum_r a_{rt} b_{rs}$ e poi una nuova sostituzione di determinante B, ma il metodo non è bello perché si vale ripetutamente del fatto che quei determinanti avendo le stesse radici $\frac{\lambda}{\mu}$ non differiranno che per un fattore che viene determinato con ipotesi particolari.

Se nel determinante di una sostituzione ortogonale di grado pari si sottrae l'unità da tutti gli elementi principali e si prendono pascia i complementi di questi, tali complementi sono tutti uguali alla metà del determinante col segno cambiato.

155. Siacci - Questioni (Giornale, vol. 10 pag 188)

V. Atti Acc. di Torino. - A pag. 307 dello stesso vol. del Giornale c'è dimostrata la questione 5 sulla trasformabilità delle due coppie di forme quadratiche estipiche. Ma la dimostrazione, pur diversa da quella dello Siacci, si basa ancora sull'enumerazione delle costanti

La dimostrazione data da D'Orsio (pag. 313 - 319) per gli spazi a 1.2.3 dimensioni serve solo per il caso più generale.

AP105

156. D'Onofrio - Sulle relazioni metriche in coordinate di rette
(Giornale di Matem. Vol XI. 1873)

Assumendo come coordinate y_{ik} di una retta riferita ad un tetraedro fondamentali i rapporti dei volumi dei tetraedri determinati da un segmento qualsiasi = 1 preso sulla retta e dagli spigoli $P_i P_k$ del tetraedro al volume V di questo, passeranno tra esse le relazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{12}y_{34} + y_{13}y_{42} + y_{14}y_{23} = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum y_{ik} y_{pq} P(mn, rs) = 1 \end{array} \right. \quad \begin{matrix} (ikmn = 1234, 1342, \\ \text{sei permutaz. pari}) \end{matrix}$$

dove, dicendo δ_{ik} la lunghezza ($= -\delta_{ki}$) dello spigolo $P_i P_k$, si ponzi:

$$P(mn, rs) = \delta_{mn} \delta_{rs} \cos(P_m P_n, P_r P_s) = \frac{1}{2} (\delta_{ms}^2 + \delta_{nr}^2 - \delta_{mr}^2 - \delta_{ns}^2). \quad \text{le coordinate } y \text{ si possono anche definire altrettanto. Se } M_{ik} \text{ e il momento}$$

della retta ~~rispetto~~ a dello spigolo $P_i P_k$, sarà $y_{ik} = \frac{M_{ik}}{\delta_{mn} \delta_{mn} (P_i P_k, P_m P_n)}$.

Ognuna, dicendo c_{ik} le componenti, del segmento = 1 preso sulla retta, secondo gli spigoli $P_i P_k$ del tetraedro, cosicche' $M_{ik} = c_{mn} mom(P_i P_k, P_m P_n)$, sarà:

$$y_{ik} = \frac{c_{mn}}{\delta_{mn}}.$$

Considerando due rette R, R' di coordinate y_{ik}, y'_{ik} , si avrà:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} mom(RR') = 6V(y_{12}y'_{34} + y_{13}y'_{42} + y_{14}y'_{23} + y_{12}y'_{13} + y_{14}y'_{12} + y_{23}y'_{14}) \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(RR') = \sum y_{ik} y'_{pq} P(mn, rs) \end{array} \right. \quad (ikmn, pqrs = 1234, 1342, 1423, 2134)$$

da (2) e da (4), di cui la (2) è conseguenza si possono anche scrivere altrettanti. Ponendo $Y_i = y_{km} + y_{mn} + y_{nk}$ ($ikmn$ permutaz. pari)

e così Y'_i , si avrà:

$$(4') \quad \cos(RR') = -\frac{1}{2} \sum Y_i Y'_p \delta_{ip}^2 \quad (i, p = 1, \dots, 4)$$

$$(2') \quad \sum Y_i Y'_p \delta_{ip}^2 = -1 \quad (ip = 12, 34, 13, 42, 14, 23)$$

Coordinate $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, x_{\alpha_4}$ di un punto P_α sono le distanze di questo dalle facce del tetraedro; sono legate dalla relazione (dicendo a_r le aree di quelle facce):

$$\sum a_r x_{\alpha r} = 3V \quad (r = 1, 2, 3, 4)$$

o dicono coordinate quadriplanari. Le quantità $\frac{a_r x_{\alpha r}}{3V} = z_{\alpha r}$ dicono coordinate tetraedriche o baricentriche di P_α e sono legate da:

$$\sum z_{\alpha r} = 1$$

Coordinate quadriplante $\xi_{\lambda_1}, \xi_{\lambda_2}, \xi_{\lambda_3}, \xi_{\lambda_4}$ di un piano Π_λ sono le sue distanze dai vertici del tetraedro. Coordinate tetraedriche sono $\frac{a_r \xi_{\lambda r}}{3V} = \zeta_{\lambda r}$. La relazione che le lega è (v. pag. 4):

La distanza del punto P_α dal piano Π_λ è:

$$\xi_{\lambda \alpha} = \frac{1}{3V} \sum a_r x_{\alpha r} \xi_{\lambda r} = \sum z_{\alpha r} \xi_{\lambda r} = 3V \sum \frac{1}{a_r} z_{\alpha r} \zeta_{\lambda r} = \sum x_{\alpha r} \zeta_{\lambda r}$$

Sinistri le condizioni per la posizione unita:

$$\sum_r a_r x_{\alpha r} \xi_{\lambda r} = 0 \quad \text{ossia} \quad \sum z_{\alpha r} \xi_{\lambda r} = 0$$

$$\text{ossia} \quad \sum \frac{1}{a_r} z_{\alpha r} \zeta_{\lambda r} = 0 \quad \text{ossia} \quad \sum x_{\alpha r} \zeta_{\lambda r} = 0$$

Se la retta $R(y_{ik})$ congiunge i due punti P_α, P_β ed è intersezione dei due piani Π_λ, Π_μ sarà, indicando con $d_{\alpha\beta}$ la distanza $P_\alpha P_\beta$ e con

AP405

$(\lambda \mu)$ l'angolo dei due piani:

$$y_{ik} = \frac{a_m a_n (x_{\alpha m} x_{\beta n} - x_{\alpha n} x_{\beta m})}{a_\alpha a_\beta} = \frac{x_{\alpha m} x_{\beta n} - x_{\alpha n} x_{\beta m}}{a_\alpha a_\beta}$$

$$y_{ik} = \frac{\xi_i \xi_{nk} - \xi_{ik} \xi_{ni}}{\rho V \sin(\lambda \mu)} = \frac{3V}{2} \frac{\xi_i \xi_{nk} - \xi_{ik} \xi_{ni}}{a_i a_k \sin(\lambda \mu)}$$

Si ha poi:

$$\text{volume tetraedro } P_\alpha P_\beta P_\gamma P_\epsilon = V \begin{vmatrix} z_{\alpha 1} & z_{\alpha 2} & z_{\alpha 3} & z_{\alpha 4} \\ z_{\beta 1} & z_{\beta 2} & z_{\beta 3} & z_{\beta 4} \\ z_{\gamma 1} & z_{\gamma 2} & z_{\gamma 3} & z_{\gamma 4} \\ z_{\epsilon 1} & z_{\epsilon 2} & z_{\epsilon 3} & z_{\epsilon 4} \end{vmatrix}$$

$$\text{dunque } d_{\alpha \beta}^2 = \sum z_{\alpha i} z_{\alpha p} z_{\beta k} z_{\beta q} P(ik, pq) = \frac{1}{A^2} \sum x_{\alpha i} x_{\alpha p} x_{\beta k} x_{\beta q} \Pi(mn, rs) =$$

$$d_{\alpha \beta}^2 = \frac{1}{A^2} \begin{vmatrix} 0 & x_\alpha & x_\beta \\ x_\alpha & x_\beta & \cos \end{vmatrix}$$

dove si pone $A = \frac{3V}{2a_1 a_2 a_3 a_4}$ e vi indica in generale con $\begin{vmatrix} 0 & x_\alpha & x_\beta \\ x_\gamma & x_\epsilon & \cos \end{vmatrix}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_{\alpha 1} & x_{\alpha 2} & x_{\alpha 3} & x_{\alpha 4} \\ 0 & 0 & x_{\beta 1} & x_{\beta 2} & x_{\beta 3} & x_{\beta 4} \\ x_{\gamma 1} & x_{\epsilon 1} & \cos(11) & \cos(12) & \cos(13) & \cos(14) \\ x_{\gamma 2} & x_{\epsilon 2} & \cos(21) & \cos(22) & \cos(23) & \cos(24) \\ x_{\gamma 3} & x_{\epsilon 3} & \cos(31) & \cos(32) & \cos(33) & \cos(34) \\ x_{\gamma 4} & x_{\epsilon 4} & \cos(41) & \cos(42) & \cos(43) & \cos(44) \end{vmatrix}$$

e $\Pi(mn, rs) = \begin{vmatrix} \cos(mr) & \cos(ms) \\ \cos(nr) & \cos(ns) \end{vmatrix} = \sin(mn) \sin(rs) \cos(mn, rs)$ (teorema di Gauß), essendo 1, 2, 3, 4 le facce del tetraedro.

$$(?) \quad d_{\alpha \beta}^2 = - \sum (z_{\alpha i} - z_{\beta i})(z_{\alpha j} - z_{\beta j}) \delta_{ij}^2 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

$$\cos(RR') = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_\alpha & x_\beta \\ x_\gamma & x_\epsilon & \cos \end{vmatrix}}{\left\{ \begin{vmatrix} 0 & x_\alpha & x_\beta \\ x_\gamma & x_\epsilon & \cos \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & x_\gamma & x_\epsilon \\ x_\beta & x_\alpha & \cos \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

essendo R, R' rispettivamente le coniuganti di P_α, P_β , e di P_γ, P_ϵ .

$$\sin^2(RR') = \frac{\sum x_{\alpha e} x_{\beta f} x_{\gamma g} x_{\epsilon h} x_{\alpha p} x_{\beta q} x_{\gamma t} x_{\epsilon u} \Pi(pq, tu)}{\sum x_{\alpha e} x_{\beta f} x_{\gamma g} x_{\epsilon h} x_{\alpha p} x_{\beta q} x_{\gamma t} x_{\epsilon u} \Pi(gh, mn) \cdot \sum x_{\gamma p} x_{\epsilon q} x_{\beta t} x_{\alpha u} \Pi(rs, vw)}$$

essendo $efgh, pqrs, tuvw$ tutte le permutazioni 1234, 2412, 1342, 4213, 1423, 2314

d'angolo di due piani Π_α, Π_β ha per coseno:

$$\cos(\alpha\beta) = \sum \zeta_{\alpha r} \zeta_{\beta s} \cos(rs) \quad (r, s = 1, 2, 3, 4)$$

Quindi la relazione che lega le coordinate tetraedriche di un piano è:

$$\sum \zeta_{\alpha r} \zeta_{\alpha s} \cos(rs) = 1$$

L'equazione precedente si può scrivere così:

$$gV^2 \cos(\alpha\beta) = \sum \xi_{\alpha r} \xi_{\beta s} a_r a_s \cos(rs), \quad gV^2 = \sum \xi_{\alpha r} \xi_{\alpha s} a_r a_s \cos(rs)$$

oppure $144V^2 \cos(\alpha\beta) = \begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha \\ \xi_\beta & \delta^2 \end{vmatrix}, \quad 144V^2 = \begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha \\ \xi_\alpha & \delta^2 \end{vmatrix}$

dove $\begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha \\ \xi_\beta & \delta^2 \end{vmatrix}$ rappresenta il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_{\beta 1} & 1 & \delta^2 & \cdots & \delta^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{\beta 4} & 1 & \delta^2 & \cdots & \delta^2 \end{vmatrix}_4$$

$$V = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} \\ \xi_{\beta 1} & \cdots & \xi_{\beta 4} \\ \xi_{\gamma 1} & \cdots & \xi_{\gamma 4} \\ \xi_{\delta 1} & \cdots & \xi_{\delta 4} \end{vmatrix}_4$$

Volum. tetraedro $\Pi_\alpha \Pi_\beta \Pi_\gamma \Pi_\delta = \frac{1}{36} V^2 \begin{vmatrix} \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} & \xi_{\beta 1} & \cdots & \xi_{\beta 4} & \xi_{\gamma 1} & \cdots & \xi_{\gamma 4} & \xi_{\delta 1} & \cdots & \xi_{\delta 4} \\ \xi_{\beta 1} & \cdots & \xi_{\beta 4} & \xi_{\gamma 1} & \cdots & \xi_{\gamma 4} & \xi_{\delta 1} & \cdots & \xi_{\delta 4} & \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} \\ \xi_{\gamma 1} & \cdots & \xi_{\gamma 4} & \xi_{\delta 1} & \cdots & \xi_{\delta 4} & \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} & \xi_{\beta 1} & \cdots & \xi_{\beta 4} \\ \xi_{\delta 1} & \cdots & \xi_{\delta 4} & \xi_{\alpha 1} & \cdots & \xi_{\alpha 4} & \xi_{\beta 1} & \cdots & \xi_{\beta 4} & \xi_{\gamma 1} & \cdots & \xi_{\gamma 4} \end{vmatrix}_4$

$$\sin^2(\alpha\beta) = \frac{1}{36V^2} \sum \xi_{\alpha i} \xi_{\beta k} \xi_{\gamma p} \xi_{\delta q} P(mn, rs) = \sum \zeta_{\alpha i} \zeta_{\beta k} \zeta_{\gamma p} \zeta_{\delta q} \Pi(i k, p q) =$$

$$= \frac{1}{144} V^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \delta^2 \\ \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\gamma & \xi_\delta & \delta^2 & 1 & \delta^2 \\ \xi_\delta & \delta^2 & \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 \end{vmatrix}_4$$

$$\cos(RR') = \frac{\left\{ \begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \delta^2 \\ \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\gamma & \xi_\delta & \delta^2 & 1 & \delta^2 \\ \xi_\delta & \delta^2 & \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 \end{vmatrix}_4 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \begin{vmatrix} 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \delta^2 \\ \xi_\beta & 1 & \delta^2 & \xi_\gamma & \xi_\delta \\ \xi_\gamma & \xi_\delta & \delta^2 & 1 & \delta^2 \\ \xi_\delta & \delta^2 & \xi_\alpha & \xi_\beta & 1 \end{vmatrix}_4 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin^2(RR') = \frac{\sum \xi_{\alpha e} \cdots \xi_{\alpha u} P(rs, vw)}{\sum \xi_{\alpha e} \xi_{\beta f} \xi_{\gamma i} \xi_{\delta k} P(gh, mn) \sum \xi_{\gamma p} \xi_{\theta q} \xi_{\lambda t} \xi_{\mu u} P(rs, vw)}$$

137. *Payley.* — Note sur les singularités supérieures des courbes planes
(Brelle's J. Bd. 64, 1865. pag. 369-371)

Ogni singolarità di una curva in un punto in cui i vari rami che vi passano danno la stessa tangente equivale a: $\frac{1}{2}[M - 3(\alpha - 1)]$ punti doppi, $\alpha - 1$ cuspidi, $\frac{1}{2}[N - 3(\beta - 1)]$ tangenti doppi e $\beta - 1$ flessi. Evid α si intende l'indice di moltiplicità della curva rispetto ai punti in prossimità del punto considerato, vale a dire supposto nello stesso come origine e la tangente come asse delle x , sicché in prossimità dell'origine si ha $y = Ax^p + Bx^q + \dots$, gli esponenti p, q, \dots (tutti maggiori dell'unità) abbiano α per minimo denominatore comune, sicché y sia espressa razionalmente rispetto ad $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ed abbia quindi α valori corrispondentemente agli α valori di $x^{\frac{1}{\alpha}}$. Ciascuno di questi valori determina un "ramo parziale" della curva, in quale ha dunque α rami parziali. Se ne considerino due qualsiasi e s'intichi con p il più piccolo esponente di x nella serie che esprime la differenza delle ordinate y corrispondenti a quei due rami: il Bayley definisce allora p come il numero dei punti comuni ai due rami (numero che può essere fratto od intero). Si prendino così tutte le combinazioni a due a due degli α rami e si formi $\sum p$: si avrà precisamente ciò che s'intendeva con $\frac{1}{2}M$, vale a dire il numero dei punti d'intersezione del ramo totale della curva con se stesso.
— In modo correttivo si definiscono i numeri β e $\frac{1}{2}N$.

Ad esempio le singolarità date dall'equazione $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + \dots$, dove gli esponenti hanno solo i denominatori 2, 3, corrisponde ad un ramo composto di 6 rami parziali rappresentati dalle equazioni seguenti (in essendo una radice cubica

minuziosa dell' unità:

$$y_1 = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \dots, \quad y_4 = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

$$y_2 = w x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \dots, \quad y_5 = w x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

$$y_3 = w^2 x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{5}{2}} + \dots, \quad y_6 = w^2 x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Ogni ramo parziale ne taglia un altro in $\frac{5}{2}$ punti e gli altri quattro in $\frac{4}{3}$ punti.

Si segna che il doppio del numero dei punti d'intersezione del ramo totale con se stesso è $M = 47$. — Scrivendo poi l'equazione tangenziale del ramo stesso si ha $Z = X^4 + \dots + X^{\frac{15}{2}}$, donde segue $\beta = 2$ (cioè 2 soli rami parziali come in sviluppo) e $N = 18$. — La singolarità considerata equivale dunque a 16 punti doppi, 5 cuspidi, 6 tangenti doppi e 1 flesso.

Un esempio più semplice si ha nelle cuspidi di 2^o specie. Per così l'equazione è $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}} \dots$ ed in coordinate tangenziali $Z = X^2 + X^{\frac{5}{2}} \dots$, che ha la stessa forma. Si ne deduce che quella singolarità equivale a 1 punto doppio, 1 cuside, 1 tangente doppia e 1 flesso.

158. Forrel. — Détermination du nombre exact des solutions d'un système
de n équations algébriques à n inconnues. (Bulletin de la Soc. Mat. de Paris. t. II
pag. 127-139)

Si indicano con p_1, p_2, \dots, p_n i gradi rispettivi di n equazioni algebriche ad n incognite, con m_1, m_2, \dots, m_n i gradi più elevati a cui una qualunque di queste incognite entra nelle diverse equazioni, con w il numero delle soluzioni finite comuni a queste equazioni, ridotte ciascuna ai suoi termini di grado più alto, ed in cui una di queste incognite è sostituita coll'unità, il numero delle soluzioni finite di quel sistema di equazioni sarà:

$$P_1 P_2 \cdots P_n - \sum [(p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \cdots (p_n - m_n)] = w,$$

dove la somma si estende a tutti i prodotti analoghi a $(p_1 - m_1) \cdots (p_n - m_n)$ che si riferiscono alle diverse n incognite. Se inoltre le equazioni date mancano, risp. dei termini di gradi inferiori a q_1, q_2, \dots, q_n , il grado dell'equazione che si ottiene eliminando tutte le incognite meno una, puo' da quel valore diminuire del numero $q_1 q_2 \cdots q_n$.

AP107

159 Franz Meyer. - Theorie der Rye'sche Asymmetrie und
Rationale Kurven. - Büttingen 1883

(Pag. 363) Se si prendono i numeri interi positivi v, p, k affatto arbitrariamente (purché $v < p-1$), dai quali vengono individuati i numeri $d, n = v+d$, per mediante le relazioni $p = kp, d = (p+1)(k-1)$, una curva algebrica razionale di grado n in uno spazio lineare a d dimensioni avrà un numero finito di spazi lineari a $d-k$ dimensioni secanti, cioè aventi p punti comuni con essa, numero che vale:

$$\frac{(v+k-1)(v+k-2)\dots v}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{(v+k-2)(v+k-3)\dots(v-1)}{2 \cdot 3 \dots (k+1)} \dots \dots \dots \\ \dots \cdot \frac{(v+k-p)\dots(v-p+1)}{p \dots (k+p-1)} = S_{p,k}^{(v)}$$

Questo teorema fu trovato per induzione dall'autore.

(Pag. 312 - 319) 1. Due cubiche gobbe hanno in generale comuni 10 corde e 10 assi. Ognuna di esse ha in generale 6 assi (corde) che sono corde (assi) dell'altra. Esistono in generale 6 cubiche che hanno per assi (corde) sei rette arbitrarie dello spazio (Cremona, Brill, 6).

2. Le due cubiche sono tali che vi siano ∞ corde dell'una che sono assi dell'altra, queste rette si ordinano in coppie di tre spigoli opposti di tetraedri iscritti alla prima curva e circoscritti alla seconda.

3. Le due sezioni di cubiche C_i, Γ_i ($i=1\dots 6$) che hanno 6 rette qualsiasi r_p per corde o per assi sono tali che ad ogni curva C_i corrisponde una curva Γ_i e viceversa, in modo che le rette r_p sono le uniche che siano corde di C_i e assi di Γ_i . Invece oltre alle r_p vi sono ∞ corde di C_i che sono assi di Γ_k .

4. Se sei cubiche C_i hanno comuni a due a due, oltre alle 6 rette r_p delle quattrone di corde. Le $4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$ rette che così si ottengono riducono

AP Log

160 Liénèges. - Elemente der Theorie der Funktionen
einer komplexen veränderlichen Größe (III. Auflage, 1882)

(Sag. 3. Einleitung) Die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzten hat nichts zw. thun ~~hat~~ ...; ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe begründend in der Definition selbst ihre Existenz, und ihre Sätze sind wahr, gleichviel ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht.

AP Log

161

D'Orbido - Studio sulla geometria proiettiva.

(Annali di mat., serie II, vol. VI, 1873-78, pag. 72 - 100)

pag. 77. Sia la quadrica $A_{x,x} = \sum a_{rs} x_r x_s$ ($r,s = 1,2,\dots,n$) il cui discriminante sia α e pongasi $\alpha_{rs} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial a_{rs}}$, sicché la forma aggiunta sia $\sum \alpha_{rs} \xi_r \xi_s$ ^{di discriminante α} . Allora si avrà identicamente:

$$\begin{vmatrix} A_{x'y'} & A_{x'y''} & \cdots & A_{x'y^{(h)}} \\ A_{x''y'} & A_{x''y''} & \cdots & A_{x''y^{(h)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{x^{(h)}y'} & A_{x^{(h)}y''} & \cdots & A_{x^{(h)}y^{(h)}} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{h-1}}{\alpha} \begin{vmatrix} x'_1 \cdot x'_n & & & \\ 0 & x''_1 \cdot x''_n & & \\ & x^{(h)}_1 \cdot x^{(h)}_n & & \\ y'_1 \cdot y^{(h)}_1 & \alpha_{11} \cdot \alpha_{1n} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y'_n \cdot y^{(h)}_n & \alpha_{nn} \cdot \alpha_{nn} & & \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{h-1}}{\alpha} \begin{vmatrix} 0 & \xi'_1 \cdot \xi'_n & & \\ & \xi^{(h)}_1 \cdot \xi^{(h)}_n & & \\ \eta'_1 \cdot \eta^{(h)}_1 & a_{11} \cdot a_{1n} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta'_n \cdot \eta^{(h)}_n & a_{nn} \cdot a_{nn} & & \end{vmatrix} \quad (\xi' \text{ quindi } = 0 \text{ per } h \geq n)$$

dove si pone per brevità: $\xi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x_i}$ ($\eta_i = \frac{1}{2} \frac{\partial A_{yy}}{\partial y_i}$) e quindi sarebbe $A_{xy} = \sum a_{rs} x_r y_s = \sum \alpha_{rs} \xi_r \eta_s = \sum x_r \eta_s = \sum y_r \xi_r$.

pag. 100. — Sia $z_{ij} = (xx')_{ij}$ ($n=4$) e pongasi $A_{zz} = \sum \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix}$

$$A_{zz} = \sum \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix} \xi_{ij} \xi_{pj} \quad \text{dove } \xi_{ij} = (\xi\xi')_{ij} \quad \text{e sara' (discendente) } \begin{matrix} x z & z \\ z & z \end{matrix} \text{ con } b\beta = 1 \text{ e } b = a^3, \beta = x^3$$

$$\begin{vmatrix} A_{z'_1 z'_1} & A_{z'_1 z''_1} \\ A_{z''_1 z'_1} & A_{z''_1 z''_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\xi'_1 \xi'_1} & A_{\xi'_1 \xi''_1} \\ A_{\xi''_1 \xi'_1} & A_{\xi''_1 \xi''_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{vmatrix} 0 & z'_1 \\ z'_1 & z''_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{b} \begin{vmatrix} 0 & \xi'_1 \\ \xi'_1 & \xi''_1 \end{vmatrix}$$

ed altre analoghe con determinanti d' ordine superiore

168.

Klein a dire - Sur une certaine famille de courbes
et de surfaces (Comptes-rendus 1870 7^e sem. vol 70. pag 1222 e 1275)

Curve V sono quelle che si trasformano in se stesse con un'infinità di trasformazioni lineari che permettono di trasportare ogni punto, in generale, in ogni altro punto della curva stessa. Vi sarà pure una trasformazione infinitissima, e quindi quella curva sono gli integrali generali del sistema d'equazioni differenziali lineari $dp : dq : dx : ds = p' : q' : r' : s'$, dove $p, q, r, s, p', q', r', s'$ sono funzioni lineari delle coordinate. Vi è dunque un tetraedro (che può degenerare) fisso su quale trasformazioni dipendono le un solo parametri; ve ne sono infiniti se dipendono da due o più parametri (nel qual caso la sola curva sghemba V è la cubica). — Dal fatto che due trasformazioni lineari relative allo stesso tetraedro sono scambiabili segue che la curva V di un sistema appoggiata ad una curva V d'altro sistema stessa su una superficie che si trasforma in se stessa con ∞^2 trasformazioni lineari apre la rotta su punti qualsiasi della superficie ad un altro suo punto qualsiasi; tali superfici si diranno superficie V .

Per le curve sghembe V appartenenti ad un tetraedro propriamente detto distinguono (pag. 1224) le curve di 4^o ordine a cuspidi, e le curve trasformazioni lineari della losodromia sferica (tra cui stanno le cubiche, le curve di 2^o ordine a 2 tangenze stazionarie scoperte da Bayley. Inst. Lourn. VII). Fra le superficie V vi sono quelle comprese nell'equazione $x^a y^b z^c = \text{cost.}$ — Se poi 2 facce del tetraedro coincidono, le curve V comprendono l'elica, e le superficie V l'elisoidi sghembi. — Se tutte le facce del tetraedro coincidono le curve V sono cubiche sghembe, e le superficie V rigate cubiche a direttrici coincidenti.

(V. d. P.)

Le dimostrazioni si basano su una corrispondenza (che può essere bireciproca) tra due spazi, suggerita dagli integrali del problema. Questa corrispondenza ne comprende molto più, come quella in cui i piani dell'uno spazio si trasformano nella superficie di Steiner a 3 piani doppi fissi dell'altro; la polarità rispetto ad un tetraedro, ecc., la corrispondenza considerata da Cremona (Bombyx rends. t. LIV), ecc.

Si dalla stessa osservazione fondamentale che fanno nelle note di Math. Ann. gli Aut. deducono le proposizioni:

Una curva (o superficie) V non ha singolarità che nei vertici del tetraedro ed ha per covariante curva (o superficie) V dello stesso sistema. Due curve dello stesso sistema (o superficie) non si tagliano che nei vertici (o spigoli) del tetraedro.

Il punto di contatto di una tangente di una curva V ed il suo punto d'intersezione con qualche faccia del tetraedro hanno rapporto anemonico costante, che dipende solo del sistema cui la curva appartiene. In ogni tal tangente il luogo dei punti di rapporto anemonico costante è una curva V dello stesso sistema.

I piani osculatori di una curva V nei suoi n punti d'intersezione con un piano qualunque incontreranno la curva in $n(n-3)$ punti posti ad n ad n su $n-3$ piani. Le curve V giacenti in una quadrice che contiene 4 spigoli del tetraedro apparterranno ad un complesso bidimensionale passante per questi e inversamente.

L'intersezione di due superficie V (di diverso sistema) si compone di più curve V di uno stesso sistema. Le linee assintotiche di una superficie V sono curve V di due sistemi diversi. Le curve V che toccano una curva V sono

tangenti tagliano un tetraedro secondo un dato rapporto anarmonico sono la assintotiche delle superfici di esse generate. Le simmetrie di tutte le curve di uno stesso sistema tracciate su una superficie V ne inviluppano un'altra che tocca secondo curve dello stesso specie. — L'ordine e la classe delle congruenze formate dalle tangenti di queste curve sono gli stessi, e s'accorda coll'ordine e la classe della superficie V .

163.

Sulle quadriche — Giornale di matematiche. vol. 10, 1872

A pag. 188 tra le questioni proposte da Francesco Tacca si trova al N° 5
il seguente: « Se U e V sono due forme quadriche ad n variabili, ed U' e V'
• le loro reciproche, si può collo medesima sostituzione lineare trasformare la U in AV'
• e la V in BV' , A e B essendo i discriminanti di U e di V . Il determi-
nante C' della sostituzione è simmetrico, ed è uguale allo medio geometrico dei
determinanti A' e B' di U' e V' . — Se poi C' si considera come il de-
terminante di una funzione quadratica W' , si può con una stessa sostituzione
lineare ridurre le tre quadriche a contenere i soli quadrati delle variabili. E se
• G_y ed H_y sono due coefficienti omologhi di U' e V' così trasformati, il coeffi-
ciente omologo della W' sarà $\sqrt{G_y H_y}$. Per $n=3$, W' è una curva rispetto
a cui U' e V' sono polari reciproche ».

A pag. 307 - 312 si trova completamente dimostrato il teorema, specialmente
la 1^a parte, con brevi e semplici considerazioni sulle sostituzioni lineari e le loro inverse.
Però la questione è abbandonata dal punto in cui è ridotta alla risoluzione di un
sistema d'equazioni con altrettante incognite, il che non è assolutamente riuscito. Ed allora
si fissa Q.

Segno (pag. 313 - 319) una dimostrazione geometrica di E. D'Orsio per caso
di $n = 3$ in una nota intitolata « Sulle linee e superficie di 2^o ordine, rispetto
a cui due date linee o superficie di 2^o ordine sono polari reciproche »

Negli Atti dell' Accademia di Torino 1872 (vol. 7° pag. 758) si trova un' intitolata « Intorno ad una trasformazione simmetrica di due forme quadratiche » alle cui varie, rispetto a cui due uniche date sono polari reciproche », lo Giacci, (che potrebbe anche considerarsi col l'anonimo suddetto) dimostra quel teorema in modo quasi identico a quello dell'O. Luvoli d' altra parte di calcolare effettivamente i coefficienti della sostituzione di cui si tratta, confrontandoli con quelli della sostituzione che riduce U e V a somme di quadrati, cioè mediante le radici della celebre equazione di grado n, discriminante di $U - oV$. Ma se queste radici non fossero distinte la dimostrazione data non è più rigorosa perché si basa sulla riduzione a somme di quadrati.

Subito dopo si c' è un'altra memoria dello Giacci « Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni ».

164

Battaglini - Sulle forme ternarie bitinari

(Atti della R. Acc. Lincei, Memorie Classe scienze f. e n., vol. IX, 1880-81)
pag. 3-16

Studia analiticamente le correlative tra due piani; trova i tre casi particolari corrispondenti ai 2 piani distinti, cioè i due dualitici (coppia di punti, oppure di rette singolari) corrispondenti all'annullarsi del discriminante delle forme bitinari, ed il caso dell'annullarsi dei subdeterminanti di questi.

Si supponendo i piani sovrapposti e riferiti ad uno stesso sistema di coordinate considera le due coniche bitangenti lungo ed intagliate dai punti e delle rette che stanno (o passano per) gli elementi corrispondenti. Trova il caso particolare in cui queste coniche si scindono risp. in una coppia di rette o una coppia di punti, e l'altro caso particolare in cui le due coniche hanno contatto quadruplicato. Si è il caso in cui l'una conica ha una retta doppia, e quella intagliata un punto doppio: si chiama correlazione omologa: si esce i 2 punti corrispondenti ad una retta qualche sia allineati con quel punto doppio e col punto del quale questa ha comune colla retta doppia e sono coniugati armomici rispetto a questo. Finalmente si vede dell'involutoria unghiana (stessa polare).

Sigono altre considerazioni.

165 Chasles - Propriétés des courbes à double courbure du 4^e ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre. (B. B. 1862, 1^{re} vol. 84 pg. 317 e 418)

Nella prima parte di (senza dimostrazione) tutti i caratteri di quella curva, della sua sviluppabilità e spigolo di regresso di questa, tenendo anche conto dell'intervento di un punto doppio o di una cuspide nella curva. Considera pure i coni quadrici su cui sta la curva. Si osserva che vi sono 16 punti aventi piano osculatore stazionario, i quali stanno a 4 a 4 sui 4 piani fondamentali ed hanno piani osculatori tangenti a quei coni.

Nella seconda parte studia la sviluppabilità di 2^a classe inscritta a due quadriche. Nota che una linea d'ascenso quadratica delle sezioni secondo una quarta è la tangente in 2 quaterni di generatrici che sono quelle tangenti a quelle quattro. Si osserva che questo teorema era già stato trovato dal Dr. la Gournerie. Nota che vi sono per la sviluppabilità 4 coniche nodali e che i piani che comprendono le generatrici incontrandosi su una tel unica a dire a due inviluppano un cono da 4^a classe avente il vertice nel polo del piano della conica.

166.

Balphen. — Sur les droites qui satisfont à des conditions données

(Comptes-rendus 1871 et 72, (vol. 73 pag. 1641 e vol. 74 pag. 41))

Nella prima di questo due brevi note (3 pag. ciascuna) l'A. dimostra che le rette comuni ad una rigata di grado p ed un complesso (con altra denominazione) di grado m sono mp . Nella seconda dimostra che il numero delle rette comuni a due congruenze (μ, ν) e (μ_1, ν_1) è $\mu\mu_1 + \nu\nu_1$.

Il metodo usato per dimostrare le 2 proposizioni è lo stesso. Ma è lungo e metrico (rende un piano con un suo punto ad arbitrio nello spazio e considera rette perpendicolari ecc.) per poi ridursi ad una corrispondenza su uno pantezzato, alle quale applica il principio di corrispondenza.

167.

Charles - Propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloidé

(Comptes-rendus, 16 dicembre 1861, vol. 53 pag. 1077 — 1086)

Una curva (p, q) sulla quadrica è determinata da $pq + (p+q)$ punti

Due curve (p, q) (p', q') si tagliano in $pq' + p'q$ punti

Vi sono $2p(q-1) - 2d - 3d'$ direttissi tangenti alla curva (p, q) aventi
due punti doppi e d'angredi; e un numero analogo di generatrici tangenti.
Sei punti di contatto delle direttissi e più p punti d'intersezione con una gene-
ratrice qualunque si può far passare una curva $(p, q-1)$ la quale con-
terà i punti doppi e toccherà nel tangibili la curva data (p, q)

E varie altre teoremi su quelle curve dell'iperbolide

Génération des courbes gauches de tous les ordres sur l'hyperbololoïde au moyen de deux faisceaux de courbes d'ordre inférieur. Propriétés des faisceaux de courbes. — *Thesis volume* pug. 1203 ~ 1210.

168:

Bayley - On skew surfaces, otherwise scrolls

(Philos. Transact. 1863 vol. 153, e 1864 vol. 154 pag. 559-577)

Nelle pag. 568-571 della seconda memoria considera i « cubic scrolls » e trova due sole specie di rigate uniche secondo che le due rette dirette sono distinte (nel qual caso dà per equazione canonica $x^2z + y^2w = 0$) oppure infinitamente vicine (equazione canonica $x(yw + xz) + y^3 = 0$). Tutte rette doppiia nel 1° caso trovano due punti aspidali (aspidi per ogni sezione fatta con piano passante per essi) per quali dividono le due generatrici che vi passano.

Per le rigate quartiche (pag. 571 e seg.) considera anzitutto quello avendo due dirette rettilinee: 1^a specie: due dirette doppiie senza generatrice doppiia; 2^a specie: idem con gener. doppiia; 3^a: direttrice tripla o direttrice semplice; 4^a: una direttrice 2(+2) upla (abc' due dirette doppiie inf. vicine); 5^a idem con generatrice doppiia; 6^a: una direttrice 3(+1) upla (un tripla ed un semplice inf. vicine). — Poi aggiunge le seguenti specie: 7^a: retta e conica (tibianthia) doppiie, 8^a: unica doppiia, e retta direttrice.

169

Bayley. — Note relatives aux droites en involution de M. Sylvester

(Comptes-rendus, 20 febb 1868. vol. 92 pag. 1039-1042)

Molti in sostanza come, nelle sue coordinate di rette, 6 rette in involuzione non siano altro che 6 rette di un complesso lineare (poiché molti che si annulla il determinante delle loro coordinate). Si mostra o meglio dimostra che 6 curve di una curva volta sono rette in involuzione quando i 6 piani che le proiettano da un

punto qualunque della curva insinuano un condotto, ovvero i 6 punti d'inflessione con un piano osculatore della curva stanno su una conica

Nel poi che il luogo di quelle onde di una curva che sono in inflessione è una rigata di 4° grado avente quella curva per curva doppia (pag. 1041). Si adegua anzi l'equazione.

Il Charles si una memoria dello stesso volume ("Sur les six droites qui peuvent être les directions des six forces en équilibre") pag. 109 $\frac{1}{2}$ - 110 $\frac{1}{2}$ riconosce pure alla considerazione di un movimento infinitesimo quella rigata di 4° grado di cui sono le principali proprietà. « Essa gode delle proprietà di poter ricevere un movimento infinitesimo in cui tutto le generatrici sono normali alle traiettorie » (cioè di appartenere ad un complesso lineare). Curva curva doppia, singolare di 3° classe e 4° ordine osculatrice, ecc.

170

Blücher. — Théorie générale des surfaces régies,

leur classification et leur construction. — Annali di Mat. serie II. t° 1° (1867)

pag. 160-169

Considera particolarmente le rigate conuni a 2 complessi lineari (o loro congruenze) ed una di grado n , rigate aventi per asse n' asse e due direttissime della congruenza e che sono del grado $2n$. Nota (V. pag. 163) che gli iperboloidi generanti per le due direttissime hanno per la rigata un raffigurante analogo a quello del piano per una ~~unica~~ gabbia (ma non vede che questi deve stare su una quadrica, affinché l'analogia sia completa) : così ogni tel iperboloidide figlia la rigata (oltre che nelle direttissime n' asse) in $2n$ generatrici. Le generatrici di quelle rigate determinano un tale iperboloidide : si possono dunque considerare gli iperboloidi tangenti in una o più generatrici, gli iperboloidi osculatori, etc., nello stesso modo che più prima rispetto ad una curva gabbia. — Si nota ancora che tutto questo risulta per una rigata qualsiasi avente due rette direttissime, anche se queste non sono multiple dello stesso ordine.

Poi parla brevemente delle rigate $[211]$ o $[221]$, intersezioni risp. di uno o due complessi quadrati con due od una complessi lineari.

171

Bremora. — Rappresentazione di una classe di superficie gabbie sopra

un piano e determinazione delle loro curve assintotiche — Annali idem. pag. 248, 258

Le curve assintotiche di una superficie gabbia $[m,n]$ avendo due direttissime parallele distinte (multiple rispettivamente $m-n$, superficie di genere $\frac{1}{2}mn$) sono composte di $(m-1)(n-1)$ generatrici doppie, e rappresentabile ^{univocamente} su un piano sono algebriche e d'ordine $2(m+n-1)$, ed incontrano le direttissime nei relativi punti cuspidali (che sono risp. il numero dei $2(m-1)$ e $2(n-1)$)

Ogni generatrice ^{si} incontrò ciascuna curva assintotica in due punti, diversi a meno d'uno
delle due direttive. Se la generatrice è "singolare" i due punti coincidono nel relativo
punto cuspidale.

Le curve assintotiche di una superficie gobba $[m, n]$ avente le direttive
incidenti sono algebriche di genere 0 e d'ordine $2m+n-2$. Secco che
d'ultime negli $m-n$ punti $\stackrel{(m \geq n)}{\in}$ cui una generatrice coincide collo stesso direttore,
è segno molto questo nei $2(n-1)$ punti cuspidali. In tutti questi punti
comuni hanno le stesse rette tangenti e piani osculatori.

Dimostrazioni affatto analitiche, che si faranno sulla rappresentazione curva
nel piano.

122

Bagoroli. — Sui complessi e congruenze di 2° grado. (1878)

Le rigate di 4° grado contenute in una congruenza quadratica Φ (a le quali debbono considerarsi come le forme fondamentali ad uno dimensione contenute in questo) formano un sistema 4 volte infinito in cui quattro rette di Φ ne individuano una. Due tali rigate hanno comuni 4 rette che appartengono ad infinite altre. — Le rigate Θ passano per punti singolari e toccano i piani singolari di Φ .

Di sono 16 di quelle rigate che si spezzano in un fascio ed una rigata cubica Γ . La congruenza Φ contiene dunque 16 sistemi doppiamente infiniti di rigate cubiche Γ corrispondenti ai 16 fasci di rette di Φ : in ciascun sistema la direzione doppia di ciascuna rigata passa per punti singolari corrispondenti, e la direzione semplice sta nel piano singolare.

I 16 punti singolari si possono separare in 5 modi diversi in due categorie tali che ogni ottuplo comprende 8 punti singolari situati a coppie su 4 raggi delle congruenze e solo su 4; e insieme vi sono 10 ottupli di piani singolari.

Φ contiene 20 sistemi semplici di quadrliche rigate corrispondenti alle 10 otupli: tutte le quadrliche di un sistema passano per un'ottupla di punti singolari e toccano gli otto piani singolari corrispondenti. Due quadrliche di 2 sistemi coniugati hanno comuni 2 raggi di Φ ; ^(x) 2 quadrliche di sistemi non coniugati hanno comuni un solo raggio; 2 quadrliche dello stesso sistema non hanno raggi comuni.

Una congruenza quadratica generale è contenuta in 20 complessi tetraedri, i cui tetraedri fondamentali sono formati da punti e piani singolari della congruenza.

(x) Eremo nella nota del 1875 «Tutte corrispondenze fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie» (Atti della R. Acc. d. Lincei, serie II, tomo 3°) aveva già mostrato a pag. 11 come per ogni raggio di Φ passassero 8 copie di quadrliche rigate, di che 2 delle otte rigate avevano unico comune una generatrice. Si veda perciò della rappresentazione di Φ su uno scalo cubico (per 4 rette di queste passano 5 piani, contenuti assieme una coppia).

Un complesso quadratico contiene ∞^4 quadriche rigate e ∞^6 rigate cubiche.

Vi sono ∞^4 tesseridi inscritti e circoscritti ad una superficie di Kummer: quattro di essi hanno i vertici e i facci dati.

(Si trova sempre per le dimostrazioni su una rappresentazione univoca delle congruenze quadratiche nei punti di un suo piano singolare; e del complesso quadratico nei punti dello spazio ordinario tali che ai piani di questo corrispondono congruenze quadrate in quello)

Anche la proprietà delle quadriche di Φ di passare per ottime di punti singolari e toccare ottime di piani singolari sono dimostrate a pag. 11 del Bremona. Sia però questa stessa proprietà fa dimostrata sistematicamente dalla Schur nella memoria del 1879 a pag. 20.

Ma la proprietà di una congruenza quadratica di contenere ∞^4 rigate quadriche si trova già comunicata da Lie (Vieber Complexa etc. Math. Ann. V pag. 249, note 2^a) dove dice: « Due qualsiasi delle 6 congruenze quadrate che appartengono ad una superficie di Kummer determinano un numero semplicemente infinito di quadriche. E un generatore appartenente risp. alle due congruenze del resto queste serie di quadriche si vede sempre in due gruppi ».

LB L'ipn (1879)

AP 119

I sistemi di raggi di 2° grado ^(x)

Ogni sistema di raggi di 2° grado Φ^2 contiene 5 coppie di serie di rigate quadriche. Una rigata di una serie non ha rette comuni con le rigate della stessa serie, ma ne ha due comuni con ogni rigata dell'altra serie della stessa coppia (cioè appartenente con questi rigati ad una stessa congruenza lineare), ed una sola retta comune con ogni altra rigata. — Si segue che si può generare Φ^2 con due fasci provenienti da ~~una~~ congruenze lineari: le rigate basi di questi 2 fasci appartengono all'una generazione, e le rigate d'intersezione delle congruenze lineari corrispondenti appartengono alla generazione coniata.

Proprietà polari (pag. 19. 20). — Abbiasi una retta p , del complesso binario e di una generazione qualunque di Φ^2 : si prende ogni rigata R e si congiunga ad p , mediante una congruenza lineare, che toglierà ancora Φ^2 in una rigata S : ~~si~~ nel fascio $R.S$ di rigate quadriche si ne sarà una passante per p ; se si prende la coniata armonica rispetto ad $R.S$. Essa descriverà, col muoversi di R , una congruenza lineare polare di p . Per ogni punto di p , questa retta e la retta di quella congruenza lineare polare dividono armonicamente i 2 raggi di Φ^2 passanti per punto stesso. Corrispondentemente alle 5 copie di serie di rigate quadriche contenute in Φ^2 , si hanno 5 congruenze

(x) Nella rappresentazione che avevo di base si ha come la proiezione di un S^2 su S^2 nello spazio ordinario di punti da 1 elemento esterno, anche il complesso lineare di rette ed i punti delle rigate hanno corrispondenza (2.1). Ad una congruenza lineare (anche specializzata) corrisponde una quadrica (fig).

riseari polari di p : esse hanno tutte comune la rigata quadratica costituita da quelle loro rette che si appoggiano su p , e rigate che si può chiamare polare di p .

Considerando una sola coppia di generazioni, se la congruenza polare della retta p passa per la retta q , viceversa quella di q passa per p . Ogni punto a avrà pure una superficie polare rispetto a Φ^2 : movendo la retta p del complesso lineare intorno al suo punto a , descrivendo così un fascio: la sua congruenza lineare polare descriverà pure un fascio, passando sempre per una certa rigata quadratica π^2 , che chiamerò polare di a . Dati i punti a, b , se la π^2 rigata polare di a passa per b , anche quella di b passa per a . Se in particolare la rigata polare del punto a passa per a , questo sarà un punto focale della congruenza Φ^2 e viceversa.

(pag. 22). Considerando le 6 congruenze Φ^2 aventi lo stesso superficie focale, ogni punto a ha 6.5 rigate polari formanti solo 16 quadrliche ~~giunti~~ di cui a coppie danno i 2 sistemi di generatrici. Le 16 punti a stanno sulle superficie focali, tutte quelle superficie polari passano per esso e vi toccheranno quelle superficie.

Corrispondentemente ad ogni Φ^2 trova beni rigate d'ordine 8 delle tangenti quadruplete, e per luogo dei punti di contatto la curva d'ordine 16.8 e dei punti in cui i punti tang. sono i corrispondenti rispetto al complesso lineare. Vedi Klein e lie nei Monatsberichts de Berl. 1870 pag 891.

questa curva passa per 16 punti singolari ed oscula ogni piano singolare nel punto singolare corrispondente (risp. a Φ^2). Ne ne sono 6

(pag. 25) Ogni Φ^2 si può generare con 2 stelle reciproche di congruenze lineari in infiniti modi: delle 2 coppie di raggi base delle 2 stelle si possono prendere ad arbitrio i due dell'una p. q. ad uno dell'altr. s, ma l'altro è dunque allora strettamente legato nella congruenza lineare che ha comune con Φ^2 il raggio opposto s ed inoltre passa per raggio che Φ^2 ha ancora comune con le righe quadriche p q s.

Basi speciali delle congruenze quadratiche (1° ha per focali le rette doppie della linea generale)

- Kummer [2111]: ha una sola retta doppia; sarebbe [2111]. —
- 2^o la Kummer [2211] ed è [221] con 2 rette doppie che si tagliano; 3^o la Kummer [(11)1111] ed è [(11)111] con 2 rette doppie che non si tagliano; 4^o la Kummer [(11)211] ed è [(11)21] con 3 raggi doppi; 5^o coppia di quadriche [(11)(11)11] ed è la congruenza [(11)(11)1], poiché la congruenza di 1^o grado delle tang. comuni alle 2 quadriche si sciude in 2 congruenze quadratiche.
- 6^o le 3 congruenze quadratiche di tangente appoggiate ad una delle 3 rette doppie della superficie di Steiner [322], o della superficie reciproca (caso 7^o). — 8^o congruenza quadratica avente per parte la riga di 3^o grado [10]22] formata di tangenti a questo appoggiato su una ~~retta~~ doppia generatrice. — 9^o Kummer [10]1111]

I complessi quadratici C^2 .

Due stelle reciproche di complessi lineari generano un C^2 mediante infiniti raggi quadriche. Preverò ogni C^2 si può generare così. Si hanno con' due sistemi costituiti da raggi contenuti in C^2 : e bin' delle 2 stelle si possono prendere ad arbitrio, l'una sull'uno, l'altra sull'altro sistema; due raggi dello stesso sistema appartengono ad un complesso lineare: non con' due raggi di diverso sistema. Si ottengono delle raggi dell'un sistema quello dell'altro cercando le intersezioni ulteriori di C^2 colle congruenze lineari condotta per quelle. — Le raggi in risoluzione con quei 2 sistemi fanno pure (man beweist leicht) due sistemi coniugati appartenenti ad un altro complesso quadratico, che si dirà involutorio col dato C^2 . (Nel mio modo di vedere sarebbe dato dal' interez. dell'assoluto colle quadriche polari rispetto a quelli delle quadriche C^2 ; dunque 2 complessi quadratici involutori sono omofocali). — Di tali coppie di sistemi di ∞^3 raggi quadriche contenuti in C^2 ce n'è ∞^1 .

Le raggi, di una coppia di sistemi, appunto le quali passano per un raggio p di C^2 appartenendo ad un complesso lineare avente comune con C^2 una congruenza quadratica avente in p un raggio doppiò: tale complesso lineare si dice trangenziale di p . — Per una retta qualunque p dello spazio e le raggi di un sistema di C^2 si conducano congruenze lineari: appariranno ancora C^2 in una rigata: rispetto a queste 2 ci prende la coniugata armonica di quella rigata della congruenza la quale passa per p : il luogo di queste rigate sarà un complesso lineare polare di p .

Se il complesso polare di p passa per q , quello di q passa per p . Se p descrive un fascio, il suo complesso polare descriverà un fascio proiettivo a quello. — Se p descrive una stella intorno ad un punto a , il suo complesso polare descriverà una stella avente per base una rigata quadrica che diremo rigata polare di a . Finalmente ogni piano ha una rigata polare. — Se p descrive una rigata quadrica ecc. che cosa accade? (pag. 38-39).

Gli punti a dello spazio corrispondono in un dato sistema come rigate polari ∞^3 rigate di un complesso quadratico K^2 ed ai piani dello spazio come rigate polari il sistema coniugato di rigate dello stesso K^2 . (pag. 40-41). Invece K^2 è il luogo delle rette p dello spazio aventi per polari rispetto a C^2 (nel sistema considerato) dei complessi lineari speciali. I complessi polari delle p rispetto a C^2 sono i compl. tangenziali nelle p a K^2 . (Nel mio modo di vedere sarebbe).

la quadrica K^2 la polare dell' C^2 dell'assoluto rispetto a C^2).

Le rette L (polari delle p rispetto a C^2) formano un 2° complesso quadratizio L^2 , involutorio a K^2 , poiché mentre p descrive una rigata quadrica di K^2 , L descrive la rigata involutoria (Secondo me sarebbe L^2 la quarta di contatto dell'assoluto con l'insopportabile circoscritta a questo ed a K^2).

Pag. 43. Per un punto singolare di C^2 passa la sua quadrica polare e viceversa; idem per i suoi singolari. Le rette singolari di C^2 appartengono pure a K^2 e viceversa le rette comuni ad C^2 , K^2 sono singolari per C^2 . Mutando il sistema di generazione di C^2 si muove K^2 formando un fascio la cui base è la congruenza di 4° grado delle rette singolari di C^2 . — Sia S una retta di Φ^4 , singolare di C^2 : ecco come se ne costruiscono i fuochi e i suoi fuochi. Sia a il suo punto singolare corrisp., esso è un fuoco di Φ^4 ed il corrispondente piano focale è il piano tangente in S al cono di K^2 passante per a ; il secondo piano focale, com'è noto, è il piano singolare corrisp. ad S e suo fuoco sarà il punto in cui S è toccata dalla conica di K^2 giacente in quel piano.

Pag. 44. Tra i sistemi di generaz. di C^2 ce ne sono 6 notevoli, cui corrispondono 6 complessi lineari fondamentali. In questi sistemi le rigate involutorie alle 2° rigate di C^2 stanno sul complesso lineare C , anche questo va considerato come uno dei complessi quadrati involutori di C^2 . — Due rette p_1, p_2 congiunte n.p. a C hanno lo stesso complesso polare rispetto a C^2 in quel sistema. — Le rigate delle 2 serie della stessa coppia corrisp. a quel sistema appartengono ad uno complesso lineare, cioè hanno 2 rette comuni (?).

Pag. 46. Rispetto a quel sistema di generaz. di C^2 un punto a ed il suo piano corrisp. A rig. a C hanno la stessa rigata quadrica polare. Si vede che il sistema di rigate di K^2 corrisp. così ottenuto è della stessa specie che quello di C^2 corrispondente a quel sistema di generaz. Si assume poi la costruzione tutte le coppie di rette p_1, p_2 cui complessi lineari polari sono speciali passanti per a , così che c'è propria corrispondenza rispetto a C , e quindi L^2 involutorio di K^2 ed in C (non in C^2 come si dice lo Schur). Si ha una corrispondenza tra le coppie di rette p_1, p_2 del quadratizio K^2 e le rette L del lineare C . Questa domanda cui lo Schur non ha risposto, cioè se K^2 sia ancora il complesso quadratizio generale va risposta affermativamente (Sarebbe K il cono polare, rispetto al cono C^2 , del cono circoscritto del vertice di questo all'assoluto); dal che segue che anche K^2 ha il complesso fondamentale (C). La corrispondenza considerata dello Schur tra le rette di C e le coppie di rette di K^2 consiste appunto nella corrispondenza tra i 2 punti d'intersezione di ogni generatrice del cono K^2 sull'assoluto ed il punto di contatto delle

coll'assoluto del corrispond. piano proiettivo rispetto il cono C^2 di quelle gen. di K^2 .
 In questa corrispondenza, al Φ^4 (rette singolari di C^2) corrisponde una congruenza quadratica contenuta in C (Sarebbe, diminuendo di 1 il numero delle dimensioni, ad considerare l'inter. con C , l'analogo dia. all'intero con C^2 di ciò che era in generale L^2 rispetto a K^2 ; cosicché queste congruenze quadriche e' secondo le mie denominaz., omofocali a quelle in cui C taglia C^2 . La congr. Φ^4 delle rette singolari di C^2 contiene 6 gruppi, ciascuno di 16 rigate quadriche. Ogni tel rigato sta in un complesso lineare con ogni altro dello stesso gruppo, e con cinque dello stesso gruppo in una congruenza binaria.

Pg. 48. Sia diversi modi di generaz. di C^2 si hanno es^t complessi quadriche A^2 insoluti a C^2 : essi formano le varie omofocali di C^2 . Considerando ogni retta singolare s di C^2 : essi compl. lineari tangenziali rispetto ai vari sistemi sono appunto le rette singolari riapp. di A^2 e formano fasci proiettivi, ecc. ecc.

fine AP 119

AP-120

N. G.

Dottor Domenico Boccella. — (Piazza Annunziata — Tricilia)

agli enti geometrici dello spazio di rette generanti delle intersezioni dei complessi corrispondenti si duo o più fasci proiettivi di complessi lineari.

Rappresenta il sistema triplo di complessi lineari passante per due fasci dati nello spazio di piani (le congruenze lineari nelle rette, le righe quadriche nei punti dello stesso spazio). Allora al complesso quadratico generato da quei 2 fasci proiettivi corrisponderà una quadrica. Ma non osserva l'Q. che agli ∞^2 complessi lineari specifici di quel sistema triplo corrisponderà pure un'altra quadrica, o che, oltre a poter dedurre con'egli per le proprietà del complesso quadratico da quelle della 1^a quadrica (2 sistemi di generanti (congruenze lineari) ecc.), si possono dedurre le proprietà della superficie distinguendo da quelle della quartaica intersezione delle due quadriche, essendo preso come assoluto la 2^a quadrica.

Ad ogni generatrice della superficie antogolare corrispondono altri due a', q., tali che le coppie a a', q, sono le direttive di due congruenze lineari generatrici del complesso, appartenenti ad 2 diversi sistemi. — In ognuna delle 2 rette doppie vi sono 4 punti cuspidali, nei quali cioè coincidono le 2 geratrici delle righe singolari; essi sono punti doppi del complesso e formano 2 gruppi proiettivi; idem per piani cuspidali. — In ognuno dei 2 sistemi di congruenza generatrici del complesso se ne sono 2 specifici.

Se da un punto qualunque della superficie singolare si conducano le 4 rette che appartengono alle 4 congruenze speciali di un sistema esse stanno in un piano, quale nel quale saranno tangenti alla curva intersezione proprie della superficie; queste 4 rette avranno un rapporto armonico costante uguale a quello dei 4 punti singolari giacenti sopra ciascuna retta doppia ed uguale al rapporto armonico caratteristico di ogni curva piana della superficie. È questo un invarianto assoluto della superficie e del complesso.

Congruenza generata da 3 fasci progettivi di complessi lineari.
È una congruenza gotica (cioè che non sta su un complesso lineare) di 3° ordine e 3° classe. La sua superficie focale è involto d'iperboloidi rigati determinati dalla linea di complessi corrispondente dei 3 fasci dati. Questo as' d'iperboloidi è di 3° ordine e 3° classe. Si segue che la superficie focale è di ordine e classe 8. L'A. ne trova facilmente l'equazione. Lo spigolo di ingresso di questa superficie (come involto d'iperboloidi) è una curva d'ordine 12, luogo dei punti nei quali passano 3 raggi coincidenti della congruenza. Questa curva oscilla in 8 punti la quarta sezione di 2 iperboloidi consecutivi. — La congruenza possiede 12 punti singolari con fasci pieni di raggi e 12 piani tangenti che sono i piani di questi fasci:

i 12 punti si dividono in 6 coppie ai due quali ciascuna giace sull'intersezione di una coppia di piani singolari (bisognerebbe del fatto che nelle cosiddette iperbolidi non ne sono 6 che si reindiano). I 6 piani singolari toccano la superficie piane secondo coniche, sono cioè tangenti doppi; i 12 punti singolari ne sono punti doppi. La curva d'ordine 12 subisca assai in 4 punti ogni piano tangente doppio ed i punti di osculazione stanno sulla conica di contatto ed hanno la stessa tangente sia a questo conica sia a quella curva.

Queste superficie, dice l'A., si presenta al Kummer in una sua nota recente dei Rendiconti dell'Accad. di Belino come esempio di superficie corrispondente a 20 medesime, ben c'è facile per 2 diverse congruenze di 3^o ordine e 3^o classe, che risultano dai 2 diversi sistemi di generativi degli iperbolidi considerati.

Vi è un caso particolare notevole: la congruenza generata delle rette che si appoggiano ai raggi corrispondenti di 3 fasci proiettivi di raggi è di 3^o ordine e 3^o classe ed ha 15 punti singolari, di cui 12 con fasci di raggi piani e 3 con coni di raggi di 2^o ordine; e 15 punti singolari di cui 12 con fasci di raggi e 3 con coniche di raggi. Questi 3 punti sono quelli dei fasci proiettivi dati. Si segue che vi sono di questi punti si può rappresentare le rette della congruenza univocamente.

Veronese - Behandlung der projekt. Verhältnissen des
 Raumes von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des
 Projektions und Schneidens. — (Math. Ann., Bd XIX)

pag. 161 - 234

(Né esiggo solo le cose che mi importano) Due spazi lineari $S_m, S_{m'}$ essendo de-
 terminati da $m+1$ ed $m'+1$ punti appartenendo allo spazio lineare $S_{m+m'+1}$, determinato
 dagli $m+m'+2$ punti. Gli $S_m, S_{m'}$ non si tagliano in generale, ma se hanno co-
 mune un punto, questi basta insieme con altri m . risp. m' a determinare $S_m, S_{m'}$ e
 quindi quegli $m+m'+1$ punti determinano uno $S_{m+m'}$, in cui quelli sono contenuti.
 In generale se $S_m, S_{m'}$ hanno comune un S_a e quindi $a+1$ punti indipendenti, essi
 stanno in uno $S_{m+m'-a}$. Dunque se consideriamo solo i punti di un S_n , sareb-
 bero in generale $m+m'-a = n$, cioè $a = m+m'-n$; quando fosse negativo, $S_m, S_{m'}$
 non si taglierebbero in generale. Si trova poi che $s+1$ spazi lineari arbitrari $S_m, S_{m'}, \dots, S_{m+s}$ in S_n si tagliano in un S_p essendo $p = \sum_{i=0,1,\dots}^{s-1} m^{(i)} - sn$. Questo
 nel caso generale, ma per eccezione possono negli spazi tagliersi in spazi di maggiori
 dimensioni (Fig. 163, 164). — Fig. 165. Chiamiamo duali due spazi $S_m, S_{m'}$ tali che
 $m+m' = n-1$; se n è dispari, sia $S_{\frac{n-1}{2}}$ duale a se stesso.

(Abschnitt III. $(n-1)$ -dimensionale Flächen $z^{\text{en}} \text{grades } F_{n-1}^2$) Introduciamo F_{n-1}^2
pag. 184
 come generati da quei punti di due S_n lineari reciproci corrispondenti i quali stanno
 nello loro corrispondenti S_{n-1} (le quali incideggono sui altri F_{n-1}^2) e mostri come si puo-
 rendere i 2 spazi reciproci si da avere una polarità.

2

Nel §. 4 si calcola il numero degli spazi binari contenuti in una F_{n-1}^2 , ma facendo crescere successivamente n col mezzo della proiezione stereografica cioè proiettando F_{n-1}^2 da un suo punto su un piano tangente parallelo a quello di quel punto (che già contiene tutti gli elementi all'infinito). Trova che una F_{2m-1}^2 contiene $\infty^{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2m-1)m}$ (un solo sistema) e che una F_{2m}^2 contiene $\infty^{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m(m+1)}$ S_m formanti due sistemi.

Enuncia poi senza dimostrazione: Le F_{n-1}^2 in S_n è generata da due forme regolare qualsiasi. i cui assi $S_p^{(1)}, S_p^{(2)}$ non si tagliano e generano ad entrambi sulla superficie ($p \leq \frac{n-1}{2}$ oppure $\leq \frac{n}{2} - 1$). Le queste assi si tagliano in un S_q , le due forme reciproche generano un cono con una S_q doppia.

Nel V. Abschnitt si calcola gli spazi dei vari ordini generati da più sistemi proiettivi di piani.

Nella Einleitung n° 4. Se un punto si muove in modo continuo su legge algebrica, si ha da una sua posizione iniziale esso possa proseguire solo in due direzioni, descrivere uno spazio ad 1 dimensione, che chiameremo curva d'ordine m se uno S_{n-2} lo taglia in m punti. (In questo modo di generare gli spazi l'uno dall'altro vedi Grassmann e Riemann). Una curva d'ordine m può solo stare in un $S_2^1, S_3^1, \dots, S_m^1$, giacché conducendo per $m+1$ suoi punti in S_m , questi taglierà la curva in $m+1$ punti e quindi la contiene. Gli S_1^1 tangenti a gli $S_2^1, S_3^1, \dots, S_{n-3}^1, S_{n-2}^1$ osculatrici della curva formano altrettante circonferenze che i loro luoghi di punto, sono riap. $S_2, S_3, S_4, \dots, S_{n-2}$ (N)

APPENDICE

c' sono tali che gli S'_i oscillatori sono tangenti allo S_i formato dagli S'_{i-1} , e che finalmente gli S'_{n-2} o piani oscillatori della curva detti sono i piani tangenti all'ultima sviluppabile S_{n-2} . — Dunque una curva in S_n , ha $n-3$ spazi sviluppabili.

Procedendo muovendo in modo continuo in 2 direzioni una curva S_1 , genera un S_2 , e così via. Dice che si dimostrano facilmente in modo analogo a quello visto per le curve le proposizioni:

« Un S_p^m puo' solo stare in un $S_{p+1}, S_{p+2}, \dots, S_{p+m-1}$, sic' che in $m-1$ diversi spazi sengt stare in spazi inferiori. Dunque gli spazi di 2^o ordine stanno solo in un determinato spazio baccare. »

« Lo S_p^m ha $n-p-1$ sviluppabili. »

Proiettività. — Lag. 179. Due gruppi di $n+1$ punti posti rispettivamente su due S'_{n-1} del S'_n si possono ottenere con successive proiezioni e sezioni da uno stesso gruppo di $n+1$ punti di un altro S'_{n-1} . Due spazi S'_n si possono quindi riferire proiettivamente (oppure reciprocatamente) tra loro dando $n+2$ coppie di punti (o di punti e piani) corrispondenti (l. pag. 181); immaginandoli in un S'_{n+1} , si possono fare in queste proiezioni e sezioni che trasformano l'uno spazio nell'altro.
Lag. 182, 183. Nati i casi particolari piu' notevoli, a cui avviene, della proiettività di due spazi sovrapposti (divisione class. tutti = 1) avvenendo perciò in noti che si potrebbero ottenere tutti i casi possibili mediante i divisorii elementari di Mayerstoss.

Pag. 184. — Ogni S'_m in S'_{2m+1} , taglia una piramide di $2m+2$ vertici in una configurazione reciproca a quella che risulta proiettando da S'_m la stessa piramide. — Bisogna in una nota che ci può divenire utile determinando una sezione parallela in cui la piramide abbia i vertici corrispondenti alle facce opposte ed ai punti del S'_m corrispondenti a quei punti.

Pag. 187. — Dei fasci di quadriche considero solo quelli (ch.v. elem. 1) spicabili per tagliarsi delle 2 quadriche in due S_m . S_{n-1-m} opposti della piramide coniugate ad entrambe e nota che allora le 2 quadriche hanno pure comuni i coni tangenti ascenti da quelli, ed inoltre infinite piramidi coniugate aventi i vertici in quegli S_m . S_{n-1-m} .

Pag. 187. Nota 2^a. Bemerkung. Vi è ugual numero di S^m_{n-1} in S'_n e di S^n_{m-1} in S'_m ; cioè $G_{m,n} = \binom{m+n}{m} - 1 = \binom{m+n}{n} - 1$. Questa osservazione importante mi pare si trovi già nella memoria del Blifford. In particolare ($m=2$) vi è ugual numero di quadriche nello spazio lineare ad n dimensioni e di curve d'ordine n in un dato piano.

Pag. 194. Due piramidi progettive di $n+1$ vertici in S'_n sono sempre polari l'una dell'altra rispetto ad una quadrica essendo il centro ed il piano di omologia polo e polo rispetto a questi. Nelle figure che così si ha ogni punto delle stesse può prendersi come centro d'omologia di due tali piramidi.

Pag. 199 e 200. Caratteri di una curva in S'_n . — Se la curva $S^{(k)}_n$ d'ordine M , avente ~~per primo rango~~, cioè per numero delle tangenti della curva tagliate da un S'_{n-2} , ossia ordine delle 1^a sviluppabile della curva (sviluppabile S^k_2 di retto); W per ~~secondo rango~~ cioè ordine della 2^a sviluppabile (a 3 dimensioni); ed in generale $W^{(i)}$ per ~~range i+2 esimo~~, cioè ordine della sviluppabile ad $i+3$ dimensioni composta dagli S'_{i+2} osculatori della curva. Siano D i punti doppi appartenenti, cioè i punti doppi della proiezione della curva su un S'_2 , $D^{(i)}$ i punti doppi apparenti della proiezione su un S'_{n-i} , ..., $D^{(i)}$ quelli di una proiezione su un S'_{n-i} ; sia d il numero di S'_{n-i} passanti per ogni S'_{n-3} e contenenti due tangenti non consecutive della curva, ~~d~~ $d^{(i)}$ il numero di copie di spazi S^k_2 osculatori non consecutivi che si tagliano in una rete di un dato S'_2 , ..., $d^{(n-2)}$ il numero di copie di S'_{n-1} osculatori non consecutivi, che si tagliano in una rete di un dato S'_2 . Queste sono i 3N caratteri generali di una curva. Ma essa può anche avere $n-2$ elementi stazionari in numero 2 opp. di: $W_1, W_1^{(1)}, \dots, W_1^{(n-3)}$, ed n diverse specie di elementi doppi, cioè D_1 punti doppi, d_1 tangenti doppi, ..., $d_1^{(n-2)}$ spazi S'_{n-1} osculatori doppi. — Orbene si hanno $17n-1$ gruppi di 3 quantificazioni, tutte tra loro indipendenti, tra quel che costituiscono di una curva algebrica (i quali si ottengono tutte proiettando su S'_2), e sono:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} k = m(m-1) - 2[D + D_1] - 3R \\ m = k(k-1) - 2[d + d_1] - 3(w + w_1) \\ w + w_1 - R = 3(k-m) \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} w = k(k-1) - 2[D^{(1)} + d_1] - 3(m + w_1) \\ k = w(w-1) - 2[d^{(1)} + d_1^{(1)}] - 3(w^{(1)} + w_1^{(1)}) \\ m + w_1 - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = 3(k-w) \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} w^{(1)} = w(w-1) - 2[D^{(2)} + d_1^{(1)}] - 3(k + w_1^{(1)}) \\ w = w^{(1)}(w^{(1)-1}) - 2[d^{(2)} + d_1^{(2)}] - 3(w^{(2)} + w_1^{(2)}) \\ k + w_1^{(1)} - (w^{(2)} + w_1^{(2)}) = 3(w - w^{(1)}) \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} w^{(n-3)} = w^{(n-4)}(w^{(n-4)-1}) - 2[D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - 3(w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)}) \\ w^{(n-4)} = w^{(n-3)}(w^{(n-3)-1}) - 2[d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - 3w^{(n-2)} \\ w^{(n-5)} + w_1^{(n-3)} - w^{(n-2)} = 3(w^{(n-4)} - w^{(n-2)}) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Al generico p si hanno $2(n-1)$ equazioni provenienti da quelle:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - [D + D_1] - R = \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - [d + d_1] - (w + w_1) = \\
 &= \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - [D^{(1)} + d_1] - (m + w_1) = \frac{(w-1)(w-2)}{2} - [d^{(1)} + d_1^{(1)}] - (w^{(1)} + w_1^{(1)}) = \\
 &= \frac{w^{(n-4)}}{2} \cdot \frac{w^{(n-4)-2}}{2} - [D^{(n-2)} + d_1^{(n-3)}] - (w^{(n-2)} + w^{(n-3)}) = \frac{w^{(n-3)}}{2} \cdot \frac{w^{(n-3)-2}}{2} - [d^{(n-2)} + d_1^{(n-2)}] - w^{(n-2)}
 \end{aligned}$$

Se la curva ha solo i $3n$ caratteri generali, dati 3 qualunque di essi quelle formule permettono di trovare tutti gli altri. — Tutte le singolarità diverse della curva proiezione delle date si possono ottenere con una conveniente posizione dello spazio da cui si proietta.

In particolare la curva razionale C^n in S'_n ha ($R=0$, $w_1=w_1^{(1)}=\dots=w_1^{(n-3)}$) i ranghi a due a due uguali: $k=2(n-1)$, $w=3(n-2)$, $w^{(1)}=4(n-3)$, $w^{(n-3)}=3(n-2)$, $w^{(n-4)}=2(n-1)$, $w^{(n-2)}=n$, $w^{(n-3)}=0$. Ma questi erano già stati dati dal Clifford; perché il Veronese non lo dice? Chiameremo queste curve le curve razionali normali di S'_n (Normalkurven): esse non hanno elementi stazionari o doppi.

La curva ellittica normale ($n=1$) C^{n+1} di S'_n non ha elementi doppi o stazionari, ma solo $(n+1)^2$ punti S'_{n+1} stazionari. I suoi ranghi sono: $k=2(n-1)+2$, $w=3(n-2)+6$, ... $w^{(n-4)}=n^2-1$, $w^{(n-3)}=n(n+1)$, $w^{(n-2)}=(n+1)^2$.

Bisogna (pag. 203 e seg.) i caratteri delle curve d'intersezione di $n-1$ superfici date anche in casi particolari in cui queste curve si riuniscono in parti di unico carattere noti. (pag. 205)

Ogni C^n razionale in S_n è generabile con n fasci proiettori di piani, ponendo condizionando per $n-1$ punti fissi di C^n e per uno mobile un piano questo descrivendo un fascio che si riunisce proietivamente alla curva. Questo serve pure a provare che

questo è di genere zero. (V. Clifford). Legge pure da quella costituzione della curva che le coordinate omogenee di ogni suo punto si potranno rappresentare con un parametro così: $x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_{n+1} = \lambda^n : \lambda^{n-1} : \lambda^{n-2} : \dots : 1$.

Ricorda che il Clifford delle rappresentazioni parametriche delle se come funzioni di grado n di λ tra i termini sui quali oscillano ecc. — Il Verenesch (pag. 207) dimostra che fissando su 2 tali curve 3 coppie di punti corrispondenti si determina una omografia tra i 2 spazi che le contengono, nelle quali esse si corrispondono.

Pag. 208. Ogni C^m di S_m ($m < n$) si può ottenere proiettando C^n di S_n da un S_{n-m} , che contiene $n-m$ punti arbitrari di C^n . Ogni curva razionale di S_m ($m < n$) il cui grado non supera n si può ottenere proiettando univocamente una C^n normale di S_n .

Pag. 211. Esiste la soluzioni intere positive delle $3(n-1)$ equazioni tra i caratteri di uno C^m in S_n date, per $p=0$, caratteri di curve veramente esistenti.

Pag. 214. Ogni curva normale C^{n+r} di genere $p=r < n$ nello spazio S_n genera, sotto sue proiezioni convenienti, curve normali dello stesso genere in $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_{r+1}$.

" " Ogni curva in S_m d'ordine $n+p$ ad inferiore ($m \leq n$) di genere p si ottiene proiettando una curva normale di genere p dello spazio S_n .

Pag. 215. Abschnitt V. Erzeugt durch collinare Grundzüge. Le $p_i^{(k)}$ sono equazioni di S_{n-s} nello spazio lineare S_n , le equazioni:

$$\begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \dots & p_m^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(s)} & p_2^{(s)} & \dots & p_m^{(s)} \end{vmatrix} = 0$$

rappresentano sia il luogo dei punti d'interruzione dei sistemi proiettivi:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_2^{(1)} + \dots + \lambda^{(m)} p_m^{(1)} = 0 \\ \lambda^{(1)} p_1^{(s)} + \lambda^{(2)} p_2^{(s)} + \dots + \lambda^{(m)} p_m^{(s)} = 0 \end{cases}$$

sia quello dei sistemi proiettivi (pag. 216)

$$(1') \quad \begin{cases} \mu^{(1)} p_1^{(1)} + \mu^{(2)} p_2^{(1)} + \dots + \mu^{(s)} p_s^{(1)} = 0 \\ \mu^{(1)} p_1^{(s)} + \mu^{(2)} p_2^{(s)} + \dots + \mu^{(s)} p_s^{(s)} = 0 \end{cases}$$

Inoltre quella matrice mista che istanca delle (1') si possono prendere equazioni del tipo seguente legando le (1), ponendo per le λ in sistemi determinati, e le μ variabili:

$$\sigma_1 (\lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \dots + \lambda^{(m)} p_m^{(1)}) + \dots + \sigma_s (\lambda^{(1)} p_1^{(s)} + \dots + \lambda^{(m)} p_m^{(s)}) = 0, \text{ ecc.}$$

Dunque: Se una superficie F di qualunque dimensione ed ordine è generabile con s forme collinari di specie $m=1$ come S_{n-m} , sarà pure generabile con m forme collinari M_{n-s} di specie $S-1$. s forme collinari qualunque del primo sistema lineare, od m del 2^o generano pure la superficie F . Se i sostegni S_{n-m} od M_{n-s} stanno in F , vi stanno anche tutti i sostegni S_{n-m} od M_{n-s} dei due sistemi lineari. (pag. 216).

Se s od m spazi corrispondenti delle s forme S_{n-m} o delle m forme S_{n-s} si trovano in uno spazio S_q che è già su una superficie o no è uno spazio reale, si potrà rap-

presentare univocamente gli spazi S_n delle superficie sui punti di uno spazio lineare S_{n-1} od S_{n-2}

Pag. 217. In particolare tutte le superficie F_{n-1}^m in S_n' generate da un piano collineo di spazio $n-1$, hanno 2 sistemi di generatrici di spazio $n-1$ ai quali corrispondono due sistemi equivalenti di superficie giacenti completamente in F_{n-1}^m , e' che due di diverso sistema stanno in una determinata superficie di ordine costante. — Le $m \leq n+1$ gli assi delle m forme collineari S_{n-m} stanno sulle superficie, e tutti gli S_{n-m} contenuti in questi si possono riferire univocamente ai punti di un S_{n-1}' .

Pag. 217-218. — Dal teorema generale segue che in fasci proiettivi di piani generano una superficie ad $n-m+1$ dimensioni d'ordine m , la quale e' una linea quando gli S_{n-2} , sostegni di quei fasci hanno un'intersezione comune.

Pag. 218. — $n, n+1, n+2$ forme collineari di spazio n in S_n (spazi omografici sovraposti) generano risp. una $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, una $F_{n-1}^{\frac{n+1}{2}}$, e una $F_{n-2}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$. Ne segue che $n-1, n, n+1$ forme collineari di spazio $n-1$ (stelle) generano risp. una $F_{n-2}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $F_{n-1}^{\frac{n}{2}}$, $F_{n-2}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Pag. 219. — La curva razionale normale C^n di S_n sara' generata da n fasci proiettivi: (1) $\lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \lambda^{(2)} p_1^{(2)} = 0, \dots, \lambda^{(n)} p_n^{(1)} + \lambda^{(2)} p_n^{(2)} = 0$ od anche da due stelle proiettive:

$$(1') \quad \mu^{(1)} p_1^{(1)} + \dots + \mu^{(n)} p_n^{(1)} = 0, \quad \mu^{(1)} p_1^{(2)} + \dots + \mu^{(n)} p_n^{(2)} = 0$$

avendo per equazioni

$$\begin{vmatrix} p_1^{(1)} & p_1^{(2)} \\ p_n^{(1)} & p_n^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

Gli assi dei fasci (1) sono S_{n-2} secanti della curva, cioè ne contengono $n-1$ punti, giacchè uno di essi e' l'agliato degli altri fasci proiettivi secondo $n-1$ fasci di S_{n-3}' posti in S_{n-2}' e vi sono per questo sopra $n-1$ punti comuni a spazi corrispondenti e questi saranno evidentemente punti della curva. Pag. 220. Anche l'intersezione degli S_{n-2} corrispondente alle stelle (1) sono S_{n-2} secanti, qualche S_{n-2} (una retta S_1 , un S_2 , ... un S_m possono aver comuni con C^n al più risp. 2, 3, ..., $m+1$ punti), e quando no' accade si dicono spazi secanti. — Tutti gli S_{n-2} secanti di C^n usanti da un punto qualunque sono gli spazi secanti di un cono a 3 dimensioni di vertice A_0 e ordine $n-2$. Tutti gli S_{n-2} secanti usanti da un punto A_0 di C^n sono gli spazi secanti di un cono di vertice A_0 a 2 dimensioni e d'ordine $n-1$ che e' il cono proiettante la curva da A_0 .

Pag. 221. Per ogni spazio lineare arbitrario A_m non passa alcun spazio secente S_{n-2} di C^n se $2m+3 \geq n+1$. Considerando i centri delle 2 stelle proiettive al S_{n-1}' , che appartengono ad una di questi e passa per A_m , corrisponde nell'altra un S_{n-1}' : supponiamo che questo stia con A_m in uno spazio lineare ad 5 dimensioni, essendo $S_{n-1}' \geq m+1$, $\leq n$, allora tutti gli spazi secanti S_{n-2} passanti per A_m sono spazi secanti di un cono di vertice A_m ad 5+1 dimensioni e d'ordine $n-5$. —

Se si proietta la curva C^n da un S_m su un S_{n-m-1} , tutte le particolarita' delle curve proiettate dipendono, come vedemmo, dalla posizione di quel S_m rispetto al sistema degli S_{n-2} secanti di C^n . Di qui si hanno le varie specie di curve razionali. Le come per un S_{n-2} puo' passare 1 oppure 0 spazi secanti S_{n-2} , così combinatoriamente che nel piano (S_2)

vi sono 2 specie di curve razionali d'ordine n : quelle con un punto $(n-1)$ uplo e quelle che non ne hanno (eccettuate solo le conica e la cubica prima). — Essi ancora per un S_{n-2} puo' passare nessun S_{n-2} secante di C^n , od 1, oppure as' formanti un cono ^{ad 2^o ordine} ^{ad n-1 dimensione} di 3 punti, quelle due ne hanno una e quelle due ne hanno as' formanti una rigata quadratica. Fanno eccezione le curve razionali d'ordine 3^o e 4^o che sono solo di una specie, e quelle del 5^o ordine che sono di 2 specie (l'una avente una secante quadruplicata minima, l'altra avente as' tali secanti appartenenti ad una quadrice). — pag. 222. de curve razionali d'ordine n di S_m sono di m specie. Nella prima la curva non ha spazi S_{m-2} secanti $n-1$ upli; nella seconda ne ha solo uno, nella terza ne ha as' formanti un uno di 2^o ordine ad m-1 dimensioni e con un S_{m-n} doppi, ecc., nella S_m stessa ($S \leq m$) ne ha as' che sono gli spazi secanti S_{m-2} di un uno d'ordine $S-1$ ad $n-S+2$ con un S_{m-2S+2} doppi che diventa una superficie ordinaria a $m-2S+2$ diversi negativi. — Per $m > 3$ vi sono anche sottograzie (Untergrazien) che non studia: dipendono dal fatto che nelle curve razionali d'ordine n in S_m vi possono anche essere spazi secanti S_{m-2} non upli, S_{m-3} non upli, ... S_{n-m+2} upli. — Per ultimo (pag. 227, 3^o) considera le C^4 e C^5 nelle loro proiezioni sul piano e sullo spazio ordinario.

S.4. Die in einer Ebene liegenden abzählbaren 2-dimensionalen Linienflächen. — pag. 224 e seg. — Le superficie a 2 dimensioni (Normalflächen) d'ordine n^2 nello spazio $S_{n(n+3)}$ i cui punti hanno le coordinate proporzionali alle $\frac{n(n+3)}{3} + 1$ combinazioni di prodotti $\xi_1^{a_1} \xi_2^{b_2} \xi_3^{c_3}$ dove $a+b+c=n$ e dove ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono parametri omogenei, sono rappresentate in questo modo univocamente su un piano, si che alle loro curve piatte ^{corrispondono} tutti le curve d'ordine n di questo piano. Da cose con proiezioni si ottengono tutte le superficie rappresentabili univocamente su un piano, ma allora in questo nascono dei punti fondamentali. Consideriamo insomma il luogo delle curve normali C^n di S_n . Il caso generale si riserva di studiarlo altrove. Qui considera solo le superficie nigate.

da F_2^{n-1} in S_n c' è quella del minimo ordine che si possa stare. Consideriamo precisamente quelle generate da: $\begin{cases} \mu^{(1)} p_1^{(1)} + \mu^{(2)} p_2^{(1)} = 0 \\ \mu^{(1)} p_1^{(n-1)} + \mu^{(2)} p_2^{(n-1)} = 0 \end{cases}$ o da $\begin{cases} \lambda^{(1)} p_1^{(1)} + \dots + \lambda^{(n-2)} p_1^{(n-1)} = 0 \\ \lambda^{(1)} p_2^{(1)} + \dots + \lambda^{(n-2)} p_2^{(n-1)} = 0 \end{cases}$ la cui equazione c' è:

$$\left| \begin{matrix} p_1^{(1)}, & \dots & p_1^{(n-1)} \\ p_2^{(1)}, & \dots & p_2^{(n-1)} \end{matrix} \right| = 0$$

L'genera dunque con $n-1$ fasci oppure con due sistemi i cui sostegni sono le rette $S_1^{(1)}, S_1^{(2)}$. La superficie contiene infinite rette, tra cui queste. Gli S_{n-2} in cui si tagliano due piani S_{n-1} corrispondenti di quei 2 sistemi sono spazi secanti della F_2^{n-1} in quanto che le tagliano in una C^{n-2} e risultano due corrispondenti S_m si tagliano in un S_n questo contiene $a+1$ punti delle superficie e le diamo quindi spazio secanti di 1^o specie; ma se $a = m-1$, allora l'intersezione S_{m-1} taglia la superficie in una curva normale C^{m-1} e si dà spazio secanti di 2^o specie. — Prendendo nella gamma in S_n qualunque A_m e congiungendolo con $S_1^{(1)}$ si ha un $S_{m+2}^{(1)}$ che corrisponde un $S_{m+2}^{(2)}$ per $S_1^{(2)}$. Se A_m ed $S_{m+2}^{(2)}$ stanno in un S_3 , dove $S \leq n-1, n+m+2$, tutti gli spazi secanti S_{m-2} della data superficie passano per A_m saranno gli spazi secanti di un cono (d'vertice A_m) ad $n+1$ dimensioni d'ordine $n-S$. — Due ragioni giudici qualunque con 2 S_{n-1} della data superficie sono fatte corrispondere proiettivamente dalle rette di questi. Innanzi i punti delle superficie si possono rappresentare con parametri uni': $x_i = \varphi_i(\lambda) + \mu_i \varphi_i''(\lambda)$, e con ciò quella è rappresentata univocamente su un piano. Ogni rigata rappresentabile su un piano avente ordine $\leq n$ in uno spazio a dimensioni $\leq n$ è sempre la proiezione di una rigata normale d'ordine $\leq n$ in uno spazio.

Al pag. 231 ritorna la proprietà noti della rigata cubica considerandola come proiezione su un S_3 di una F_2^3 rigata di un S_4 .

176

G. Veronese. — Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni.
 (Atti del R. Istituto Veneto, Lomo VIII, serie V, 1881-82 pag. 986-1024)

In questi lavori venne messa alcuna generalità sul parallelismo, sull'ortogonalità, sulle distanze ed angoli particolarmente negli spazi a 4 dimensioni (Introduzione) si pensò a studiare per uno spazio a 4 dimensioni la rappresentazione su uno a 3 dimensioni colla proiezione centrale (Parte 1^a) — oppure colla proiezione ortogonale (Parte 2^a) su uno ovvero due spazi a 3 dimensioni.

Tutto è voluto in modo analogo a quello usato per la geometria descrittiva dello spazio ordinario, specialmente seguendo il Friedler. Nella proiezione centrale si hanno le rappresentazioni mediante le tracce e gli elementi di fuga, i quali bastano alla risoluzione dei problemi progettivi, mentre per quelli metrici (come costituzione di distanze, di angoli, ecc.) serve anche la sfera di distanza (analoga al cerchio di distanza) la quale rappresenta il centro di proiezione. Sono trattati soltanto i problemi più elementari riguardante la determinazione di spazi (ette, piani e spazi a 3 dimensioni) colle condizioni più semplici, il problema del ribaltamento ecc.; ma non si ottengono, all'infuso della rappresentazione, dei toranti nuovi. Nella proiezione ortogonale su un solo spazio a 3 dimensioni si introduce un altro, non essendosi più gli elementi di fuga. Nella proiezione su due spazi a 3 dim. il piano di loro intersezione appare fondamentale; l'uno spazio poi si sviluppa più comodamente sull'altro. Finisce con qualche parola sulla proiezione assonometrica.

177.

D'Ordio. — Le funzioni metriche fondamentali negli spazi

di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante. —

(Atti Acc. dei Lincei, 1876-76, fasc. 3^o, vol. I, 9 aprile 1877)

Dalle "Note sui determinanti di determinanti" (Atti Acc. di Torino, v. XI, 1876).

Dati un determinante d'ordine n , i due determinanti che hanno rispettivamente per elementi i suoi minori degli ordini r e $n-r$ sono uguali alle potenze $\binom{n-1}{r-1}$ e $\binom{n-1}{r}$ del dato determinante.

Il determinante che ha per elementi i minori di ordine $r-p$ ricavati da un determinante d'ordine r col sopprimervi ciascuna volta p orizzontali e p verticali scelte comunque fra le orizzontali e le verticali assegnate, è uguale alla potenza $\binom{r-1}{p-1}$ del dato determinante moltiplicata per la potenza $\binom{r-1}{p-1}$ del minore ricavato dal medesimo sopprimendone le p orizzontali e le p verticali assegnate.

Il determinante che ha per elementi i minori d'ordine p ottenuti da uno dato determinante d'ordine n prendendo gli elementi comuni a p orizz. e p vert. di cui 0, 1, ..., $p-1$ appartenenti a p dato orizz. e p vert. è = alla potenza $\binom{n-1}{p-1} - \binom{r-1}{p-1}$ del dato determinante r potenza $\binom{r-1}{p-1}$ del minore che non ha rapportamento quelle liste d'orizz. e di vert.

Pag. 11. Di rette (o bipunti) che seckino un r punti, un r' punti, ..., un $r^{(n-1)}$ punti dati, non avendo punti comuni se ne sono $\infty^{r+r'+\dots+(n-2)(n-1)-2}$. In particolare vi c'è in generale un numero finito di rette secanti simultaneamente R . Un r punti, un r' punti, un $(n-r)$ punti ed un $(n-r')$ punti: il numero di tali rette c'è uguale al più piccolo tra i numeri $r, r', n-r, n-r'$.

AP124

178

J. Lie. — Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungs-Theorie des gewöhnlichen Raumes entspricht. — Gott. Nachr. 1871 pag. 191—209.

E' una memoria importante da un lettore. Contiene la geometria metà di molide delle superficie e loro sistemi ortogonali in uno spazio ad n dimensioni.

179

J. Lie. Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen (idem. pag. 535).

Anche questa versa sui quegli argomenti.

180

J. Lie. Ueber eine neue Methode der Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. — Gott. Nachr. 1872 pag. 321
" Zur Theorie partieller Differentialgleichungen 473.

181

Klein. Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie ibid. pag. 37.

182

Lionville - Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 (à Borchardt et Teubner) - Bruxelles 1888.

Una funzione doppiamente periodica avente al più un infinito non può essere che una costante. — Una funzione dop. per. avente gli n infiniti $z = x_1, \dots, z = x_n$ è uguale a $\varphi(z) + \left\{ \frac{c_1}{z-x_1} + \dots + \frac{c_n}{z-x_n} \right\}$ essendo $\varphi(z)$ finita per $z = x_1, \dots, x_n$ (essendo alcune delle c_i vicendowamente compariando termini della forma $\frac{c_i}{(z-x_1)}, \frac{c_i}{(z-x_2)}, \dots$)

Una funzione d.p. a due infiniti (e quindi a due zeri) ha per parte frazionaria un'espressione della forma $C \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right)$ essendo C una costante.

Data una funzione d.p. φ avente per indici di periodicità $2w, 2w'$ ed avente due infiniti, tutte le altre non sono funzioni razionali lineari e fratte. In particolare quelle tra le funzioni d.p. avente gli stessi indici di periodicità $2w, 2w'$ le quali hanno gli stessi infiniti saranno della forma $C(\varphi + C')$, essendo C, C' costanti.

Una funzione doppiamente per. a più infiniti si può decomporre nella somma di più funzioni d.p. a due soli infiniti; ed anche nel prodotto di tali funzioni.

Il numero e le somme degli infiniti di una funzione d.p. sono uguali risp. al numero ed alla somma degli zeri della stessa funzione.

Nella seconda parte si tratta di applicazioni, particolarmente alle funzioni ellittiche. Si trova il teorema d'addizione per le funzioni d.p. a due infiniti e lo si applica poi al res. am., che viene ottenuto come una funz. d.p. a due infiniti, e due zeri (di cui l'uno sarà 0) di più come impone $\varphi(2) = -\varphi(-2)$. — Si trova poi, sempre coi metodi semplici prima stabilite la trasformazione del res. am. sull'espressione in forma di somma o di prodotto e la trasformazione inversa (formule di Abel e di Jacobi).