

Lacune

Fotocopie mancanti:

AP 11, 13, 18, 30, 34

~~12~~

Sul teor. di Riemann e Roch.

Riemann nel n. 5 della Th. Abel'schen F. a pag. 101 delle Werke dimostra, considerando l'espressione

$$s' = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_p W_p + \text{cost.}$$

e imponendole le $2p$ equaz. (lineari omog. nelle β e nelle α) che non annullano i periodi, sicché s' diventa funz. algebr. di z , che, dati ^{ad arbitrio} $m > p+1$ punti in cui s' è infinita, s' dipende ancora (e linearmente) da $m-p+1$ costanti arbitrarie. (*) Roch (Bulle, t. 64, 1864 "Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen", pag. 375) completa aggiungendo che se in quegli m punti q funzioni $\frac{\partial F}{\partial s}$ linearmente indipendenti si annullano (ove con $F(s, z) = 0$ s'indica l'equazione posta a base e con φ una funz. di grado minore di 2 risp. ad s e risp. ad z , come sono considerate da Riemann), s' dipende da $m-p+1+q$ costanti. Ora Riemann al n. 8 dimostra (appunto in base a quanto sopra) che $s' = \frac{\psi(s, z)}{\chi(s, z)}$ essendo ψ, χ funzioni intere di s, z di gradi ^{almeno} _{uguali per lo meno} uguali a quelli di $F(s, z)$ diminuiti di 1 e passanti per i punti doppi di F , cioè ψ e χ curve aggiunte dello stesso grado. Trova che tali curve tenendo conto solo delle inters. colle F

(*) V. pag. opp. ultime righe

e del loro preciso valore danno una ∞^ε con i inter-
 variab. ove $i - \varepsilon = p - 1$ (facendo in sostanza lo stesso
 calcolo che Brill e Nöther § 3 per la $q \geq 2 - p$;
 solo che Riemann dovrebbe dire che la serie è almeno
 ∞^ε). Condotta χ per gli m punti dati come
 infiniti di S' , essa taglia ancor F in $i - m$ punti
 per quali va condotta ψ . Le costanti di S'
 son precisamente quante quelle che rimangono
 dopo ciò a ψ , tenendo conto della $F = 0$. Ne
 seguirebbe il significato segn. per risultati di Riemann
 e Roch: Le per un gruppo G_m passano ∞^{q-1}
 curve φ che così danno una g^{q-1}
 un gruppo di questa serie passeranno ∞^φ
 che daranno una g^{m-p+q} cui appartiene il
 gruppo G_m . E questo è appunto il teorema dato
 da Brill e Nöther

V. anche Clebsch - Lindemann p. 857 - 866.

(*) (alla pag. preced.) - Riemann osserva poi che
 se $m < p + 1$ (invece di m egli mette allora μ) delle
 $2p$ equaz. fra le $p + m$ quantità omog. β ed α solo
 $p + m - 1$ dovranno esser indep., e le rimanenti $p - m + 1$
 esserne una conseguenza, il che importa $p - m + 1$

condizⁱ per gli m punti infiniti, sicché di questi
 solo $2m - p - 1$ si potranno prendere ad arbitrio.
 Questo è appunto un 1° caso del teor. R.-R. Se
 poi si vuole che m sia minimo, siccome uno degli
 m punti si può evidentemente prendere ad arbitrio
 (1 punto di un gruppo delle g_m^1), rimangono $m - 1$
 a cui far soddisfare le dette $p + 1 - m$ condizⁱ,
 si avranno $\infty^{2m - p - 2} g_m^1$, si avrà $m \geq \frac{1}{2}p + 1$.
 Così Riemann ottiene le g_m^1 minime. Ai n° 10 e
 11 si osserva come una g_m^1 con $m < p + 1$ si può
 sempre ottenere mediante un fascio di φ (aggiunte ecc.)

(Bibl. Naz^{le} di Firenze)

Weierstrass. Vorlesung über Abelsche Functionen.

Wintersemester 1875-1876

(Ausarbeitung von Hettner.)

Permette un cenno sulle funzioni esponenziali ed ellittiche alle quali si giunge supponendo un teorema d'addizione algebrico. Estendendo ad un numero qualunque di variabili lo stesso concetto si giunge alle funzioni abeliane.

Seguono le "Algebraische Grundlagen...", ma più diffuse. La trattazione o riduzione dei punti singolari è simile a quella del Kobb per superficie (Journal de math. 1892)

AP14

Weierstrass. - Vorlesungen über
Abel'sche Functionen.

†) Pag. 17. Tutti i punti di un ente algebrico (algebraisch. Gebilde) $f(x, y) = 0$ che stanno all'intorno di un suo punto a, b (per quale $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$) si possono sempre rappresentare con un numero finito di coppie distinte di serie di potenze di una variabile t della forma $x = a + \varphi_1(t), y = b + \varphi_2(t)$ per modo che a valori diversi di t corrispondono coppie diverse di valori di x, y , e che due coppie di valori di x, y le quali siano rappresentate da coppie diverse di funzioni φ_1, φ_2 non sono mai identiche. — Se il punto (a, b) sta in vari elementi dell'ente algebrico $f(x, y) = 0$, si dice che esso è "pienamente determinato" solo quando si dà anche l'elemento su cui deve stare.

Pag. 22. Per valore della funzione razionale $R(x, y)$ nel punto a, b s'intende il limite determinato cui essa tende per $t = 0$ quando per x, y si sia messa una di quelle coppie di funzioni. Si dice che questo valore $R(a, b)$ è preso λ volte, quando lo sviluppo di $R(x, y) - R(a, b)$ secondo le potenze di t comincia con t^λ

Pag. 35. La funzione razionale $R(x, y)$ dell'ente alge-

†) I. Abschnitt. Algebraische Grundlagen für die Theorie der Abel'schen Functionen.

brico irriducibile $f(x, y) = 0$ prende lo stesso numero di volte ogni valore. Questo numero si dice grado di $R(x, y)$. Se, indicando con y_1, \dots, y_n le n radici y di $f(x, y) = 0$ per x dato, si esprime $[s - R(x, y_1)][s - R(x, y_2)] \dots [s - R(x, y_n)]$ come funz. simmetrica di quelle e quindi razionale in x , diventerà della forma $\frac{G(s, x)}{F_0(x)}$; ed il grado di $R(x, y)$ sarà il grado della funz. intera $G(s, x)$ risp. ad x (risp. ad s il grado è n).

Pag. 39. Siano $R_1(x, y) = \xi$, $R_2(x, y) = \eta$ due funzioni razionali del punto x, y dell'ente algebrico irriducibile $f(x, y) = 0$. Allora anche fra ξ, η passerà un'equazione algebrica irriducibile (Direttam. si ottiene o quest'equ. o una sua potenza). Trasformazione razionale di un ente algebrico in un altro. Classe di enti algebrici.

Pag. 44. Ad ogni ente algebrico irriducibile $f(x, y) = 0$ spetta un determinato numero $p \geq 0$ tale che si può formare una funz. razionale $F(x, y; x', y')$ delle 4 quantità la quale considerata come funzione di x, y sia infinita e di prim'ordine solo nel punto x', y' ed in p altri punti regolari distinti e fissi (cioè indipendenti da x', y'), mentre non esiste una funzione razionale di x, y che sia infinita solo nei punti fissi. [L'intende che anche x', y' sia un punto regolare, cioè che x' finita,

abbia per la $f(x,y) = 0$ valori tutti finiti di y , per nessuno dei quali s'annulli $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$]. Il numero ρ dicesi rango e non muta per trasformaz. birazionali (pag. 50).

Mediante trasformaz. algebriche e sviluppi in serie ecc. studia certe funzioni razionali, gl' integrandi delle 3 specie. Prima le $H(x,y; x',y')$, integrandi di 3^a specie, poi quelli di 2^a e di 1^a. Espriime (pag. 71) una funzione razionale qualunque $F(x,y)$ mediante somme di siffatti integrandi cogl' infiniti $x_i y_i, \dots, x_s y_s$ così: $F(x,y) = C_0 + C_1 H(x,y, x_1, y_1) + \dots + C_s H(x,y, x_s, y_s)$ essendo C_0 una cost., e le C_1, \dots, C_s legate da ρ relazioni lineari omogenee, se quegl' infiniti son dati. Supponendo poi (pag. 75) che anche gli zeri $x'_1 y'_1, \dots, x'^{(s)} y'^{(s)}$ sian dati si hanno altre s relazioni; e da ciò si conchiude che tra le $2s$ coppie di valori $x_1 y_1, \dots, x_s y_s, x'_1 y'_1, \dots, x'^{(s)} y'^{(s)}$ passano ρ relazioni algebriche indipendenti dalla natura della funzione $F(x,y)$. Dati gli s infiniti ad arbitrio la funzione $F(x,y)$ esisterà solo in generale se $s > \rho$; (s'intende che F abbia tutti gl' infiniti fra quegl' s punti; ma qualcuno di questi potrebbe non essere un infinito di F perchè il corrisp. coefficiente C si annulli); ed in tal caso si possono ancora prendere ad arbitrio $s - \rho$ punti zeri.

Pag. 76. Proprietà degl' integrandi di 1^a specie $H(x,y)_q$. Co.

me certe funz' raz' s' esprimano linearmente con queste ρ funz' zioni. Indipendenza lineare di queste. Si ha $H(x, y)_x = \frac{G(x, y)_x}{\frac{\partial f}{\partial y}}$, ove G è funz. intera di grado $m-2$ in x ed $n-2$ in y (al più): pag. 79; e di dimensione (grado complessivo) non maggiore di $z-3$ se z è la dimensione di $f(x, y)$ (pag. 88)

pag. 89. Determinazione del rango ρ . Si giunge (pag. 98) alla formola $\rho = \frac{z}{2} - n + 1$, ove (n è il grado di f rispetto ad y , e) s è il numero dei valori singolari essenziali di x , chiamando così un valore γ di x che spetta solo ad $n' < n$ punti determinati dell'ente (cioè elementi, sviluppi in serie di t ; v. pag. 1), e contandolo allora $n - n'$ volte (ordine del valore singolare γ).

Ad esempio per l'ente $y^n = G(x) \equiv A_0(x - a_1)^{m_1} \dots (x - a_{\mu})^{m_{\mu}}$, se s'indica con n_x il massimo comun divisore di m_x ed n , si ha (pag. 101): $(n+1)(n-1) - \sum_x (n_x - 1) = 2\rho$. - Premessa poi (a pag. 104 e seg.) una dimostrazione completa del fatto che due curve piane algebriche d'ordini z, z' hanno comuni zz' coppie di valori (cioè che tanti sono gli zeri che il 1° membro dell'una ha, sopra l'altra), si dimostra che in generale $2\rho = (z-1)(z-2) - \sum k_x$, ove la somma si riferisce ai punti multipli, cioè quelli per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (pag. 115), e nel caso ordinario si riduce a $\sum_x \mu_x (\mu_x - 1)$ (pag. 123). Anzi, questa vale sempre, essendo le μ_x le molteplicità che si ottengono colle successive trasf. quadre che sciolgono i punti multipli.

Pag. 128 e seg. Determinazione di p funzioni $H(x, y)$ linearm. indip. (integrandi 1^a specie) tali che nello sviluppo di $H(x, y) \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ (ove x, y sono gli sviluppi in serie di t di cui a pag. 1) non comparano mai potenze negative di t . Sono $\frac{G(x, y)}{F(y)}$ ove le G hanno nei p multipli secondo μ dei p $(\mu-1)$ -pli... e sono di dimens. $2-3$.

Delle funzioni $H(x, y, x', y')$, e delle funzioni razionali che hanno un solo punto infinito (d'ordine abbastanza elevato)[†]) ecc. Rappresentazione di ogni funzione razionale mediante gl' integrandi delle tre specie, pag. 156.

II. Abschnitt. Die Abel'schen Integrale und die Primfunktionen
Pag. 166 e seg. Alcuni teoremi analitici che caratterizzano gli enti algebrici e le loro funzioni razionali.

Pag. 172. Se $\int_{(a, b)}^{(x, y)} F(x, y) dx$ è preso sull'ente algebrico irriducibile $f(x, y) = 0$ ed F è funz. razionale; quell'integrale, ove sia funzione algebrica di x sarà razionale in x, y .

Seguono le definizioni degl' integrali abeliani delle 3 specie, integrali normali, periodi, ecc.; funzioni primarie ecc.

Pag. 210 Teorema d' Abel. Pag. 217, suo inverso: siano $x_1, y_1, \dots, x_2, y_2$ e $x'_1, y'_1, \dots, x'_2, y'_2$ due serie qualunque di punti dell'ente algebrico $f(x, y) = 0$, tali che nessun punto dell'una serie con-

[†]) V. pag. segu.

paia pure nell'altra, e supponiamo che si possa congiungere ogni punto x'_v, y'_v col punto x_v, y_v con linee tali che siano nulle le ρ somme d'integrali di 1ª specie presi lungo queste linee $\sum_{v=1}^{\rho} \int_{x'_v, y'_v}^{x_v, y_v} H(x, y)_\alpha dx = 0$ per $\alpha = 1, 2, \dots, \rho$. Esiste allora una funz. razionale $R(x, y)$ la quale s'annulla nei soli punti della 1ª serie e diventa infinita nei soli punti della 2ª. — Il teorema d'Abel generale è il seguente: la somma di più che ρ integrali del differenziale generale $F(x, y) dx$, ove $F(x, y)$ è una funz. razionale qualunque, ed i limiti superiori son tutti diversi dagli inferiori, può sempre esprimersi mediante la somma di soli ρ integrali dello stesso differenziale, con dati limiti inferiori, più una parte algebrico-logaritmica.

III. Abschnitt. Die Abelschen Functionen

Problema d'inversione di Jacobi pag. 224. Funzioni theta pag. 264. Rappresentazione di funzioni trascendenti ed algebriche mediante Θ pag. 301.

Pag. 144. Delle funzioni razionali di x, y che sono infinite in un sol punto a, b secondo un dato ordine σ (grado della funzione). Le si escludono certe posizioni particolari di

7

a, b , non esiste alcuna funzione siffatta per $\sigma \leq \rho$,*) mentre esiste sempre quando $\sigma > \rho$. Ma si ha poi sempre che: ad ogni posizione a, b corrisponde un grado minimo $l \geq 1$ e $\leq \rho + 1$ tale che esista una funzione razionale di grado l che sia infinita solo in (a, b) , ed un numero minimo k tale che esistano funzioni siffatte di grado $k+1$ e di ogni grado maggiore. Tra i numeri $1, 2, 3, \dots$ ve ne sono precisamente ρ i quali non si possono assumere come valori di σ , cioè ^{come} gradi di funzioni razionali aventi (a, b) per unico infinito: ogni altro numero, all'infuori di quei ρ è grado di una tal funzione (Lückensatz, pag. 154). **)

Pag. 330 e segu. Si applicano molto semplicemente le proposizioni ora dette alla determinazione delle forme normali dell'ente algebrico per $\rho = 1, 2, 3$. Così per $\rho = 1$ manca solo la funz. di 1° grado e dicendo ξ_2, ξ_3, \dots quelle di 2°, 3°... grado (sempre con a, b per unico infinito), si vede che si può determinare una costante a sì che $\xi_3^2 - a \xi_2^3$ dal 6° si riduca al 5° grado, poi una costante b sì che $\xi_3^2 - a \xi_2^3 - b \xi_2 \xi_3$ dal 5° si riduca al 4° grado, poi c sì che $\xi_3^2 - a \xi_2^3 - b \xi_2 \xi_3 - c \xi_2^2$ sia del 3° grado, infine $\xi_3^2 - a \xi_2^3 - b \xi_2 \xi_3 - c \xi_2^2 - d \xi_3 - e \xi_2$ dal 2° grado si riduca (non esistendo funz. di 1° grado) ad una costante f ;

*) Cf. Noether, Brelle J. 92, p. 301.

**) Cf. Schottky, Brelle 83 p. 315. Noether nel Brelle 97 p. 224 dimostra questo teorema basandosi sul teorema Riemann-Boch, e ne dà delle estensioni relative alle funzioni razionali che devono essere infinite in più punti di un gruppo dato (ordinato).

o questa è l'equazione della cubica. Analogamente si procede per $p=2$ nel qual caso mancano i gradi 1 e 3. Per $p=3$ si hanno i casi seguenti: 1° mancano ξ_1, ξ_2, ξ_4 : si ottiene allora la quartica piana generale, 6 costanti; 2° mancano ξ_1, ξ_2, ξ_5 : la quartica ha una tangente con contatto quadrijunto, 5 costanti; 3° caso, iperellittico, mancano ξ_1, ξ_3, ξ_5 , esiste ξ_2 , 4 costanti.

Schläfli. — On the distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in reference to the absence or presence of Singular Points, and the reality of their Lines. — Philosoph. Trans. vol. 153 (1863) pag. 193-241

St. Enley, che presentò la memoria e vi fece leggere modificazioni di (pag. 193-194) il seguente riassunto delle varie specie (io non tengo conto delle sottospecie corrispondenti alla realtà ed immaginarietà delle linee e piani della superficie):

Specie I. Superficie cubica generale, o superficie di 3° ordine e 12° classe

- II. Nodo proprio, classe 10 (Una retta doppia di rette della superficie si riduce a 6 raggi nodali (nodal rays), cioè rette uscenti dal nodo, sicché vi sono inoltre altre 15 rette sulla superficie)
- III. Nodo biplanare₃, classe 9 (In egualità dei 2 piani nodali l'intersezione colla superficie si riduce in tre raggi nodali, ciascuno dei quali conta per 3 rette della superficie; vi sono altre 9 rette su questa)
- IV. Due nodi proprii, classe 8 (La loro congiungente sta sulla superficie e conta 2 volte per ciascuno restipole di raggi nodali, sicché di questi ne rimangono 2-4; poi vi sono altre 7 rette sulla superficie, sull'una delle quali si appoggiano le altre (ed anche le congiungenti dei nodi) formando 3 triangoli che l'hanno per lati comuni)
- V. Nodo biplanare₂, classe 8 (In ognuno dei 2 piani nodali stanno 2 raggi nodali, e il filo nodale, che pure appartiene alla superficie; oltre a questo 5 rette, vi sono altre 5 rette sulla superficie)
- VI. Un nodo proprio e un nodo biplanare₃, classe 7 (Oltre alla congiungente dei due nodi vi sono 4 raggi per il nodo biplanare, 3 del nodo proprio, e altre 3 rette sulla superficie)
- VII. Nodo biplanare₂, classe 7 (Uno piano nodale tocca la superficie lungo il filo nodale e ne contiene ancora un'altra retta, mentre l'altro piano ne contiene ancora due rette; vi sono inoltre 2 altre rette sulla superficie)
- VIII. Tre nodi proprii, classe 6 (Sulla superficie stanno le 3 congiungenti; per ogni nodo passano ancora 2 raggi nodali e in ciascuno dei 3 piani così determinati sta ancora una retta, sicché sono 3+6+3)
- IX. Due nodi biplanari₃, classe 6 (I due nodi hanno comune un piano nodale che oscula la superficie lungo la congiungente; inoltre ogni altro due piani nodali vi sono risp. 3 rette nodali per ciascuno)
- X. Un nodo proprio e uno biplanare₂, classe 6 (La congiungente dei 2 punti, il filo nodale del nodo biplanare, 2 altre raggi di questo e 2 del nodo proprio, e un'altra retta sulla superficie)
- XI. Un nodo biplanare₂, classe 6 (Un piano nodale oscula la superficie lungo il filo nodale, l'altro contiene ancora 2 raggi nodali; non vi sono altre rette sulla superficie)
- XII. Nodo uniplanare₃, classe 6 (Il piano nodale contiene 3 raggi nodali della superficie, e questi contengono inoltre altre 3 rette formanti un triangolo)
- XIII. Un nodo biplanare₃ e due nodi proprii, classe 5 (Oltre alle 3 congiungenti i nodi vi sono 2 raggi nodali per il punto biplanare, 1 per ciascun nodo proprio, e un'altra retta)
- XIV. Un nodo biplanare₂ e un nodo proprio, classe 5 (Oltre alla congiungente ed al filo nodale vi è un raggio nodale per ciascun nodo)
- XV. Nodo uniplanare₂, classe 5 (Il piano nodale tocca lungo un raggio nodale e tangente secondo un altro; vi è inoltre una retta sulla superficie appoggiata su questo)
- XVI. Quattro nodi proprii, classe 4 (Oltre alle 6 congiungenti, vi sono sulla superficie 3 altre rette di un piano)
- XVII. Due nodi biplanari₃ ed un nodo proprio, classe 4 (La superficie contiene oltre alle 3 rette congiungenti, un raggio nodale per ciascuno dei due nodi biplanari)
- XVIII. Due nodi proprii ed uno biplanare₂, classe 4 (Oltre alle 3 rette congiungenti ed al filo nodale del punto biplanare, sta sulla superficie un'altra retta)

- XIX. Un nodo biplanare₆ ad uno proprio, classe 4 (la superficie contiene solo le congiungenti dei nodi e il filo nodale del nodo biplanare)
- XX. Un nodo uniplanare₈, classe 4 (Il piano nodale oscula la superficie lungo una retta che e' quella in cui coincidono in questo caso tutte le 27 rette della superficie)
- XXI. Tre nodi biplanari₃, classe 3 (la superficie contiene solo le 3 congiungenti di questi punti)
- XXII. Bigati di 3° ordine e 3° classe (1° specie di Cayley; la 2° specie e' disintegrate, come nota il Cayley stesso.)

Prima di passare alle varie specie particolari, lo Schläfli cerca l'influenza di un punto doppio sulla classe della superficie con un calcolo analitico, prendendo il punto doppio come uno dei punti fondamentali. Trova così 8 specie di nodi sulla superficie cubica (di cui le prime 3 le trova per una superficie algebrica qualunque): 1° il nodo proprio che diminuisce la classe di due, 2° il nodo biplanare, il cui filo nodale (the nodal edge) non appartiene alla superficie, e che diminuisce la classe di tre, 3° il nodo biplanare in cui un piano, diverso da entrambi i piani nodali, tocca la superficie lungo il filo nodale, appartenente a questi, e che diminuisce la classe di quattro, 4° il nodo biplanare in cui uno dei 2 piani nodali tocca la superficie lungo il filo nodale, e che diminuisce la classe di cinque, 5° il nodo biplanare di cui un piano nodale oscula la superficie lungo il filo nodale e diminuisce la classe di sei, 6° il nodo uniplanare il cui piano nodale taglia la superficie in tre linee distinte, e che diminuisce la classe di sei, 7° il nodo uniplanare, il cui piano nodale tocca la superficie lungo una retta, e che diminuisce la classe di sette, 8° il nodo uniplanare, il cui piano nodale oscula la superficie lungo una linea retta, e che diminuisce la classe di otto.

Sturm On some new theorems on curves of double curva-
 ture. Report of the British Association for the advancement of science
 1881 p. 440. C^n ($n = 2t + 1$). Posto $h_j = \frac{1}{2}(n-j)(n-j+3)$
 $+ \frac{1}{2}(j-2)(j-3)$, ove $t+1 \geq j \geq 3$; se per $h \leq h_j$ esistono aggte
 d'ord. $n-j$ e la loro sovrabbondanza sarebbe $\frac{1}{2}(j-2)(j-3)$ [N. p. 24]
 La condiz. $h \leq h_4$ equivale a dire $p \geq n-2$, $n \leq p+2$
 la C^n necessaria speciale.

Le aggte minime son d'ord. $n-j$, j essendo determinato
 da $h_j \geq h > h_{j+1}$

Charles Théorie anal. des courbes à double courbure de
 tous les ordres tracées sur l'hyperboloïde à une nappe)
 G. R. 53 1861 p. 985. Sulla F^2 . x, y siano i segmenti
 OA, OB di 2 gener. fissi, determinati dalle P compresi fra P e 2 gener. fissi. Charles
 le assume per coord. *) L'equ. $f(x, y) = 0$ dà una curva (m, n)
 e viceversa. - Nella nota successiva p. 1074 determina così
 le intersi di tali curve, e i loro caratteri (Cayleyiani ec.)

Niente di utilizzabile nei lavori sulle curve delle rigate di 3° e 4° ord.
 (son curve partici che genera con fasci di sup.
 *) Già in Plücker 1847, ma senza gli sviluppi che Charles fa sulla curve. Invece tutto vice
 in Cayley V p. 70, 1861, partendo dalle formule di Plücker (circa 1.2) per le 4 curve di 3° sulla quadrica $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

Sturm. libro su F³

*7 J. Halphen. Mémoire sur les courbes gauches algébriques
Extrait par l'Autheur C. R. 70, 1870 p. 380-382

Se su F_n si considerano le C^m con almeno $\frac{m-n+1 \cdot m-n+2}{2} + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2}$ punti doppi apparenti, ogni altra curva della F_n è il resto di una tal curva C^m . Ora H. dice che ha il modo di costruire queste: Ne seguono tutte le curve di F_n (N. p. 57 nota, trova che non è esatto)

Dopo ciò dà i teori sull'esistenza delle C di genere massimo e minori... su F_2, F_3, F_4, \dots

~~Pag. 382 C^m con $\frac{m-2 \cdot m-3}{2} + 1$ a $\frac{m \cdot m-1}{2}$ punti doppi. non determinate da $2m$ punti.~~

Dopo che Salmon e Cayley hanno dato le C^4 e C^5 , Ed. Weyer C. R. 76, 1873

Brill u. N. M. A. 7 (1873); Noether II Aufs. M. A. 8 (1874)

Sturm osserva che Weyer sbagliò
Sturm art. 73

Berlin Sitzungsberichte 29 Juni (1882) p. 731: Valentiner ha inviato il lavoro non per concorrere ma per prender dato di priorità

~~22~~ Sturm — Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln
(Math. Ann. XIX, pag. 487-8)

Il genere π di una curva posta su un cono d'ordine n , classe m e genere p , la quale passi b volte nel vertice del cono e ne incontri ancora a volte ogni generatrice, è

$$\pi = \frac{1}{2} a(a-1)n + (a-1)(b-1) + ap.$$

~~23~~ Genty. — Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure. (Journal de Pésal, (3) VIII, 299-335)

Dopo aver mostrato nell'introduzione su alcuni esempi l'applicazione della teoria dei quaternioni a stabilire le equazioni di vari complessi, l'A. dà le equazioni e la classificazione dei complessi nominati nel titolo e studia poi diffusamente la prima specie di essi, caratterizzata dal comparire due funzioni vettoriali lineari coniugate nell'equazione. Riceve una trattazione particolarmente dettagliata la superficie di Kummer legata a questo complesso.

7
21 - Dal Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Jahrgang 1881

(Pag. 550.) Sigil Schmidt. Om de Kurver af fjerde Orden, hvis Ligninger

kun indeholde Kvadraterne af de variable. - Leuthen Tidsskrift (4) V, 145-156

Studio analitico delle curve di 4° ordine che sono rappresentabili coll'equazione

$$f(\xi) = a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 = 0$$

dove $\xi_i = x_i^2$. Dimostrazione del fatto che tali curve (e solo queste) si possono considerare in quattro modi diversi come luoghi dei punti da cui due date coniche sono viste sotto un dato rapporto anarmonico. — L'autore poi mostra come una $C^{(4)}$ razionale (con 3 punti doppi) possa venir trasformata in una curva della specie considerata mediante una trasformazione quadratica di rette, la quale è analoga alla trasformazione di punti che muta una conica in quella curva. Considerando le tangenti cuspidali (Wendetangenten), esse toccheranno una conica, che ha doppio contatto con quella che tocca le sei tangenti ordinarie uscenti dai punti doppi.

25 G. Kobb. Sur la théorie des fonctions algébriques
de 2 variables. Journal de math (4) t. 8 1892 p. 385.

Si tratta di sviluppare in serie le coord. ξ, η, ζ di
un po della sup. in prossimità di $P(0,0,0)$. Se P è
semplice basta riferire la sup. alla stella di raggi P .
Se P è m -plo, si fa la trasformazione (oio io scrivo
 ξ, η invece di ξ', η')

$$\xi = \xi'(\xi' + a), \quad \eta = \xi'(\eta' + b), \quad \zeta = \xi'^2$$

che è 1 trasfe biraz. quadratico dello spazio, deter-
minata dai coni quadrici (congiunta $\pi: A\xi' + B\eta' + C\xi' + D = 0$)

$$A(\xi - a\zeta) + B(\eta - b\zeta) + (C\xi + D)\zeta = 0$$

i quali toccano il piano all' ∞ lungo la retta $\zeta = 0$
ed inoltre passano per P . \mathcal{C} coni che toccano
la generatrice $\xi - a\zeta = 0, \eta - b\zeta = 0$
del cono osculatore in P si hanno per $D = 0$:
~~sono dunque spazzati nel π^0 all' ∞ e nel piano~~

~~variabile $A(\xi - a\zeta) + B(\eta - b\zeta) = 0$ passante~~
corrispondono dunque ai piani $A\xi' + B\eta' + C\xi' = 0$
cioè per l'orig O' ; sicché a quella ζ corrisponde
il punto O' della sup. trasformata, che sarà
semplice finché quella retta non è
multiplo pel cono osculatore. — Questo 2° caso
vien trattato a pag. 391. La quale retta è m -plo
pel cono, il punto corrisponde O' risulta per
la superf. trasformata di molteplicità $\leq m$.
Segue che O' avrà molteplicità $< m$ (quella di P)

tranne il caso che quella tg. sia m -pla
 nel cono oscul^c d'ord. m in P .

Supposto che ciò si verifichi per più
 trasformazⁱ successive, si dimostra che il numero
 di queste è finito, considerando la molteplicità
 che la retta fondamentale (all'os di $\zeta = 0$) ha
 nel cono circosc^o $X(V, W)$ alla superf. da un suo punto:
 cono che si muta sempre in un tal cono. Evid.
 che sia il procedim^o di Noether M. A. IX esteso,
 sup^a: certo dice che è quello di Weierstrass.
 Li ha, ζ essendo il numero delle trasformⁱ,
 ν l'ordine del cono circosc^o $X(V, W)$ (l'alt.
 dice μ invece che ν): $(\zeta + 1)(m - 1) \leq \nu - 1$

Risulterebbe che i piⁱ singolari in numero
 finito si possono ridurre a singolarità ordinarie,
 almeno se non vi sono quei* per effetto
 della retta fondamentale che tenno dia origine
 a nuove singolarità superiori* come vi sono

Noether. Ueber die algebraischen Functionen einer
und zweier Variablen. *Notizb. Math. Naturw. 1871 p. 267-278*

Nel 1° § scioglie mediante trasformazioni razionali piani le singolarità superiori di una curva piano. "Dazu genügt es, irgend eine rationale Transformation, bei welcher ein Fundamentalpunkt in den singulären Punkt P der Curve C gelegt wird, auf die Curve anzuwenden. Es wird dabei nur eine so allgemeine Lage der Transformationscurven gegen C vorausgesetzt, dass die Jacobische Curve der Transformation von den Tangenten von C in P nicht berührt wird" (pag. 268). — Dice poi che i trasformati di P sono "von niedrigerer Singularität".

Il § II ^{pag. 270} comincia così "Die Methode dieser Transformation lässt sich auf algebraische Functionen zweier Variablen ausdehnen und führt hier insbesondere zur Untersuchung singulärer Knotenpunkte einer Fläche und zur Bestimmung der Wirkung auf das Flächengeschlecht u. s. w. . ." "Wenn man eine Raumtransformation ^{270/271} anwendet, bei welcher ein Fundamentalpunkt in den singulären Punkt P der Fläche F gelegt wird, so entspricht dem Punkt P auf der transformierten Fläche F' eine Curve C' , durch welche F' im Allgemeinen vielfach und singular gehen wird, aber so, dass die Ordnung dieser Singularität niedriger ist, als die von P auf F . Man kann nun entweder dieses Verfahren wiederholen, indem man C' als Fundamental-

curve einer zweiten Transformation annimmt, wodurch man auf Curven von niedrigerer Singularität geführt wird; oder, was im Allgemeinen vortheilhafter ist, man bestimmt direct den Einfluss der vielfachen Curve von F' auf das Flächengeschlecht dieser Fläche. Das Fläch.geschl. ist, wenn F' von der Ordnung m ist, gleich der Anzahl der F^{m-4} , welche sich in den vielfachen Curven genau so zu verhalten haben, wie die Curven $(m-3)$ ter Ordn., welche das Geschlecht eines ebenen Querschnitts der Fläche bestimmen, in den Schnittpunkten dieses Querschnitts mit den vielfachen Curven. Man erschliesst daher aus den Reihenentwicklungen in einem ebenen Querschnitt in einem Punkte von C' , die denen in einem ebenen Querschnitt durch P bei F entsprechen und nur von niedrigerer Ordnung sind, das Verhalten der Flächen $(m-4)$ -ter Ordnung, und dadurch das Fläch.geschl. p von F' .

Diese Reihenentwicklungen werden, wenn man den ebenen Querschnitt unbestimmt lässt, in einzelnen Punkten der vielfachen Curven ungültig; aber für das Verhalten der F^{m-4} ist die Untersuchung dieser Punkte, die übrigens selbst nach der angegebenen Methode geschehen könnte, überflüssig."

Segnono interessanti esempi di punti singolari e determinazione della loro influenza sul genere. Il § III tratta dei piani doppi, loro genere; caso che si rappresentano su coni

Commemorazione di Giulio Plücker di A. Clebsch.
(Giornale di mat. XI p. 153)

Pag. 154 a proposito dell'indirizzi sintetico ed analitico:
«Egli è soltanto accordandosi fra loro ed integrandosi a vicenda ch'essi possono esaurire la ricerca matematica; nessuno dei due può a lungo restar privo del soccorso dell'altro, senza grave offesa della sua propria essenza»

A. Clebsch. - Zum Gedächtniss an
Julius Plücker (Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen,
Bd. 16, 1871)
"Abein bedeutendes und für die weitere Entwicklung
folgerreiches Moment darf wohl hervorgehoben werden,
dass hiermit sogleich zwei Richtungen gegeben waren,
deren Gegensatz, mehr oder weniger ausgeprägt, alle
Epochen mathematischer Forschung begleitet, und
welche man als die abstracte und die anschauungsmässige
Richtung bezeichnen darf. Beide zusammen umfassen
erst in Verein und Ergänzung das ganze mathematische
Forschung, und es vermag keine von beiden
auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigen-
sten Wesens die Begleitung und den Einfluss der
andern zu entbehren."

J. Lie. Ueber die Grundlagen der Geometrie (Erste
Abhandlung). Berichte der k. sächs. Ges. d. W. zu Leipzig
1890 pag. 284 - 321.

6. Study. Ein Reciprocitätsgesetz in der
Theorie der algebraischen Functionen (Berichte der
k. sächs. Ges. d. W. zu Leipzig. 1890 pag. 151-171)

Tratta di un teorema che abbraccia quello di Riemann
e Roch, ecc.

Schwarz. De superficiebus in planum
 explicabilibus p. 64 (1865) p. 1-16
 minorum septem ordinum.

ord. curva regresso	3	4	4	5	6	5	6	7
ord. superf. svilup.	4	5	6	6	6	7	7	7
classe superficie	3	4	6	5	4	7	6	5
tg. doppie in un piano	1	2	6	4	3	10	7	5
orde della curva regresso per 1 p.	1	2	3	4	6	5	7	10
piani di flessor	0	1	4	2	0	5	3	1
regressi della curva	0	1	0	2	4	1	3	5
ordine curva doppia della superf.	0	2	6	5	4	10	9	8
classe svilupab. bitg. della curva	0	2	4	5	6	8	9	10
punti della curva per cui passa una tg. altrove	0	0	4	2	0	7	6	5
punti per cui passano 3 generatrici	0	0	0	0	0	2	1	0
punti doppi apparenti della curva doppia	0	0	6	4	3	22	18	15
ordine svilupabile rango curva doppia	0	2	6	6	6	13	12	11

30 Beltrami pag. 329 (1867-68)

$\Delta_2 u = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{H} (G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q}) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{H} (E \frac{\partial u}{\partial q} - F \frac{\partial u}{\partial p}) \right\}$
 (posto $H = \sqrt{EG - F^2}$) è il parametro differenziale di 2° ord. di u . Ponendolo $= 0$ si ha la condiz^e di isometria del sistema di curve $u = \text{cost.}$, cioè queste con le ortogonali ($v = \text{cost.}$) dividono la superf. in quadrati ∞ piccoli.

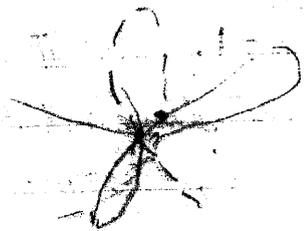
$\Delta_1 u = \frac{1}{H^2} \left\{ E \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 - 2F \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial u}{\partial q} + G \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^2 \right\}$
 è il parametro differenziale di 1° ord. (e passando dalla curva $u = \text{cost}$ alla $u + du$, la distanza normale nel punto (p, q) essendo dn , si ha $\Delta_1 u = \left(\frac{\delta u}{\delta n} \right)^2$)

S' introduce come variabⁱ complesso non già $p + iq$, che non sarebbe opportuna. Ma viene invece introdurre come variabⁱ o funzⁱ complesse delle W per cui si trova esser condizione necessaria e sufficiente $\Delta_1 W = 0$. Posto $W = u + iv$ si ha poi $\Delta_2 u = 0$, $\Delta_2 v = 0$ e quindi $\Delta_2 W = 0$ e quelle equazⁱ differenzⁱ parziali che legano u e v e le caratterizzano. (come una qualunque di esse è caratterizzata dalla $\Delta_2 u = 0$)

33 Beltrami Ricerche di Analisi applicata alla Geometria

Giornale II (1864) e III (1865). Nel II accanto al parametro differenziale di 1° ord. (di Lamé) introduce e mostra l'invariabilità per trasformazⁱ di coord. del param. differ. di 2° ord.

Sistemi isotermi di curve o parametri isotermi sono quelli u, v tali che $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ dove $\frac{E}{G} = \frac{U}{V}$ essendo U funz. della sola u e V funz. della sola v . Senza mutar le curve si rendono questi parametri isometrici quando si rende $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$. Con essi si risolve subito la questione della rappres^e conforme di 2 superf. già risolta da Gauss in sostanza nello stesso modo.



74

Kummer. — Ueber diejenigen Flächen, welche mit ihren reziprok polaren Flächen von derselben Ordnung sind und die gleichen Singularitäten besitzen. (Monatsb. Berl. 1878, 17 Januar, pag. 25—36)

Considero il sistema di rette (3, 3) rappresentato dalle equ. in coord. di rette

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K' & L' & M' \end{vmatrix} = 0,$$

dove $K \dots$ sono lineari. Esso contiene 8 quadriche $K + \lambda K' = 0, L + \lambda L' = 0, M + \lambda M' = 0$ formanti un sistema (3, 3). Gli 8 punti base stanno sulla curva cuspidale (Wendungskurve) di 12° ordine della sup. di 8° ordine e 8ª classe focale del sistema (inviluppi la sup. e la curva del sistema di quadriche). Questa sup. ha 12 piani t lungo coniche e costituiti da 6 coppie di piani che stanno nel sistema di quadriche; sugli assi di queste coppie stanno 6 coppie di punti singolari con coni osculatori di 2° ordine. — La sup. è focale per due analoghi sistemi (3, 3) provenienti dalle 2 generaz. di 1 stesso sistema di quadriche.

Halphen. - Recherches de géométrie à n dimensions
(Bulletin de la Soc. math. de France vol II p. 34-52, 25 Juin 1873)

Rappresentazione di una varietà algebrica qualunque di S_n mediante monoidi così: $\varphi(x_1, \dots, x_{n-i+1}) = 0$, $x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{\sqrt{\quad}}$,
 $x_{n-i+3} = \frac{u_{n-i+3}}{\sqrt{\quad}}$, \dots , $x_n = \frac{u_n}{\sqrt{\quad}}$. Ne trae l'ordine dell'intersezione di due o più varietà. Caso delle curve sghembe. - Applicazione degli iperspazi alla geometria dei sistemi di curve di un piano: così vengono date delle interpretazioni per tali sistemi dei teoremi, che le M_{n-1}^2 stanno in S_n , che le M_2^2 sono doppiamente rigate, che le M_2^2 o stanno in S_3 (ed hanno in generale 27 rette), o sono rigate. « Il est entendu que ces derniers théorèmes s'appliquent aussi aux complexes de surfaces, et aux complexes de M_{n-1}^2 de S_n . On voit, par les applications ci-dessus, que la considération des complexes de courbes donne une interprétation très-nette de la géométrie à n dimensions. »

Pouret. - Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques (Bulletin Soc. math. t. I p. 122-124, 5 mars 1873.)

Pouret. - Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface (ibid. p. 258-9, 9 July 1873)

Jordan. - Essai sur la géométrie à n dimensions
(Bulletin Soc. Math t. III p. 103-174, 12 mai 1875)

Oltrè alle proprietà elementari dei moltipiani, e specialmente a quelle metriche (parallelismo, ortogonalità, angoli), tratta delle sostituzioni ortogonali o movimenti in S_n , della loro scomponibilità in rotazioni e traslazioni, colle distinzioni a seconda della parità di n , e coi sistemi nulli se n è impari (movimenti elicoidali) nel qual caso cita Schläfli (Creelle 65), ecc., e l'estensione in generale dei teoremi di Chasles sul moto dei corpi solidi.

30 Cayley. - On the Curves which satisfy
given Conditions (Phil. Trans. t. 158 p. 75
traviata e letta nel 1867)

Da pag. 76 a 84 *) "On the quasi-geometrical representation of Conditions" si rappresentano i sistemi di curve piane con punti d'iperspazi e le condiz. con varietà, sicchè l'ordine della condizione composta di due o più condizioni (indipendenti) è il prodotto degli ordini di queste condizioni. *) Articoli n. 1-23

A pag. 109 e seg. n. 74-93 si occupa della formula di Jonquières sulle curve tangenti ecc.

40 Cayley. - A Memoir on Abstract Geometry
(Phil. Trans. t. 160 p. 51 letta nel 1869)

Comincia coll'osservare l'importanza che deve avere l'Abstract m -dimensional Geometry, che si presenta.... (The science) presents itself in two ways, - as a legitimate extension of the ordinary two- and three-dimensional geometries; and as a need in these geometries and in analysis generally); e come esempio cita le questioni sui sistemi di curve piane considerando queste come punti d'iperspazi. - Tratta poi delle varietà algebriche di vari ordini e dimensioni di S_m , delle loro intersez., degli spazi (omali) tangenti ecc.

43

Lindemann - Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (Bull. Soc. math t. V p. 113, 1877 - e deuxième Note nel t. VI p. 195, 1878)

Nella 1^a comunicaz. dimostra che "rappresentando gli zeri di una forma binaria a_{ξ}^{2n} coi $2n$ p_i di una conica $F=0$, per essi si può condurre una curva d'ord. n $\alpha_x^n \equiv \beta_x^n \equiv \gamma_x^n \equiv \dots = 0$ di cui tutte le coniche polari sono armonicamente inscritte ad $F=0$; essa gode della proprietà particolare che il suo covariante

$$[(\alpha\gamma\delta)(\alpha\epsilon\zeta)(\beta\gamma\epsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\epsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\epsilon\zeta)]^2 \alpha_x^{n-4} \beta_x^{n-4} \gamma_x^{n-4} \delta_x^{n-4} \epsilon_x^{n-4} \zeta_x^{n-4}$$

(del 6° grado nei coeff.) s'annulla identicamente; ~~è~~ la $(2p)^m$ polare binaria di un punto della conica $F=0$ rispetto ad a_{ξ}^{2n} o determinata dalle intersez. della conica col la p polare dello stesso punto risp. alle curve $\alpha_x^n = 0$

Nella 2^a comunicaz. trova la curva così fatta quando il gruppo di $2n$ p_i è dato mediante un'altra curva d'ord. n qual.

1
Phasies. Considerations sur le caractère propre des

principes de correspondance. (E. R. 1^{er} semestre 1874)

L'auteur se propose de montrer avec quelle facilité on puisse au moyen du principe de correspondance étendre multe propositions, avvertendo però che bisogna badare sempre alle soluzioni esterne che possono introdursi. Dei teoremi seguenti dimostri solo quelli che non sono numerati, e gli altri li enuncia soltanto.

Se attorno ad un punto ν polo O di una data curva U d'ordine m e classe n si prende rotore due rette OA, OA' formanti con due rette fisse per O un rapporto anarmonico costante λ , l'involuppo delle corde intercelte AA' è una curva di classe $2(m-1)(m-\nu)$, che si riduce ad essere di classe $(m-1)(m-\nu)$ se $\lambda = -1$.
Bisogna dei punti in cui λ incontra le tangenti nei punti A, A' della curva data è di ordine $2(n-1)(m-\nu)$, che si riduce ad $(n-1)(m-\nu)$ per $\lambda = -1$.

1. Le normali nei punti A incontrano quelle nei punti A' in punti di una curva di ordine $2(m+n-1)(m-\nu)$.

2. Le normali nei punti A incontrano le tangenti nei punti A' in punti appartenenti ad una curva d'ordine $(m+2n)(m-\nu)$.

3. Se dal punto in cui la tangente in A' incontra una tangente fissa della curva U si conduce una parallela a ogni corda AA' queste parallele involuppano una curva di classe $(2m+n-3)(m-\nu)$.

4. Se dal punto in cui la tangente in A' incontra una tangente fissa di U si conduce una normale a ogni corda AA' queste involuppano una curva di

AP 32

classe $(2m+n-3)(m-v)$.

5. Vi sono $(2m+n-2)(m-v)$ corde AA' che sono normali nel loro punto A (e altrettante che lo sono in A').

6. Vi sono $(m+n-4)(m-v)$ corde AA' che sono tangenti ad U nel punto A .

7. Le parallele condotte dal punto d'incontro delle tangenti in A e A' alle AA' inviluppano una curva di classe $2(m+n-2)(m-v)$.

8. Le perpendicolari condotte dal punto d'incontro delle tangenti in A e A' alle AA' inviluppano una curva di classe $2(m+n-2)(m-v)$.

9. I piedi delle perpendicolari sono su una curva d'ordine $2(2m+n-2)(m-v)$.

10. Da A si conduce la normale ad OA' ; queste perpendicolari inviluppano una curva di classe $(2m-v)(m-v)$.

11. I piedi di queste perpendicolari sono su una curva d'ordine $(3m-2v)(m-v)$.

12. La normale in A' incontra OA in una curva d'ordine $(2m+n-v)(m-v)$ avente in O un punto multiplo d'ordine $(m+n-v)(m-v)$.

13. La perpendicolare condotta da A' su AA' incontra OA su una curva d'ordine $[(m-v)(m+n-1) + (m+n)(m-1)](m-v)$.

14. Le rette condotte da A ai punti in cui la normale ad U in A' li incontra inviluppano una curva di classe $(m-1)(m-v)(2m+n-2)$.

15. La normale in A incontra la normale ad U da A' in punto il cui luogo è una curva d'ordine $(m-v)(m+n-1)(2m+2-2)$.

AP30

3

16. Le rette condotte da A ai piedi delle normali da A' inviluppano una curva di classe $(m-1)(m-v)(2m+n-2)$.

17. Da A' si conducono le tangenti ad U che lo toccano in punti A''. L'inviluppo delle rette AA'' è di classe $(m-1)(m-v)(m+n-4)$.

18. La tangente in A' ad U la tocca in $m-2$ punti A''': l'inviluppo delle AA''' è di classe $(m-1)(m-v)(3m+n-4)$.

19. Le normali condotte da A incontrano le tangenti condotte da A' in una curva d'ordine $(m-v)[n(m-2)(m+n-1) + (n-2)(m+n)(m-1)]$.

20. Ogni corda AA' incontra una curva U_m (d'ordine m) in punti da cui si conducono le tangenti ad U_m : esse scend. OA in punti il cui luogo è d'ordine $m, n(m-v)(3m-v-2)$.

21. Si conducono le tangenti di U_m parallele ad AA': queste tangenti e le corde si intersecano in una curva U_m'' corde il cui inviluppo è di classe $4m'(m'-1)n(m-1)(m-v)$.

22. Da A si conducono le tangenti ad U_m'' e da A' le normali ad U_m'' : il luogo dei punti d'incontro delle prime colle seconde è d'ordine $m(m-v)n'(m''+n'')$.

23. Da A si conducono le tangenti ad U_m'' e le normali ad U_m'' : l'inviluppo delle congiungenti i punti di contatto delle prime coi piedi delle seconde è di classe $m(m-v)[m'(m''+n'') + n'm'']$.

Generalizzando il teorema fondamentale della teoria delle coniche il Poncelet prova che:

Il luogo dei punti da cui si possono condurre ad k curve di classi n_1, n_2, n_3, n_4

quattro tangenti formanti un dato rapporto anarmonico è d'ordine $2n_1 n_2 n_3 n_4$.

1. Il luogo di un punto da cui si possono condurre due tangenti a. b a $U^{n'}$ e due c. d a $U^{n''}$, $U^{n'''}$ formanti un rapporto anarmonico (a b c d) dato è d'ordine $2n'(n'-1)n''n'''$.

2. Il luogo di un punto da cui si possono condurre alle tre curve quattro tangenti a. b. c. d tali che il rapporto anarmonico (a c b d) sia dato, (essendo a, c tangenti ad $U^{n'}$, $U^{n''}$ coniugate) è d'ordine $4n'(n'-1)n''n'''$.

3. Il luogo di un punto da cui si possono condurre quattro tangenti, tre ad $U^{n'}$ ed una a $U^{n''}$ formanti un rapporto anarmonico dato è d'ordine $2n'(n'-1)(n'-2)n''$.

75 *Altra nota (1° semestre 1874)*

Sur les polygones inscrits ou circonscrits à des courbes.

(Continuo a numerare solo quei teoremi che sono enunciati senza dimostrazione)

Quando tutti i lati di un poligono devono toccare rispettivamente delle curve di classi n^1, n^2, n^3, \dots e tutti i vertici menad uno devono toccare su curve d'ordine m_1, m_2, m_3, \dots il vertice libero descrive una curva d'ordine $2m_1 m_2 \dots n^1 n^2 \dots$

Dunque il numero dei poligoni di p lati i cui vertici stanno su curve di ordini m_1, m_2, \dots, m_p ed i cui lati toccano curve di classi $n^1, n^2, \dots, n^{(p)}$ è $2m_1 m_2 \dots n^1 n^2 \dots$ — Se tutte queste curve di classi n^1, \dots hanno comunemente una tangente (la quale sia multipla d'ordine v^1 per la prima, v^2 per la seconda, ecc.

AP33

allora il luogo del vertice libero è una curva d'ordine $m, m_2 \dots (2n'n'' \dots - v'v'' \dots)$

Ed i teoremi correlativi ai precedenti.

Considerando le evolute si ha: Quando tutti i lati di un poligono sono normali a curve $U_{m_1}^{n_1}, U_{m_2}^{n_2}, U_{m_3}^{n_3} \dots$, e tutti i vertici del poligono meno uno devono scorrere su curve $U_{m_1}, U_{m_2} \dots$, il vertice libero descrive una curva dell'ordine $m, m_2 \dots [2(m_1 + n_1)(m_2 + n_2)(m_3 + n_3) \dots - m_1 m_2 m_3 \dots]$.

Quando tutti i vertici di un poligono devono scorrere su date curve $U_{m_1}, U_{m_2} \dots$ ed i lati meno uno devono essere normali a curve $U_{m_1}^{n_1}, U_{m_2}^{n_2} \dots$, quel lato libero involuppa una curva di classe $2m, m_2 \dots (m_1 + n_1)(m_2 + n_2) \dots$.

Quando due angoli $(a, a'), (b, b')$ circoscritti a due curve di classi n', n'' si muovono in modo che il punto d'incontro dei loro lati a, b scorra su una curva d'ordine m , il punto d'intersezione degli altri due lati a', b' descrive una curva d'ordine $2mn'^2n''^2$.

Un angolo (a, a') rotola intorno al suo vertice O , punto multiplo d'ordine v di una curva U_m ; un secondo angolo (b, b') è circoscritto ad una curva $U_{m'}$; i lati a, b dei due angoli si tagliano sulla curva U_m ; il luogo dei punti d'incontro degli altri due lati a', b' è una curva d'ordine $(2m - v)n'^2$ avente in O un punto multiplo d'ordine mn'^2 .

Sei quadrilateri $ABCC'$ hanno i loro punti A, B, C su tre curve d'ordine m_1, m_2, m_3 , i loro lati $C'A, AB$ tangenti a due curve di classi n', n'' ; i loro

angoli opposti B e C' di grandezza data: il loro lato CC' involuppa una curva di classe $3m_1 m_2 m_3 n' n''$.

Da questa forma si deducono i seguenti te:

Sei quadrilateri $ABCO$ hanno i loro vertici A, B, C su tre curve d'ordine m_1, m_2, m_3 ; i loro due lati OA, AB sono tangenti a due curve di classi n', n'' ; ed infine i loro angoli opposti B e O sono di grandezza data: il luogo del loro vertice O è una curva d'ordine $4m_1 m_2 m_3 n' n''$.

Sei quadrilateri $ABCO$ hanno i vertici A, B, C su tre curve d'ordini m_1, m_2, m_3 e gli angoli opposti A e C , di grandezza data, hanno i loro lati AO, CO tangenti a due curve di classi n', n'' : il quarto vertice O è su una curva d'ordine $4m_1 m_2 m_3 n' n''$.

I tre vertici A, B, C di un quadrilatero $ABCO$ scorrono su tre curve d'ordini m_1, m_2, m_3 ; gli angoli A, C sono di grandezza data, ed i loro lati AO, CO sono tangenti a due curve di classi n', n'' : il vertice O descrive una curva di ordine $4m_1 m_2 m_3 n' n''$.

Abbiasi ora una serie di triangoli AOA' i cui vertici O, A, A' scivolano su tre curve $U_m^n, U_m^{n'}, U_m^{n''}$ ed i cui lati OA, OA' toccano costantemente due curve di classi n''', n'''' . Si è detto che il terzo lato AA' involuppa una curva di classe $2m' m' m'' n''' n''''$. Or bene si avranno i Teoremi seguenti:

1. Le parallele ai lati AA' , condotte dai vertici O dei triangoli involuppano una

curva di classe $3m m' m'' n'' n'''$.

2. Le perpendicolari da O ad AA' involucono una curva della stessa classe.
3. I piedi di queste perpendicolari stanno su una curva d'ordine $5m m' m'' n'' n'''$.
4. Le tangenti ad $U_{m'}$, $U_{m''}$ in A ed A' si tagliano su una curva d'ordine $5n'' n'''' (m' n'' + m'' n''')$.
5. La retta che congiunge O al punto d'intersezione delle tangenti in A, A' tocca una curva di classe $m n'' n'''' (m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
6. Le normali ad $U_{m'}$, $U_{m''}$ in A ed A' si tagliano su una curva d'ordine $m n'' n'''' (3m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
7. Le rette condotte da ogni punto O al punto d'intersezione delle normali in A, A' involucono una curva di classe $m n'' n'''' (3m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
8. La tangente di $U_{m'}$ in A incontra la normale di $U_{m''}$ in A' su una curva di ordine $m n'' n'''' (m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
9. La congiungente il punto O col punto d'intersezione delle tangenti in A colla normale in A' involucono una curva di classe $m n'' n'''' (m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
10. La congiungente il punto d'intersezione delle tangenti in A, A' col punto d'incontro delle normali negli stessi punti involucono una curva di classe $2m n'' n'''' (m' m'' + m' n'' + m'' n''')$.
11. La normale di $U_{m'}$ in O incontra AA' su una curva d'ordine $m' m'' n'' n'''' (2m + n'')$.
12. La perpendicolare in A ad OA e la tangente ad $U_{m''}$ in A' si tagliano su una curva d'ordine $m m' n'' n'''' (2m'' + n''')$.
13. La perpendicolare in A ad OA e la normale ad $U_{m''}$ in A' si tagliano su una curva d'ordine $m m' n'' n'''' (3m'' + n''')$.

14. Le perpendicolari ad OA, OA' in A, A' si tagliano su una curva d'ordine $4m'm''n''$.
15. Al punto d'intersezione delle perpendicolari ad OA, OA' in A, A' si conduce la parallela ad OA : essa involoppa una curva di classe $5m'm''n''n''$.
16. Dal punto A si conduce una parallela ad OA' e per A' la parallela ad OA : esse si tagliano su una curva d'ordine $2m'm''n''(m'+m'')$.

47 D. Hilbert. - Zur Theorie der
 algebraischen Gebilde (Gött Nachr. 1888.
 I^e Note, pag. 450 - 457)

1° Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ è una serie inf. di forme
 di n variabili x_1, x_2, \dots, x_n , vi è sempre un numero m
 tale che ogni forma di quella serie si può rappresen-
 tare con

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_m \varphi_m,$$
 ove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono forme convenienti nelle x .

2° Se

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$
$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$
$\dots \dots \dots$
$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$

sono \geq serie infinite di forme (sempre nelle x) vi è
 sempre un numero m tale che per ogni k sia

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m \\ \psi_k &= \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_m \psi_m \\ &\dots \dots \dots \\ \rho_k &= \alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_m \rho_m \end{aligned}$$

ove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono forme convenienti.

3° Date le forme A, B, \dots, H vi è sem-
 pre un numero finito m di sistemi di forme

$$\begin{aligned} X_1, Y_1, \dots, W_1 \\ X_2, Y_2, \dots, W_2 \\ \dots \dots \dots \\ X_m, Y_m, \dots, W_m \end{aligned}$$

AP 35

che verificano identicamente la relazione

$$AX + BY + \dots + HW = 0$$

e tali che ogni altro sistema di forme soddisfacenti a questo si può mettere sotto la forma

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m$$

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \dots + \alpha_m W_m$$

ove le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ son forme convenienti. Anche quando si hanno parecchie relazioni da soddisfare identicamente a quel modo si ha un'analoga soluzione completa.

4° Se A, B, \dots, H son funzⁱ razionali intere delle $p+q$ variabi $x_1, x_2, \dots, x_p, u_1, u_2, \dots, u_q$ esiste sempre un numero finito m di forme U_1, U_2, \dots, U_m delle u_1, \dots, u_q che si esprimono sotto la forma

$$AX + BY + \dots + HW$$

ove X, Y, \dots, W son funzⁱ razⁱ intere delle x ed u , ed inoltre son tali che ogni altra forma rappresentabile allo stesso modo sia data dalla formola $U = \alpha_1 U_1 + \dots + \alpha_m U_m$ essendo le α forme delle u .

AP35

(AP 35) In particolare tutte le superf. per una data curva sghemba si hanno combinando linearmente un certo numero m di esse.

Date 3 forme ternarie d'ordine n col risultante non nullo φ, ψ, χ , ogni forma ternaria d'ordine $m \geq 3n-2$ può rappresentarsi con

$$f = \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\chi,$$

essendo α, β, γ tre forme ternarie.

Tra le applicaz. dei teor. I e II vi è quella alle forme invariantive

AP

~~48.~~ II^a Note, ibid. 1889, p. 25-34

5^o. Dato un sistema di relaz. come quella del teor. 4^o se ne deduca una soluz. completa come ivi è detto (indipend. linearmente), poi si considerino similmente le identità lineari fra quelle soluz.

$$PX_i + QY_i + \dots + RW_i = 0,$$

e la soluz. completa $P', Q', \dots, R', \dots, P^{(m')}, Q^{(m')}, \dots, R^{(m')}$ nello stesso senso; poi similmente le relaz. lineari fra queste soluz. ec. Questo procedimento avrà un termine, cioè si giungerà ad un sistema di equaz. (che al più tardi sarà l' n esimo) privo di soluzioni.

Numeri caratteristici (generi) di un ente

AP 36

algebraico qualunque. Si collega ai sistemi di moduli di Kronecker e di Dedekind e Weber.

Esempio: se due curve d'ordini μ_1, μ_2 e generi p_1, p_2 prive di p doppi sono l'intersezione completa di due superf. d'ord. k_1, k_2 , il numero dei loro punti comuni sarà $\frac{1}{2}k_1k_2 + \frac{1}{2}k_1k_2^2 - 2k_1k_2 - p_1 - p_2 + 2$

III^e Note. - Ibid. pag. 423 - 430

6^o Dimostrare di nuovo il teor. 1^o ma con la condiz. che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ hanno coeff. interi: allora anche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sono forme a coeff. interi.

Nuova dimostrazione che il sistema invariante è finito per forme binarie. - Osservaz. che la dimostrazione per forme qualunque della I. Nota vale anche per le forme invariantive non per gruppo completo delle sostituz. lineari ma per convenienti sottogruppi, per es. nel nostro spazio per le proiettività che mutano in se una quadrica od una cubica sghemba data.

AP36