

Formola di corrispondenza di Cayley

Dimostrazione dell'opera di Schubert.

anzitutto abbiati nel piano una ∞^2 di elementi composti di un punto ed una retta incidenti, si che ogni punto stia in μ elem. ed ogni retta in ν , cioè per ogni punto passino μ rette corrisp. ed ogni retta contenga ν punti corrisp. Su una curva f d'ord. m e d. n vi saranno $m\nu + n\mu$ punti aventi le tang. in essi per rette corrispondenti. (*) Invece si consideri la corrispondenza fra ogni punto della curva f ed i ν punti corrispondenti alla sua tangente, si proietti coi raggi di un fascio ed in questo si cerchino gli elem. uniti della corrisp. $[m\nu, n(\mu + \nu)]$ che così si avrà, e si escludano le n tang. del fascio contate ν volte.

(Una tale ∞^2 di elem. non è altro che un'equ. differenziale di 1° ord. in x, y di grado μ risp. a $\frac{dy}{dx}$ ed algebrica raz. intera di grado ν in x, y . Ed è integrata da un sistema $\infty^1(\mu, \nu)$ di curve, algebrica o trascendente. In un tal sistema vi sono dunque $m\nu + n\mu$ curve tang. alla data f d'ord. m e d. n)

Ciò posto se su f si ha una corrispondenza

(*) Per maggior generalità conviene sostituire ad f un sistema ∞^1 di elementi composti di punti e rette incidenti, chiamando μ l'ordine del luogo dei punti ed n la classe dell'involuppo delle rette.

(α, α') definita con un' eqnaz. tra x, x' di grado
 risp. z, z' in questi, la quale ad ogni punto x faccia
 corrispondere come luogo di x' una curva (d'ord. z')
 con un punto γ -plo in x , si considerino corrisp.
 ad x le γ tang. a quella curva in esso. Sarà $\mu = \gamma$;
 e quanto a ν , numero dei punti x di una retta che
 coincidono con x' , sarà quello dei punti uniti della
 corrisp. (z, γ, z') tra x, x' su quella retta: $\nu = z + z' - 2\gamma$.
 Dunque le coincidenze eu f sono:

$$m(z + z') + \binom{n}{-2m} \gamma = \alpha + \alpha' + \gamma(n - 2m + 2).$$

Se si aggiunge γ volte il numero delle cuspidi si ha
 la formula di Brill.

5/ Bischoff: Extrait de deux lettres à M. Cremona. — Nella 1^a dimostra la formula dei flessi mediante il principio di corrispondenza.

Sulla curva piana colle solite notazioni si facciano corrispondere i vari punti coi loro tangenziali e si proiettino da un punto fisso O del piano (che il Bischoff prende sulla curva, il che non fa che complicare leggermente il calcolo.) la corrispondenza: si avrà nel fascio di rette O una corrispondenza $[n(n-2); n\{n(n-1)-2d-3x\} - 2]$.
Le rette unite sono quelle passanti per i flessi, e si escludono: 1^o le tangenti alla curva da O , ciascuna contata $n-2$ volte, 2^o le rette che vanno ad un punto doppio o ad una cuspidale, ciascuna contata 2 volte (come subito si vede).

Dunque i flessi sono:

$$i = n(n-2) + n\{n(n-1)-2d-3x-2\} - (n-2)\{n(n-1)-2d-3x\} - 2d-2x \\ = 3n(n-2) - 6d - 8x.$$

Non conoscendo la formula che dà la classe m della curva si avrebbe

$$i = n(n-2) + n(m-2) - m(n-2) - 2d - 2x = n(n-4) + 2m - 2d - 2x.$$

54 Schubert. — Ueber die Erhaltung des Geschlechts
bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven
(Math. Ann. XVI, 180-182)

Tra due curve piane C (ord. n , cl. m , cuspidi x), C' (n' , m' , x')
abbiasi una corrispondenza univoca ed essendo P, P' due punti dei loro
piani considerinsi corrispondenti nel fascio di centro P due rette che vadano
a due punti i cui corrispondenti siano allineati con P' . Sarà una corri-
spondenza $[n(n'-1), n(n'-1)]$; dicendo V le coppie di rette uscenti
da P e P' , e contenenti due coppie corrispondenti di punti di C e C' ,
si avrà $2V = 2n(n'-1) - m' - x'$, appunto da quella corrispon-
denza nel fascio P . Ugualiando all'espressione analoga ottenuta dal fa-
scio P' si ha appunto l'uguaglianza dei generi delle due curve.

La curva delle congiungenti i punti corrispondenti di C e C'
essendo di classe $n+n'$ e genere p avrà $\frac{1}{2}(n+n'-1)(n+n'-2) - p$
tangenti doppie, cioè vi saranno altrettante rette contenenti ciascuna due
coppie di punti corrispondenti.

Il metodo sopra usato serve anche nel caso di una corrispondenza
qualunque (x, x') tra le due curve; ma allora compariscono anche i numeri
 y, y' dei punti a ciascuno dei quali corrispondono due punti infinitamente
vicini (Clebsch-Lindemann, pag. 459). Inoltre tra le coincidenze del fa-
scio P vi sono le $2n'x(x'-1)$ dovute a quei punti della 1^a curva ciascun dei
quali ha due suoi punti corrispondenti allineati con P' .

Nöther - Sulle curve multiple di superficie algebriche.

(Annali di mat., serie II, tomo V, 1871, pag. 163 - 177)

Equivalenza di una curva comune a tre superficie è il numero dei punti d'intersezione di queste che sono assorbiti da essa. La curva sia d'ordine m , rango r , con h punti doppi apparenti e k effettivi (sicché $r = m(m-1) - 2h - 2k$). Per le tre superficie F_1, F_2, F_3 d'ordini n_1, n_2, n_3 aventi C per curva multipla secondo i_1, i_2, i_3 ~~paranti per~~ questa curva equivarrà a

$m(i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3) - 2i_1 i_2 i_3 (m + \frac{r+2k}{2})$ punti d'intersezione delle tre superficie. E la curva C incontra la curva residua d'intersezione di F_1, F_2 in

$$m(i_2 n_1 + i_1 n_2) - 2i_1 i_2 (m + \frac{r+2k}{2}) \text{ punti.}$$

Le superficie F_1, F_2, F_3 abbiano comuni due curve C, C' di cui la prima multipla secondo i_1, i_2, i_3 e l'altra secondo i'_1, i'_2, i'_3 ; le equivalenze di C e C' siano risp. M e M' . Se C e C' si segano in s punti, l'equivalenza del loro sistema sarà

$$M + M' - s(i_1 i'_2 i'_3 + i_2 i'_3 i'_1 + i_3 i'_1 i'_2 - i'_1 i'_2 i'_3) \quad (3)$$

dove si supponga che due dei numeri (i'_1, i'_2, i'_3) non superino i corrispondenti numeri i_1, i_2, i_3 . λ è la curva residua d'intersezione di F_1, F_2 incontra C , ossia la curva $\mathcal{C}(m, r, k)$ in

$$\left[m(i_2 n_1 + i_1 n_2) - 2i_1 i_2 (m + \frac{r+2k}{2}) \right] - i'_1 i'_2 s \quad (\text{per } i_1 \geq i'_1, i_2 \geq i'_2)$$

punti, incontra invece C' , ossia la curva $\mathcal{C}(m', r', k')$ in

$$\left[m'(i'_2 n_1 + i'_1 n_2) - 2i'_1 i'_2 (m' + \frac{r'+2k'}{2}) \right] - (i_1 i'_2 + i_2 i'_1 - i'_1 i'_2) s$$

punti, se $i_1 \geq i'_1$, $i_2 \geq i'_2$, ed in

$$\left[m'(i'_2 n_1 + i'_1 n_2) - 2i'_1 i'_2 \left(m' + \frac{r' + 2k'}{2} \right) \right] - i_1 i_2 s$$

punti, se $i_1 \geq i'_1$, $i_2 \leq i'_2$.

Caso in cui F_1, F_2, F_3 abbiano più curve ed un punto multiplo comune

Postulazione di una curva multipla di una superficie, cioè numero delle condizioni a cui questa deve soddisfare per avere quella curva multipla. Caso di punti multipli nelle curve.

Applicazione al genere di una superficie. E alle trasformazioni univoche nello spazio. Per una tale trasformazione formata ϕ il sistema omaloidico della superficie d'ordine n dell'uno spazio corrispondenti ai piani dell'altro. E hanno le condizioni seguenti:

a) k e ϕ devono possedere tanti elementi comuni (curve e punti fondamentali) quanti occorrono perché esse formino una serie triplamente infinita.

b) le superficie quatrivogliano della serie devono in generale segnarsi in un solo punto variabile.

c) le ϕ sono di genere $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$

La condizione b) dà (se k e ϕ hanno comune k curve fondamentali i -ple C_i d'ordine m_i e rango r_i ; una C_i abbia k_{ii} punti doppi effettivi e incontri in altri k_{ij} punti una C_j ($i \geq j$)). Inoltre le ϕ abbiano i punti fondamentali i -pli P_i per cui una C_i passi con r_i rami. Ma supponiamo che il cond' osculatore in un P_i non sia per tutte le ϕ fisso, né

tutti ne' in parte. Se ϕ abbiano ancora punti di contatto dell'ordine $\sigma-1$

$$n^3 - 1 = \sum_i i^2 \{ (3n-2i)m_i - i r_i \} - \sum_{ij} i^2 (3j-i) k_{ij} + \sum_{il} i^2 (3l-2i) j_{il} + \sum_{\sigma} \sigma^2$$

per $\left. \begin{matrix} i \neq j \\ i \neq l \end{matrix} \right\}$

La prima somma doppia \sum_{ij} va estesa a tutti i punti d'intersezione delle curve fondamentali prese a due a due, eccettuati quelli che cadono nei P_p , e a tutti i punti doppi effettivi di ciascuna C_i . La seconda somma doppia \sum_{il} va estesa dapprima a tutti i rami delle C_i passanti per un P_p , indi a tutti i diversi P_p . — La condizione a) dà:

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4 = \sum_i \frac{1}{6} i(i+1) \{ (3n-2i+5)m_i - \frac{1}{2}(2i+1)r_i \} - \sum_{ij} \frac{1}{6} i(i+1)(3j-i+1) k_{ij} + \sum_l \frac{1}{6} l(l+1)(l+2) - \sum_{il} \frac{1}{6} i(i+1)(3l-2i+2) j_{il} + \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \sigma(\sigma+1).$$

Infine la c) dà come terza relazione

$$\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \sum_i \frac{1}{6} i(i-1) \{ (3n-2i-5)m_i - \frac{1}{2}(2i-1)r_i \} - \sum_{ij} \frac{1}{6} i(i-1)(3j-i-1) k_{ij} + \sum_l \frac{1}{6} l(l-1)(l-2) - \sum_{il} \frac{1}{6} i(i-1)(3l-2i-2) j_{il}$$

Le quantità analoghe nello spazio trasformato si distinguono cogli accenti. Si avranno allora le 3 precedenti, e per

$$n' = n^2 - \sum_i i^2 m_i, \quad n = n'^2 - \sum_i i^2 m'_i$$

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1) m_i = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1) m'_i,$$

da donde

$$4(n'-n) = \sum_i i m'_i - \sum_i i m_i.$$

54

Nöther. - Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens
algebraischer Gebilde. (Weiterer Aufsatz).

(Math. Ann. Bd. VIII, pag. 495-533)

Sia n l'ordine di una superficie, n' la sua classe, a il suo rango, c' la classe della sua sviluppabile osculatrice, cioè il numero dei piani tangenti stazionari di un cono circoscritto qualunque, $\sum \mu$ la somma degli ordini di molteplicità dei punti fondamentali della trasformazione posti sulla superficie, $\sum \nu$ la somma delle classi dei suoi coni osculatori. Allora nella trasformazione univoca di quella superficie in un'altra non mutano i due numeri

$$n' - 2a + 3n + \sum \mu, \quad c' - 12a + 24n + 3\sum \nu.$$

Non variano per una trasformazione razionale di una superficie d'ordine n il numero p delle superficie aggiunte (cioè passanti $j-1$ volte per ogni curva j -upla e aventi un punto $k-2$ uplo in ogni punto k uplo) d'ordine $n-4$ della superficie, linearmente indipendenti (Plüchergeschlecht), ed il genere $p^{(1)}$ delle curve mobili d'intersezione della superficie con queste superficie aggiunte (Curvengeschlecht), ed il numero $p^{(2)}$ dei punti d'intersezione mobili della superficie con due superficie aggiunte. Si ha però $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$.

Si ha:
$$p^{(1)} \geq 2p - 3$$

Le tutte quelle curve mobili sulla superficie si decompongono, si decompongono sempre in $p-1$ curve di genere 1.

Vengono dati i generi $p, p^{(1)}$ di varie superficie, ma a partire dal 5° ordine

55

Noether. — Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven (Math. Ann. XV 507-528)

Estende a tali gruppi di punti i principali teoremi sui gruppi di punti determinati da curve aggiunte esposti nel lavoro di Brill e N. del vol. VII. Qui le curve aggiunte sono sostituite da curve passanti σ_i volte per ogni punto $x_i - p_i$, essendo $\sigma_i \leq x_i - 1$.

56

Kraus. — Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven (Math. Ann. XVI 245-259) (1880)

Si tratta delle curve f_n di genere p per cui esistono curve φ (cioè curve aggiunte d'ordine $n-3$) tangenti in $p-1$ punti, e formanti una ∞^{m-1} lineare. Ritrova risultati del Weber (vol. XIII). Rappresenta f su S_{p-1} con una C^{2p-2} (e nel caso che f sia iperellittica, con una C^{p-1} doppia), e dimostra che per questa passano $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ quadriche a $p-2$ dimensioni linearmente indipendenti, ma in un modo che il Noether non trova completo (v. il lavoro seguente del vol. XVII). Si ferma infine sui casi di $p=3, 4, 5$ e rispettive curve normali, notando come possano venire ad avere la particolarità suddetta.

57

Noether. — Ueber die invariante Darstellung algebraischer

Functionen (Math. Ann. XVII 263-284)

Dimostrare rigorosamente che il numero delle relazioni quadratiche indipendenti tra le φ di una f_p (solo escluse le classi iperellittiche) è esattamente $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$: (cioè il teorema che per una C_p^{2p-2} di S_{p-1} passano $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriche indipendenti, già dimostrato incompletamente dal Kraus). Ed in generale: il numero delle relazioni linearmente indipendenti dell'ordine $\mu (> 1)$ tra le p funzioni φ è esattamente (escluso solo il caso iperellittico): $\frac{p(p+1)\dots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot \mu} - (2\mu-1)(p-1)$.

Nel caso iperellittico quel numero diventa $\frac{p(p+1)\dots(p+\mu-1)}{1\cdot 2\cdot \dots\cdot \mu} - \mu(p-1) - 1$

Nota a pag. 274 l'invarianza (per trasformazioni univoche razionali) dei gruppi di $2p$ punti determinati in f_p^m dalle curve aggiunte χ_{m-2} passanti per $m-2$ punti fissi in linea retta di f ; quest'invarianza, dice, è la causa del comparire queste curve invarianti χ negli integrali di 3ª specie delle funz. algebr.

Vi sono poi nelle pag. 274 e segu. teoremi importanti sulle curve tangenti, i quali darebbero belle proposizioni (espressi in altri termini) sulle F_{p-2}^m di S_{p-1} tangenti (con contatti di 1º ordine) in $\mu(p-1)$ punti alla C_p^{2p-2} normale.

58
G. Hauck, - Ueber die Beziehung des Nullsystems und
linearen Strahlencomplexes zum Polarsystem des Rotations-
paraboloids (Zeitschr. f. M. u. P. 31, 1886)

Nell'ultimo fascicolo del vol. 31° uscito il 20 Novembre 1886
si trova questo lavoro in cui sono svolte le relazioni tra il sistema
nullo e la polarità rispetto ad un paraboloide di rotazione derivanti
dal teorema seguente: La polarità rispetto ad un sistema nullo può
esser considerata come la riflessione (Spiegelbild) del sistema polare
di un paraboloide di rotazione rispetto al piano tangente nel vertice
seguita da una rotazione di 90° intorno all'asse, essendo il
parametro del paraboloide doppio della costante del sistema nullo.

~~73~~ Hooper - Histoire des Mathématiques.

Chinesi ed Indiani - Hanno poca importanza secondo l'U. Confuta l'opinione che la nostra scrittura riguardo ai numeri ci venga dall'India, opinione avvalorata dalla denominazione « cifre indiane ». Suo' darsi che gli stessi bisogni abbiano fatto nascere presso gli Indiani e presso gli arabi il sistema di cui si tratta, cioè del valore di posizione dato alle cifre.

Baldii: astronomia. — Fenici: mercanti dovevano per viaggi e commesse conoscere alquanto la matematica (lo stesso dicasi degli ebrei); ad essi si deve l'introduzione di un alfabeto in Europa. — Egizi: dovevano aver approfondita abbastanza la geometria, l'astronomia. Lo provano le piramidi disposte lungo il meridiano e gli obelischi e lo zodiaco costrutti con scopi astronomici.

Platone scoprì l'esistenza di 5 soli poliedri regolari

Dimostrazione del teorema fondamentale. Dal fatto che se due elementi si muovono rimanendo coniugati armonici a due fissi, essi si muovono con continuità per versi contrari si trae che se due coppie non si separano vi è almeno una coppia armonica ad entrambe (mentre non ve n'è se le due coppie si separano): ciò nella teoria dei gruppi armonici. — Definite poi come proiettive due forme in tal corrispondenza univoca che a gruppi armonici corrispondano gruppi armonici, segue immediatamente che a due coppie non separantisi corrispondono due coppie non separantisi, cioè che ad una successione corrisponde una successione. Quindi se percorrendo l'una forma in un verso si trovano $ABC\dots$, percorrendo l'altra forma in un certo verso si trovano $A'B'C'\dots$; la corrispondenza è continua. Ciò posto, è notato che due forme proj. discordi hanno due soli elementi uniti, che separano tutte le altre coppie di elem. corrisp., supponendosi due forme proj. con 3 elem. uniti ABC . Saranno concordi e se tutti gli elem. del segmento AB sono uniti, col movimento continuo si determinano due elem. uniti PQ di quel segmento, tra i quali non stanno altri elem. uniti. Assurdo. Dunque ecc.

Aufgaben und Lehrsätze 209-218 (Das Kegelschnittnetz und die Schaarschaar). Classificazione delle reti (Netze) e tessuti (Schaarschaar) di coniche: 4 specie. — 1^a specie o rete duale: in ogni coppia di rette della rete una retta taglia questa in un' involuzione ellittica e l'altra in un' involuzione iperbolica; la Cayleyana Γ^3 si compone di due rami, quello pari (impari) involupato dalle rette che segano la rete in involuz. iperboliche (ellittiche). Ogni quadrangolo della rete ha 1 vertice separato dagli altri 3 da ogni conica. La Jacobiana C^3 si compone di 1 sol ramo. Il tessuto coniugato a questa rete è iperbolico nel senso che diremo poi. —

Rete di 2^a specie od ellittica: vi sono coppie di rette in cui ciascuna retta taglia in un' involuzione iperbolica e coppie in cui ciascuna taglia in un' involuz. ellittica. Quelle involupando un ramo impari, queste un ramo pari di Γ^3 ; i vertici di quelle hanno per luogo un ramo pari, i vertici di queste un ramo impari di C^3 ; due punti coniugati di C^3 stanno risp. sui due rami. Il tessuto coniugato è ancora iperbolico. Ogni quadrangolo della rete ha 0 2 o nessun vertice separati dai rimanenti da 0-

gni conica della rete. — La rete iperbolica ha tutte le sue coppie di rette che lo segano in involuzioni iperboliche; nessun quadrangolo ha i vertici separati da una conica della rete. Si distinguono tali reti in due specie, 3^a e 4^a secondo che i loro tessuti coniugati sono duali ed ellittici. La rete di 3^a specie è perciò correlativa al tessuto coniugato di una rete di 1^a specie: Γ^3 ha un sol ramo, mentre C^3 ne ha due (2 punti coniugati di C^3 stanno risp. su questi 2 rami); solo per ogni punto del ramo pari di C^3 vanno tangenti reali coniugate di Γ^3 . La rete di 4^a specie è correlativa al tessuto coniugato di una rete di 2^a specie; C^3 e Γ^3 sono entrambi di due rami: su ogni tangente del ramo impari (o pari) di Γ^3 stanno due punti coniugati del ramo pari (od impari) di C^3 . Da un punto del ramo impari di C^3 soltanto vanno due tangenti reali coniugate di Γ^3 .

Non vi sono altre specie; una rete iperbolica non può essere coniugata ad un tessuto iperbolico.

64

Hurwitz. Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben,
insbesondere ueber die Schliessungsprobleme (Math. Ann. XV, pag 8-15)

Applicazioni geometriche semplici ed eleganti (ai poligoni di Poncelet per le coniche, ai poligoni di Steiner per le cubiche, ecc.) del seguente principio

„Kann man bei einer, im Allgemeinen n -deutigen Aufgabe, deren Lösungen durch die Wurzeln einer Gleichung n ten Grades bestimmt werden können, in speziellen Falle mehr als n Lösungen nachweisen, so hat sie in diesem Falle unzählig viele Lösungen“,

„specialmente sotto la seguente forma:“

„Bündel zwischen den Elementen einer einstufigen rationalen Mannigfaltigkeit, z. B. den Punkten einer rationalen Curve, eine (algebraische) Correspondenz (m, n) “
„Statt — eine Correspondenz, vermöge welcher jedem Elemente P n Elemente P' und einem Elemente P' m Elemente P entsprechen — und lassen sich bei dieser Correspondenz mehr als $(m+n)$ Coincidenzen aufweisen, d. h. Elemente, in denen zwei einander entsprechende Elemente zusammenfallen, so hat die Correspondenz unendlich viele solcher Elemente, und zwar ist jedes Element Coincidenzelement.“

~~21~~ Zeuthen. — Sur les différentes formes des courbes planes
du quatrième ordre (Math. Ann. VII, p. 410-432)

Trois vari résultats importants noterò i seguenti. Una tangente doppia di un
sol ramo (ramo in senso proiettivo, che può essere d'ordine impari, oppure d'ordine
pari cioè ovale, in una curva qualunque) oppure una tangente doppia a punti
di contatto immaginari (coniugati) dicesi di 1^a specie; una tangente doppia i cui
punti di contatto siano su due rami diversi dicesi di 2^a specie. Il numero dei
flessi reali di una quartica è doppio del numero delle tangenti doppie di 1^a specie
o contatti reali. — Il numero delle tangenti doppie di 1^a specie di una quartica
qualunque priva di punti multipli è uguale a quattro. — Due rami di una
quartica esterni l'uno all'altro hanno 4 tangenti comuni (come due coniche
esterne l'una all'altra). Quindi essendo che la quartica ha 4, 3, 2, 1 rami
esterni l'uno all'altro (e rami interni) essa avrà 24, 12, 4, 0 tangenti dop-
pie di 2^a specie e quindi 28, 16, 8, 4 tangenti doppie reali (al che
corrisponde il fatto che una superficie cubica può avere 27, 15, 7, 3 rette
reali). — Una quartica non può avere più di 8 flessi reali. — Tutti i
punti di contatto delle tangenti doppie di 1^a specie sono su una conica.

È bene a punti doppi. In una quartica a due punti doppi immaginari
la congiungente di questi avrebbe due tangenti doppie di 1^a specie, sicché ne restano
solo più due.

63 Harnack. — Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.
(Math. Ann. X, pag. 159 - 198)

Una curva di genere p non può mai avere più di $p+1$ rami separati. Ed esistono anche effettivamente, per ogni genere p , delle curve con $p+1$ rami. (Ramo è tal parte della curva, passante anche eventualmente per l'infinito, che si deve percorrere per passare da un punto ad altri ritornando infine al primo, senza mai cessare di variare con continuità la direzione della tangente). — A dimostrare la 1ª parte, vale a dire l'impossibilità di $p+2$ rami, l'A. costruisce nell'ipotesi che questi esistano delle curve che tagliano quella considerata in un numero di punti superiore a quello dato dal teorema di Bézout. A dimostrare poi la 2ª parte egli costruisce curve aventi il numero richiesto di rami mediante la variazione infinitesima di curve degeneri.

64 Klein. — Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. (Math. Ann. X pag. 199 - 209)

In una curva (dotata di sole singularità Plückeriane) sia n l'ordine, k la classe, r' il numero delle cuspidi reali, d'' il numero dei punti doppi reali isolati, w' il numero dei flessi reali, t'' il numero delle tangenti doppie reali isolate. Sarà:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

In particolare per una curva d'ordine n senza punti singolari

$$w' + 2t'' = n(n-2).$$

Esistono effettivamente curve d'ordine n col numero massimo $n(n-2)$ di flessi reali.

Brill - Ueber Systeme von Curven

und Flächen. - (Math. Ann. VIII pag. 534-8)

Dimostrazioni semplicissime mediante il principio di corrispondenza sulla
retta e sul piano dei tre teoremi seguenti per curve e superficie qualunque.

In un sistema semplicemente infinito di curve piane tali che di passanti
per un punto e di tangenti ad una retta ve ne siano risp. μ e ν , vi sono
 $m\nu + n\mu$ curve tangenti ad una curva data d'ordine m e classe n .

In un sistema semplicemente infinito di superficie tali che di passanti
per un punto, di tangenti ad un piano e di tangenti ad una retta ve
ne siano risp. μ , ν e ρ , vi sono $m\nu + n\mu + r\rho$ superficie
tangenti ad una superficie data d'ordine m , classe n e rango r .

In un sistema semplicemente infinito di curve sghembe tali che quelle
incontranti una retta qualunque siano μ e quelle tangenti ad un piano qua-
lunque siano ρ vi sono $\mu r + \rho m$ curve tangenti ad una superficie
data d'ordine m e rango r .

AP 49

Charles sull'omograf. G. 2. t. 41, pag 1097 (anno 1855)

Principio di corrispondenza⁽¹¹⁾: bellissimo articolo, dove benché sia esposto appena l'applicazione del principio all'omografia (di 1° ordine) ed all'involuzione (di 2°) si vede che poco mancava al Charles per conoscere tutta la generalità. Si risolve il problema di costruire la cubica per g punti (con 2 fasci omografici di coniche, che generano inoltre una punteggiata in involuzione) e la quadrica per g punti, e finalmente la trisezione di un arco di cerchio.

G. 2. t. 36 (année 1853)

Charles: construction de la courbe du 3^{ème} ordre déterminée par g points. Dimostra anzitutto che 2 fasci omografici di coniche e di rette generano una cubica, facendo vedere che i punti d'intersezione della curva generata con una retta qualunque sono dati da un'equazione di 3° grado, il che porge pure il modo di costruire effettivamente quei punti. Si risolve colla massima semplicità il problema proposto mediante 2 tali fasci, dei quali l'uno viene determinato come intersezione di 2 coniche.

G. 2. t. 37 (année 1853)

Charles: sur les courbes du quatrième et du troisième ordre. Premette il teorema che 2 fasci omografici di coniche generano una curva di 4° ordine e lo dimostra, non più facendo vedere che l'intersezione di quella curva con una retta qualunque è data da un'equazione di 4° grado, ma col metodo delle equazioni dei 2 fasci, metodo che egli osserva potersi estendere alle curve di qualunque ordine. Si nota che se le curve corrispondenti di 2 fasci di coniche si tagliano su una

AP 50

retta fissa (che contiene cioè 2 dei 4 punti d'intersezione)
Le ne deduce una costruzione (colla riga e col compasso) della cubica per 9 punti, scegliendone 4 per base dell'uno fascio, 3 come parte della base dell'altro e servendosi dei 2 rimanenti per determinare la retta (unica) che sarà parte del luogo.

In altre due sedute (stesso volume) lo Charles studiò più particolarmente le curve di 4° ordine, partendo dalla generazione suddetta, che dimostra potersi sempre usare per qualunque curva di 4° ordine, scegliendone ad arbitrio 4 punti per base dell'uno fascio di coniche ed 1 punto come parte della base dell'altro fascio (gli altri 3 punti base saranno affatto determinati). Nota che quel teorema da' luogo a quest'altro: se un punto si muove in guisa che il rapporto anarmonico delle rette che lo congiungono a 4 punti fissi o quello delle rette che lo congiungono ad altri 4 punti fissi siano legati da un'equazione della forma $\alpha a a' + \beta a + \gamma a' + \delta = 0$, allora il luogo di quel punto sarà una curva di 4° ordine passante per quegli 8 punti fissi. Nella generazione di queste curve considera anche i casi particolari che le possono dare 1, 2, od anche 3 punti doppi, o cuspidi od anche flessi. Considera le curve di 4° ordine che passano per punti cinghi, o che li hanno per punti doppi, sicché si possono generare con fasci di cerchi invece che di coniche qualunque. In particolare una curva di 4° ordine avente 3 punti doppi di cui 2 nei punti cinghi mostra essere sempre una lemniscata, cioè luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dal punto doppio che si trova a distanza finita sulle tangenti di una conica.

1. Per ultimo nota che nella generazione data della curva di 4° ordine, questa può de-
-generare in una retta ed una cubica in 4 casi diversi, cioè detti $abcd$, $a'b'c'd'$
in i punti base di 2 fasci: 1° quando ad esempio cd e $c'd'$ sono in linea retta
e la conica composta delle rette ab, cd corrisponde alla conica composta delle rette
 $a'b', c'd'$. 2° quando ad esempio le coniche corrispondenti si tagliano sempre
in un punto della retta ad , nel qual caso i 2 fasci sono arte omografici, 3°
quando dei 4 punti d'intersezione di 2 coniche corrispondenti 2 giacciono sempre
su una retta fissa (condizione anche questa sufficiente per l'omografia), 4°
quando 3 dei punti base dell'uno fascio sono in linea retta, sicché questi fa parte
di ogni conica di quel fascio, che quindi comprenderà oltre a quella un fascio di
rette omografico all'altro fascio di coniche. Questi 2 ultimi casi sono appunto
quelli sui cui si appoggiò lo Chasles prima nel dare le sue 2 costruzioni
della cubica per 9 punti.

69

Clifford — On the classification of loci.

(Philosophical Transactions of London, 1878, vol 169, pag. 663-681)

Definire le curve e i vari spazii in uno spazio a k dimensioni. Note che le rigate si debbono considerare come curve in una quadrica a 4 dimensioni (Betti, Vorles. über Geom. der reellen Räume, p. 54)

Theorem A (pag. 664). Ogni curva propria dell'ordine n è in uno spazio ad n dimensioni (o meno). Basta la rigata cubica.

Theorem B (pag. 666). Una curva d'ordine n nello spazio a k dimensioni (e non minore) si può rappresentare punto per punto con una curva d'ordine $n-k+2$ di una giama.

La curva d'ordine n nello spazio ad n dimensioni (e non meno) è unicursale. Le coordinate di un suo punto sono funzione di grado n di un parametro t . La sua equazione si può scrivere:

$$0 = \begin{vmatrix} A & B & C & \dots & K \\ B & C & D & \dots & L \end{vmatrix},$$

od anche, il che fa lo stesso: $0 = \begin{vmatrix} A & \dots & K \\ A' & \dots & K' \end{vmatrix}$, dove le lettere rappresentano funzioni lineari delle coordinate. È dunque il luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti di fasci proiettivi (pag. 667). Si ottiene facilmente l'equazione della sua superficie osculatrice facendo coincidere i parametri t di n punti per i quali si è condotto un piano. Si trova così un'equazione di grado n in \mathcal{Q} a determinare i punti di contatto coi piani osculatori che partono da un punto

qualunque. La curva è dunque anche di classe n . Essa determina una corrispondenza polare tra i punti ed i piani di tutto lo spazio, nel vero senso ordinario della parola polare. Ma quando n è pari questa polarità coincide con quella ordinaria rispetto ad una quadrica, questa essendo una quadrica perfettamente determinata dalla curva. Quando invece n è impari ogni punto sta sul suo piano polare (dimostrazioni analitiche semplici ed eleganti) —

Una curva ha altri ranghi ^(pag. 669), che sono risp. $2(n-1), 3(n-2), \dots, (k+1)(n-k), \dots$

Pag. 670. Ogni curva d'ordine n in uno spazio ad $n-1$ dimensioni è unicusale oppure ellittica poiché può rappresentarsi su una cubica piana.

Determina i ranghi e suddetti della curva proiettandola su spazi lineari, e nello stesso tempo determina i punti di superoscillazione. — Applica anche le funzioni ellittiche e gli integrali abeliani:

Una curva d'ordine n e genere p non $> \frac{1}{2}n$ può solo stare in uno spazio ad $n-p$ dimensioni.

70. H. G. Leuthen. Om Plader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit
(København 1879, Librairie Gyldendal).

Rendiconto nel Repertorium di Königsberger, II Band, pag 420-2

Nelle prime due parti studia le proprietà generali della superficie di 4.^a ordine a conica doppia sia proiettandola su un piano da un punto della conica doppia, sia proiettandola invece dal vertice di un cono di Kummer

* Dans la troisième et quatrième section je m'occupe des questions de réalité et de forme, en y appliquant respectivement la projection d'un centre placé sur la conique double, et la représentation par une surface double (quadrica) que je viens de nommer. Je fais usage alors des résultats trouvés antérieurement par moi et par M. Bronne sur la réalité des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre et des systèmes de coniques qui y sont quatre fois tangentes. Je trouve que nos surfaces appartiennent toujours à une des 6 formes que je vais énumérer. Dans cette énumération je dis (avec M. Klein) qu'une nappe d'ordre pair a le type de point lorsqu'elle ne contient aucune branche de courbe d'ordre impair, et qu'elle a le type de droite lorsqu'elle en contient, et j'indique (avec M. Schläfli et Klein) la connexion d'une nappe par le double du nombre des courbes fermées de la nappe qui ne la décomposent pas *):

*) Nous appelons un cône réel lorsque son équation est réelle, quand même son seul point réel est son sommet. Une conique réelle n'a pas toujours des points réels, mais son plan est réel.

AP 52

A. Surfaces à 16 droites réelles, à 5 cônes Kummeriens réels et à 10 systèmes réels de coniques planes, dont chacun contient 4 couples de droites réelles. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 6, qui se trouve au dehors de tous les cônes Kummeriens. (*)

B. Surfaces à 8 droites réelles, à 3 cônes Kummeriens réels et à 6 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 2 couples de droites réelles. Les 8 droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 4, qui se trouve au dehors de tous les 3 cônes Kummeriens.

C. Surfaces à 4 droites réelles, à un seul cône Kummerien réel et à deux systèmes de coniques réels, dont l'un contient 2 couples de droites réelles et 2 couples de droites imaginaires conjuguées. 8 des droites imaginaires n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de droite et de la connexion 2, qui se trouve au dehors du cône Kummerien.

D. Surfaces sans aucune droite réelle, à 5 cônes Kummeriens réels et à 6 systèmes réels de coniques. Les droites n'ont aucun point réel. Les surfaces peuvent ou avoir une seule nappe du type de point et de la connexion 2, qui se trouve au dehors de 3 des cônes Kummeriens, ou n'avoir aucune nappe réelle.

E. Surfaces sans aucune droite réelle, à 5 cônes Kummeriens réels et à

(*) Li sottintende che una falda reale di superficie sta sempre dentro ad ogni cono reale privo di generatrici reali. Quindi dicendo che essa è fuori di un cono di Kummer si viene a dire nello stesso tempo che questo ha generatrici reali.

2 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 4 couples de droites imaginaires conjuguées. Les surfaces ont deux nappes du type de point et de la connexion 0, qui se trouvent au dehors d'un seul cône Kummerien.

F. Surfaces sans aucune droite réelle, à 3 cônes Kummeriens réels et à 2 systèmes réels de coniques, dont chacun contient 2 couples de droites imaginaires conjuguées. Les autres 8 droites n'ont aucun point réel. Les surfaces ont une seule nappe du type de point et de la connexion 0, qui se trouve au dehors d'un seul cône Kummerien. "

Solo nei casi D, E, F le coniche doppia possono essere prive di punti reali. Nel caso E vi è una superficie a conica doppia senza punti reali avente due falde di cui una completamente interna all'altra; il cono di Kummer corrispondente è in tal caso privo di generatrici reali.

N. 22. Lezioni sulle quartiche gobbe di 1^a specie. L'intersezione di due quadriche ha al più due rami. Essa può avere una delle seguenti "forme principali":

1) Due rami d'ordine pari. I quattro cono quadrici per essa sono tutti reali.

α. Una quadrica del fascio, i cui punti stanno in parte entro di tutti, in parte fuori di tutti i cono, ha generatrici reali che possono secare un ramo in 2 o 0 punti. Il caso intermedio si ha nelle generatrici tangenti; ogni ramo della curva tocca due generatrici di ciascuno dei due sistemi.

β. Una quadrica del fascio, i cui punti stanno in parte fuori di tre ed entro uno dei cono, in parte viceversa, ha generatrici immaginarie.

γ. Una superficie del fascio, i cui punti stanno nell'interno di due e all'esterno di

due coni ha generatrici reali secanti ognuno dei due rami in un sol punto e però mai tangenti.

2). Un ramo d'ordine pari. Due coni sono reali.

α . Una superficie del fascio i cui punti stanno parte entro parte fuori dei due coni, ha generatrici reali che incontrano il ramo in $2 \text{ o } 0$ punti; 2 generatrici di ogni sistema lo toccano.

β . Una superficie del fascio i cui punti stanno entro un cono e fuori dell'altro ha gener. imag.

3). Due rami d'ordine impari. Nessuno dei coni è reale. Una quadrica del fascio è sempre rigata. Le generatrici di un sistema secano ciascun ramo in un punto; quelle dell'altro secano un ramo in $2 \text{ o } 0$ punti; ogni ramo è toccato da due generatrici che stanno ciascuna in una delle parti in cui la curva divide la superficie.

4). Nessun ramo reale. I 4 coni sono reali, due a generatrici reali, gli altri due no (sicché ogni punto si considera come interno a questi).

α . Una quadrica del fascio avente punti reali fuori di due ed entro due coni è rigata.

β . Una quadrica, i cui punti reali stanno entro 3 coni, ha generatrici immaginarie.

γ . Al fascio appartengono anche quadriche (reali) senza punti reali, e le cui generatrici sono perciò rette immaginarie di 2^a specie (mentre le generatrici immaginarie precedentemente nominate sono di 1^a).

AP 52

fine

~~7A~~ Harnack. - Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt-periodische Functionen (Math Ann. XII p. 47 → 86)

Una corrispondenza di 2^a specie, u e $u \pm C$ determina una serie di rigate di 8^o grado. I 4 punti in cui ogni corda della curva è incontrata fuori di questa da una tal rigata hanno un rapporto anarmonico indipendente dalla corda. ^(pag. 78) Tutte le generatrici di una tal rigata tagliano le facce del tetraedro fondamentale secondo un rapporto anarmonico costante, ossia quella rigata è l'intersezione di un complesso tetraedrale relativo a quel tetraedro col sistema delle corde della quartica (tutte le 4 coniche quadriche, comuni a quel complesso e a quel sistema, su cui sta la quartica). Tale rigata ha ancora ^(pag. 79) 4 curve doppie razionali di 4^o ordine nelle facce del tetraedro. Tra esse vi è la sviluppabile osculatrice e vi sono 3 rigate di 4^o grado.

~~7B~~ Ameseder. - Ueber Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species (Wien. Sitzber. 1883, vol. 87 p. 1179-1225)

~~7C~~ Emil Weyr. - Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung (Wien. Sitz. ib. p. 837-872)

Contiene una teoria sintetica completa delle trasformazioni univoche della cubica piana in se stessa

74 Emil. Weyr. — Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den
Curven vom Geschlechte Eins (Wien. Sitzber. 1883, vol. 88,
pag. 436-482)
— Contiene, tra altre cose, nuove dimostrazioni dei risultati di Harnack
sulle trasformazioni di una quartica ellittica normale in se stessa e
sulle rigate di 8° grado che ivi compaiono.

75

Aschieri. — Sulla rappresentazione dello spazio rigato

(dei complessi lineari e loro intersez.) con un sistema di coniche sul piano

(Due Note a pag. 265 e 341 dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo 1879. serie II vol. 12)

Ha seguito all'idea di Cremona (nella lettera di Beltrami del 11 gennaio 1872 nel vol. X del giorn. di Battaglini) di rappresentare lo spazio rigato Σ delle coniche circoscritte a triangoli circoscritti ad una conica fissa $C^{(2)}$, la cui equazione in $x_4 = 0$ suppone $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0$. Dico P_{ik} le coordinate locali di una retta [e ponendo per $i, k = 1, 2, 3$: $P_{ik} = x_{ik}$, $P_{i4} = x_{i0}$] l'equazione della conica immagine della retta p sarà:

$$0 = p_{14} x_1^2 + p_{24} x_2^2 + p_{34} x_3^2 + 2x_2x_3 \frac{p_{23} - p_{24} - p_{34}}{4} + 2x_3x_1 \frac{p_{31} - p_{34} - p_{14}}{4} + 2x_1x_2 \frac{p_{12} - p_{14} - p_{24}}{4}$$

Ho tre queste conseguenze:

Un fascio di raggi in \mathcal{G} ha immagine in Σ un fascio di coniche proj. a quella

Una stella di raggi ha per immagine una rete di coniche passanti per un punto fisso, punto doppio della jacobiana di quella rete.

Un piano di raggi ha per immagine una rete di coniche circoscritte ad un triangolo fisso circoscritto a $C^{(2)}$, e inversa ogni triangolo circoscritto a questa è immagine di un piano di raggi.

Le rette di \mathcal{G} aventi per immagini in Σ coniche spezzate in 2 rette sono il complesso $\Theta^{(3)}$ di 3° grado delle secanti di una cubica gobba, le cui corde poi sono rappresentate dalle coppie di tangenti di $C^{(2)}$. — La costruzione

della rappresentazione mediante quella cubica gobba diventa puramente geometrica. Per
 le corde della cubica ed i punti del piano Σ si corrispondono univocamente.
 Alle corde appoggiate su una retta qualunque corrispondono i punti di una
 conica e queste coniche in Σ formano una serie quale quella di cui partiamo.
 I punti di $C^{(2)}$ non corrispondono alle tangenti della cubica.

Invece di quella serie di coniche si può considerare quella Σ , delle
 coniche - involucri coniugate o triangoli circoscritti a $C^{(2)}$, le quali corrispondono
 univocamente a quelle. Alle coniche di Σ a punto doppio corrispondono quelle
 di Σ , a retta doppia. Ad una rete di Σ per un punto fisso corri- (1)
 sponde in Σ , una rete la cui Jacobiana si divide in 1 punto e 1 conica, di

L'immagine di un complesso lineare speciale di ordine p è la serie di
 coniche di Σ circoscritte a x triangoli circoscritti a $C^{(2)}$ e inscritti nella conica
 di Σ che è immagine di p , — oppure la serie degli involucri di Σ ,
 coniugati a quei triangoli.

(Allo sc^o coniche (involuppi di 2^a classe) $\sum A_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ di un
 piano fa corrispondere (con notazioni meno comode) i complessi lineari dello spazio

$$A_{23} p_{23} + A_{31} p_{31} + A_{12} p_{12} + A'_{14} p_{14} + A'_{24} p_{24} + A'_{34} p_{34} = 0,$$

dove si è posto: $A'_{14} = 2A_{11} - A_{12} - A_{31}$, $A'_{24} = 2A_{22} - A_{23} - A_{12}$, $A'_{34} = 2A_{33} - A_{31} - A_{23}$

Invece ad una serie lineare di coniche (circoscritte a triangoli coniugati ad una
 mia fissa) corrisponde un complesso lineare (che diventa speciale quando quella conica

fiava da una delle coniche Σ , che corrispondono a rette dello spazio.)

Considera poi la rappresentazione dei sistemi lineari di complessi lineari, ma è un po' troppo facile.

AP 56

~~176~~ Clachieri. — Fondamenti per una geometria dello spazio composta di rette. — (Memorie del R. Ist. Lombardo, vol. XV, VI della Serie III, Cl. di Sc. m. e n. — pag. 75-90. — 15 Marzo 1883)

Non vi sono in sostanza altri risultati che quelli delle due note precedenti (manca anzi la rappresentazione dei complessi lineari); ma vi è qualche dettaglio di più, e la rappresentazione viene prima studiata sinteticamente e poi analiticamente.

20

A₂₃

20

20

AP 56

77 E. Padova. - Intorno agli assi statici nei sistemi
di forma invariabile (Atti del R. Ist. Veneto, 1882-3, serie 6, vol. I)
pag. 1243-50)

Si propone di dimostrare le proprietà trovate da Lucci dagli assi statici eseguendo una via diversa da quella seguita da questo chiaro autore, la quale presenta, a parer mio, il vantaggio di mostrare più chiaramente la distribuzione di questi assi nello spazio. - Io non sono dello stesso avviso.

Vi è una o due proposizioni ^{immuove}, ma contenute implicitamente in Lucci o nel mio teorema che il tetraedro dei poli è proprio-polare rispetto ad S.

AP 57

73

Voss. — Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen

(Math. Ann. XIII, 1878, pag. 320-374)

Definisce le sostituzioni ortogonali coll' equazione $\sum y_i^2 = m \sum x_i^2$, distinguendole in proprie ed improprie secondo che il loro determinante Δ vale $\pm \sqrt{m^n}$. I gruppi, propri-polari rispetto alla quadrica fissa, aventi per coordinate i coefficienti a_{ik} della sostituzione, corrispondono al gruppo fondamentale nella sostituzione ortogonale e nella sua inversa. Posto $\Omega(\rho) = |a_{ik} - \rho|$ deduce dall' identità $\Delta \Omega(\rho) = (-1)^n \rho^n \Omega(\frac{m}{\rho})$ che le radici di $\Omega(\rho) = 0$ sono reciproche^(*), e che per n pari e sostituzione impropria vi sono le due radici $\pm \sqrt{m}$ mentre per n impari vi è sempre l'una o l'altra di quelle due radici (chiamo queste ausgezeichnete o besondere). Alle radici non notevoli corrispondono spazi lineari uniti situati sulla quadrica; a due radici non reciproche spazi coniugati rispetto a questa.

Considerando il prodotto $\Omega(\rho) \Omega(-\rho)$, che vale $\rho^n \times$ un determinante i cui termini sono $a_{ik} - a_{ki}$ mentre quelli della diagonale principale sono tutti $\frac{m}{\rho} - \rho$, si ha: « per n pari e sostituzione impropria il determinante globale delle $a_{ik} - a_{ki}$ svanisce identicamente coi suoi primi subdeterminanti ». Ciò prova che la sostituzione impropria, ripetuta dà una sostituzione propria non generale, ma avente un raggio di punti uniti (che congiunge i due punti uniti della sostituzione impropria) posti fuori della quadrica.

Considerando il determinante simmetrico della forma quadratica $\sum a_{ik} x_i x_k$, si ha $(\Omega\rho)^2 = \Psi(\sigma) 2^n (-1)^n \rho^n$, dove $\Psi(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \dots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1} + a_{1n}}{2} & \dots & \dots & a_{nn} - \sigma \end{vmatrix}$ e $\sigma = \frac{\rho^2 + m}{2\rho}$

^(*) Le ne potrebbe anzi dedurre che i divisori elementari sono a coppie dello stesso grado e corrispondenti a radici reciproche; ma l'A. dimostra ciò per una via più lunga.

Ne segue che per la trasformazione propria Ψ ha tutte le radici doppie e di più, com'è facile vedere, appartenenti pure a tutti i primi subdeterminanti di Ψ ; cioè $\sum_{i,k} x_i x_k$ ha nella quadrica fissa la caratteristica $[(11)(11)(11)\dots]$.

79
Probenius. — Ueber das Pfaffsche Problem (Brelle 82 pag. 230—315)

Torneri sui determinanti e sulle forme bilineari.

pag. 240) In einem Elementensystem, in welchem alle partialen Determinanten $(m+1)$ ten Grades verschwinden, verhalten sich die aus irgend m Zeilen gebildeten partialen Determinanten m ten Grades, wie die entsprechenden aus irgend m andern Zeilen gebildeten partialen Determinanten m ten Grades (Kronecker's Berl. Monatsb. 1874 April, Ueber die congr. Transf. etc. letzte Seite).

pag. 241) Kann man aus einem Elementensystem, in welchem alle partialen Determinanten $(m+1)$ ten Grades verschwinden, m Zeilen und m Colonnen so auswählen, dass weder in den m Zeilen noch in den m Colonnen alle partialen Determinanten m ten Grades gleich Null sind, so muss auch die diesen Zeilen und Colonnen gemeinschaftliche partielle Determinante m ten Grades von Null verschieden sein.

pag. 242) Wenn in der Determinante eines symmetrischen oder eines alternierenden Systems alle partialen Determinanten $(m+1)$ ten Grades verschwinden, so muss in jedem System von m Zeilen, in welchem irgend eine partielle Determinante m ten Grades nicht verschwindet, auch die Hauptunterdeterminante von Null verschieden sein.

2) Ist in einer schiefen Determinante m der höchste Grad nicht

verschwindender Unterdeterminanten, so ist m notwendig eine gerade Zahl und unter den nicht verschwindenden partiellen Determinanten m^{ten} Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten.

Bag. 243) Wenn in einer schiefen Determinante eine Hauptunterdeterminante $2r^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden ist, aber alle Hauptunterdeterminanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, welche man aus jener erhält, indem man irgend zwei Zeilen und die gleichnamigen Spalten hinzufügt, so verschwinden alle partiellen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades.

Sulle correlazioni

80
Sturm. — Ueber correlative oder reciproke Bündel (Math. Ann. XII pag. 254-309)
Risolve il seguente problema: studiare le coppie di punti A, B di due spazi, tali che siano centri di due stelle correlative in cui (posto che nel 1° spazio siano dati k punti A_i , l rette a_i , m punti A'_i , n rette a'_i , e nel 2° spazio, corrispondentemente ad essi k rette b_i , l punti B_i , m punti B'_i , n rette b'_i) ai k raggi AA_i corrispondano l piani BB_i ; agli l piani AA_i corrispondano gli l raggi BB_i ; a ogni raggio AA_i , BB_i un piano passante per corrispondenti e a ogni piano AA_i , BB_i un raggio del piano corrispondente. — Loche così ed adopera la teoria delle caratteristiche delle correlazioni.

81
Hirst. — On a relation of Two Planes. Proceed. London Math. Soc. vol V, pag. 40; Annali di Matematica, serie II, tomo VI pag. 260 (1874)

82
Hirst — Note on correlation in Space. Proceed. London Math. Soc. vol. VI, pag. 7 (1875). — Tratta la teoria delle caratteristiche dei sistemi di correlazioni nello spazio.

83
Sturm. — On correlative pencils. Proceed. Lond. Math. Soc. vol. VII pag. 175. — Tratta la questione di cui nella memoria super. ma solo per il caso di $n=0$

84
Sturm — Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaft (Math. Ann. XIX). — Completa la memoria di Schröter e contiene risultati ritrovati poi dal Battaglini.