

85

Schröter - Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde

in der Ebene und im Raum. - (Bresl. 1873 pag. 105-142)

Segue il metodo sintetico secondo Steiner evitando gli imaginari. Considera anzitutto la reciprocità di due piani sovrapposti e trova nel fascio e nella schiera di reciprocità determinate da quelli due reciprocità polari, i cui «Kernkegelschnitte» reali od imaginari sono luogo ed involuzione degli elementi in posizione unita agli elementi corrispondenti (pag. 110 per l'involuzione, 111 per luogo). — Dimostra che se un punto si congiunge al punto d'intersezione delle rette corrispondenti si ha una retta passante per uno punto fisso $m(n)$ avente la stessa retta corrispondente $M(N)$; in quella congiungente le coppie simili di punti formano un'involtuzione (pag. 115 e a pag. 115 la proposizione correlativa). Nello stesso tempo dimostra (pag. 116) che sulla retta $M(N)$ l'involtuzione di punti coniugati è la stessa per le due coniche, sicché, se questi sono retti, hanno doppio contatto su quella retta. — Dimostra che la condizione necessaria e sufficiente (pag. 119) affinché la reciprocità data siaolare è che la corrispondenza tra le rette uscenti da M , considerate in E , ed i punti corrispondenti di m nel piano E sia involutiva. — Finisce dimostrando nel modo noto che (pag. 119, 120) due piani reciproci possono sempre sovrapporsi in modo da dare una reciprocitàolare, e ciò facendone considerare i centri (punti corrispondenti alla retta all'infinito) e gli assi inversamente (coppie di raggi corrispondenti ortogonali uscenti dai centri).

Il pag. 121 passa a considerare la reciprocità tra due spazi ordinari sovrapposti; e per risolvere le questioni che si propone intorno agli elementi corrispondenti

AP61

in posizione unita e rette corrispondenti che si tagliano, riduce ancora (come già faceva sul piano) la considerazione al uso di una reciprocità polare. Per questo dimostra anzitutto (pag. 123) che di ogni piano prendendo rispetto ai due punti corrispondenti l'elemento univoco armonico si ha un punto che gli corrisponde in una polarità. Incontra nel dimostrare questo un teorema (pag. 124) notevole: date due punteggiate proiettive se per un punto fisso si induce un piano quale dunque ed il piano che lo congiunge ad due punti corrispondenti ai punti d'integrazione di quello colle punteggiate, la retta d'integrazione di quei due piani sta su un piano fisso passante per quel punto (Nota che da questo segue che: dato due punteggiate proiettive le rette dello spazio che le proiettano secondo un fascio in involuzione formano un complesso lineare). La "Kernfläche" $F^{(2)}$ delle polari si considerati è insieme del piani su cui sta un punto corrispondente e quindi entrambi (pag. 127). In modo corlettivo si ottiene (pag. 128) la quadrica⁽⁶⁾ luogo di questi punti. Ad un piano tangente alla prima quadrica corrispondono due punti in la- new retta col punto di contatto (128). — Le due rette corrispondenti si tagliano, il loro punto comune è su $f^{(2)}$ e il loro piano comune appartiene ad $F^{(2)}$; insieme esse taglieranno le corrispondenti in ambi i sensi (129). Entrambe le rette che passano per un punto di $f^{(2)}$ e sono tagliate dalle corrispondenti stanno nei due piani corrispondenti a quel punto: ogni piano tangente ad $F^{(2)}$ condotto per quel punto taglia quei due piani in rette corrispondenti (129 + 130). [È correttamente (130)]. E quel-

lo stesso piano tangente ad $F^{(2)}$ taglia le due coniche in cui quei due piani tagliano $f^{(2)}$ nei due punti corrispondenti a quel piano (130); e correttamente. — Da queste ultime proposizioni deduce (pag. 131) che date le due quadriche ed inoltre un punto di $f^{(2)}$ ed un piano di $F^{(2)}$ uniti i quali si corrispondono nell'uno senso, i determinati in ambi i sensi la corrispondenza tra tutti i punti di $f^{(2)}$ e i punti di $F^{(2)}$. — Sui allo scopo di trovare la dipendenza tra le due quadriche $f^{(2)}, F^{(2)}$ passa a considerare l'insieme delle rette congiungenti coppie di punti corrispondenti agli stessi piani o intersezio[n]e di piani corrispondenti agli stessi punti (pag. 132), t. rette da egli chiamate «Wechselstahlle» e che hanno le due rette corrispondenti tagliate. Trova che ad ogni punto o piano su appartenendo un cono o una conica (133), o conclude (134) che quelle rette formano un complesso di Reye. Perciò per i piani per quali la conica del complesso si snoda e curv. trova che essi devono passare per uno di 4 punti e che questi sono tali che i piani corrispondenti coincidono (135) e le facce del loro tetraedro hanno la proprietà asseletiva. Trova in qual modo si corrispondono questi punti e piani notevoli: un punto ed un piano corrispondenti sono in posizione unita (136); quindi detti a, b, c, d i 4 punti corrispondono loro p.c. i seguenti piani (139): a...acd, b...bcd, c...abc, d...ab. Vi sono quindi i 4 lati di un quadrilatero corrispondenti a se stessi e le diagonali che si corrispondono risversamente (140). — Le due quadriche si incontrano in quei 4 punti notevoli e costituiscono quel quadrilatero (140).

(R. Acc. Lincei. Memorie d. classe scienze fis. mat. nat., serie 3^a, vol. XII, 4 dicembre 1881)

In questo lavoro sono studiate le correlazioni nello spazio. Supposti anzitutto i due spazi correlativi distinti trova le proprietà note e le correlazioni degeneri. Supposta poi i due spazi coincidenti dimostra che se ad un punto qualunque x corrispondono i due piani $X^{(1)}, X^{-(1)}$, il piano che congiunge x alla loro intersezione corrisponde ad x in un complesso lineare, ed il suo coniugato armonico è il polare di x rispetto alla quadrica luogo dei punti che stanno nei piani corrispondenti. Un altro complesso lineare ed un'altra quadrica si hanno in modo correlativo. Queste due quadriche si corrispondono tra loro in modo che alle generatrici dell'una corrispondono in doppio modo quelle dell'altra. D'A. nota pure come la data correlazione dia luogo ad ogni piano dello spazio ad una nuova correlazione, le cui coniche fondamentali sono l'intersezione con la quadrica fondamentale luogo e l'intersezione coi due coni circoscritti alla quadrica - inviluppi dei punti corrispondenti a quel piano: si veda di quanto di queste due coniche sta sui due piani corrispondenti nella correlazione al polo del piano considerato rispetto alla quadrica - luogo.

Beravano gli elementi involutori della correlazione mediante la considerazione dell'equazione $|ma_{ik} + na_{ki}| = 0$, dove m indica con $\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ la correlazione. Nota che quell'equazione è reciproca. Riferendosi al tetraedro involutorio l'equazione delle correlazioni diventa (essendo $c_{12}:c_{13}$ e $c_{34}:c_{42}$ le radici min. di quell'equazione) $c_{12}x_1y_2 + c_{21}x_2y_1 + c_{34}x_3y_4 + c_{43}x_4y_3 = 0$, ossia $c_{12}X_1Y_2 + c_{21}X_2Y_1 + c_{34}X_3Y_4 + c_{43}X_4Y_3 = 0$ e i due complessi lineari suddetti: $(c_{12}-c_{21})r_{12} + (c_{34}-c_{43})r_{34} = 0$, e $(c_{12}-c_{21})P_{12} + (c_{34}-c_{43})P_{34} = 0$ e le due quadriche: $(c_{12}+c_{21})x_1x_2 + (c_{34}+c_{43})x_3x_4 = 0$, e $(c_{12}+c_{21})X_1X_2 + (c_{34}+c_{43})X_3X_4 = 0$ donde D'A. deduce che queste quadriche si tagliano in un quadrilatero.

Adottando le mie notazioni, cioè indicando con un + od un - l'appartenere all'equazione fondamentale in $\frac{m}{n}$ la radice +1 ovvero -1, il Battaglini considera i seguenti casi particolari della correlazione di due spazi sovrapposti.

[$(\bar{1}\bar{1})_{11}$]. (Vale a dire, per l'Q., quando $C_{12} = C_2$, nelle equazioni semplificate) In questo caso le due diagonali del quadrilatero considerato avranno l'uno i punti, l'altra i piani involutivi (cioè aventi gli stessi elementi corrispondenti nella correlazione); questi sono chiamati dall'Q. correlazione polare (o involutiva) parziale. I due complessi lineari considerati sono entrambi speciali.

[$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1})$]. Correlazione polare (o involutiva) totale, cioè polarità rispetto ad una quadrica. In questo coincidono le due quadriche fondamentali; mentre i due complessi lineari diventano indeterminati.

[$(\bar{1}\bar{1})_{11}^+$]. Correlazione coincidente parziale. ($C_{12} = -C_2$) In questo caso non solo i punti dell'una diagonale e i piani dell'altra sono involutivi ma inoltre ~~ma~~ questi punti e piani corrispondenti in doppio modo sono tutti in posizione uniti. Le quadriche fondamentali - lungo e quella - involutiva si scindono in una coppia di piani e una coppia di punti giacenti sopra in quei piani.

[$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1})^+$]. Correlazione coincidente totale, corrispondenza rispetto ad un complesso lineare in cui coincidono i due considerati. Le quadriche fondamentali diventano indeterminate.

[$(\bar{1}\bar{1})(\bar{1}\bar{1})^+$]. Combinazione delle proprietà dei casi [$(\bar{1}\bar{1})_{11}$] e [$(\bar{1}\bar{1})_{11}^+$].

AP62

(pag. 18) "Se due radici reciproche $\frac{m}{n}$... sono uguali tra loro e quindi uguali a ± 1 , senza che per questi valori s'annullino i subdeterminanti ..., nella correlazione avremo dunque tra loro due punti involutori e due piani involutori; si avranno allora altri casi speciali della correlazione, per i quali non vi c'è più un tetraedro di elementi involutori ..., ma di questi casi non faremo ulteriormente discorso."

[11)(11)]. In questo caso notevolissimo (pag. 19) le due quadriche fondamentali coincidono e coni' prende i due complessi lineari. Ad ogni punto di quella quadrica corrisponderanno nella correlazione due piani passanti per una generatrice W che passa per quel punto (e così pure il piano corrispondente nel complesso lineare, il quale sarà coniato armonico del piano tangente rispetto a questi due). Questi 4 piani consideriamo quando Z è in uno dei due punti d'intersezione della generatrice W con due spigoli opposti del tetraedro involutorio (e corollat.) sicché ogni punto ed ogni piano appartenente all'uno di questi due spigoli opposti sarà involutorio. (Qui debbo aggiungere che l'A. per giungere a questo caso suppone l'esistenza di un tetraedro involutorio e quindi che nelle equazioni relative a questo sia p.e.: $\frac{G_2}{C_{21}} + \frac{C_{21}}{C_{12}} = \frac{G_{34}}{C_{34}} + \frac{C_{43}}{C_{34}}$, donde deduce: $\frac{G_2}{C_{21}} = \frac{G_{34}}{C_{43}}$ oppure $\frac{G_2}{C_{21}} = \frac{C_{43}}{C_{34}}$)

[22] Consideriamo tra gli elementi involutori due coppie di punti e due coppie di piani. Le rette corrispondenti nella correlazione, le quali si appoggiano tra loro, formano un complesso quadratico di cui dà l'equazione. Si ha questo $L = 0$, e sia $R = 0$ quelli del complesso lineare considerato: le rette coniuganti tali punti coniati della correlazione e punti della 1^a quadrica fondamentale che il rapporto armonico di questi 4 punti sia $\frac{m}{n}$ avremo per luogo il complesso quadratico $L - \frac{mn}{(m+n)^2} R^2 = 0$. Si ha pure

un altro fascio, correttivo a questo, di complessi quadratci : nella conegzione ad ogni complesso dell' un fascio corrisponde in altri i sensi lo stesso complesso dell' altro fascio, anche questi complessi sono involutivi per quella conegzione (Δ è involutorio di se stesa) le coniche di quei primi complessi quadratci appartenenti ad un piano qualunque hanno tutte doppie contatti. (e correlat.) ; la unica di Δ si costruisce come intersezione di quel piano col uno circoscritto alla quadrica - inviluppo fondamentale da uno dei due punti corrispondenti a quel piano. Ecc..

Finire considerando le serie di omografie e conegzioni che si hanno applicando successivamente una stessa conegzione . Tutti i punti (o piani) così ottenuti stanno su una quadrica del fascio - chiamata delle due quadriche fondamentali.

87

Battaglini. — Sui connessi ternarii di 1^o ordine e di 1^o classe
(Giornak di mat., vol. XX, 1882. pag. 230 - 248)

Studia l'omografia tra due piani distinti o sovrapposti e in ultimo il sistema lineare di ∞^1 , ∞^2 od ∞^3 omografie. Contiene però o nulla di nuovo.

88 Battaglini — Sulle forme ternarie bilineari (Giornale, vol. XXI, 1883. pag. 50)
qui fa uno studio analogo della correttezza. Quando i piani sono sovrapposti dimostra che le due coniche caratteristiche della correttezza hanno doppio contatto cercando le equazioni (sempre coll'uso della notazione ombrale). L'equazione di 3^o grado che determina i punti o le rette fondamentali ha per una radice -1 e le altre due reciproche. Quando queste due coincidono, se vengono entrambe a valer +1, allora le due coniche si uniscono n.p. in una coppia di rette ed una coppia di punti; se vengono a valer entrambe -1, le due coniche avranno un contatto quadri punto. Se nel 1^o caso anche i subdeterminanti s'annullano le due rette e i due punti coincidono (correlazione omologica); se questo accade invece nel 2^o caso le due coniche consideriamo e si avrà una polarità.

Una retta r tagli la conica caratteristica - luogo in due punti $V'V''$ e un suo punto P abbia per retta corrispondente una retta che tagli r in P' . L'involto delle rette r tale che $(V'V''PP') = \text{cost}$. è una conica del

AP63

AP63

fascio (schiera) caratteristico; la sua conica corrispondente nella correlazione appartenne allo stesso sistema e gode della proprietà correlativa corrispondente alla stessa costante. — Vi sono poi due coniche corrispondenti a se stesse nella correlazione

9 (Crelle 17, pag. 203-209) Kummer. - De aequatione $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ per numeros integros resolvenda.

In tutti gli (caso III) l'equazione non si può risolvere per numeri interi se oltre λ anche $2\lambda+1$ è primo, tranne che y , numero pari, sia divisibile per λ e per $2\lambda+1$ e che i numeri x, y, z abbiano la forma $x = \frac{v^{2\lambda} + w^{2\lambda}}{2}, y = \frac{v^{2\lambda} - w^{2\lambda}}{2}, z = p^{2\lambda} + 2^{2\lambda v-2} \cdot \lambda^{2\lambda \mu-1} q^{2\lambda}, \pm x = p^{2\lambda} - 2^{2\lambda v-2} \cdot \lambda^{2\lambda \mu-1} q^{2\lambda}$. Se λ ha la forma $8n+3, 8n+5, 8n+7$ può solo verificarsi quel caso (i casi I, II, IV solo per $\lambda = 8n+1$)

I. Se x ed y non sono divisibili per λ affinché l'equazione sia risolvibile dev'essere

$$z+y = v^{2\lambda}, z-y = w^{2\lambda}, z \pm x = 2p^{2\lambda}, z \mp x = 2^{2\lambda v-1} q^{2\lambda}$$

II. Se il numero impari x (solo) è divisibile per λ :

$$z+y = \lambda^{2\lambda \mu-1} v^{2\lambda}, z-y = w^{2\lambda}, z \pm x = 2p^{2\lambda}, z \mp x = 2^{2\lambda v-1} q^{2\lambda}$$

III. Se il numero pari y è divisibile per λ :

$$z+y = v^{2\lambda}, z-y = w^{2\lambda}, z \pm x = 2p^{2\lambda}, z \mp x = 2^{2\lambda v-1} \cdot \lambda^{2\lambda \mu-1} q^{2\lambda}$$

oppure

$$IV \quad z+y = v^{2\lambda}, z-y = w^{2\lambda}, z \pm x = 2 \cdot \lambda^{2\lambda \mu-1} p^{2\lambda}, z \mp x = 2^{2\lambda v-1} q^{2\lambda}$$

Se $x^{2\lambda} + y^{2\lambda} = z^{2\lambda}$ si possono anche trovare 3 numeri r.s. q tali che $r^2 + s^2 = 2q^{2\lambda}$

10 (Crelle 40 pag. 131) Kummer. ~~Dimostriamo ora il teorema di Fermat~~

Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes, dass die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenz-Exponenten λ , welche ungerade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten $\frac{1}{2}(\lambda-3)$ Bernoullischen Zahlen als Faktoren nicht vorkommen.

AP 64

AP 64

94

A. Tammia. — Lezioni di Geometria proiettiva dette

nella università di Napoli (Bibliografia di G. Torelli. — Z. di B. 1885)

Non mi piace la distinzione (§ III) tra prospettivo ed omologico (per gli n-goni, ecc.) a seconda che le conjuganti i punti corrisp. passano per un punto o che le rette corrisp. si tagliano in una retta; meglio la distinzione che farò io. — E' il posto: se in due ennagoni completi $A_1 \dots A_n, A'_1 \dots A'_n$ il lato $A_1 A_2$ e gli altri $2n-4$ lati passanti per A_1 e A_2 segnano i corrisp. in punti di una retta, i due ennagoni sono omologici.

Che il rapporto anarmonico di 4 punti non varia per proj. vien dimostrato col uso dei punti limiti come origini sulle due punteggiate proiettive (§ VIII), mentre nel fascio il rapp. an. di 4 elementi mediante i semi non si trova che nel § IX.

L'opera pare molto accorta per quanto riguarda le teorie delle coniche; però avrei voluto che in questo tratt. stessa fossero entrati continuamente i sistemi polari piani in generale (coniche) immaginarie) e non solo in un § alle fine. E invece che finire colla teoria dell'inversione e parlare dei problemi sui cerchi e sulle sfere nel centro della teoria delle coniche avrei voluto riunite il tutto in un capitolo prima della teoria delle coniche.

AP 65

D 126 R

92 N. Salvatore Dino. — Elementi di Geometria proiettiva (Napoli, Morano)

Sul principio assai male introdotti punto, retta e piano all'infinito. Molte incertezze nelle espressioni, alcune assai gravi. Vi sono delle omissioni strane; p.e non è detto che due forme proj. di 1^a specie si possono sempre disporre in modo da diventare prospettive; e si parla di punteggiate uguali senza considerare quelle inversamente uguali o simmetriche (mentre si distinguono i casi uguali in diametralmente ed in dir. uguali) sicché si trova p.e la proposizione: 2 puntegg. uguali sovrapposte hanno due punti uniti coincidenti all'infinito e viceversa. Nel cercare come devono essere due punteggiate proj. sovrapp. perché due elementi si corrispondano in doppio modo c'è escluso a titto il caso in cui quelli coincidono; anzi in nessun trattato ho visto notato che in due casi diversi quelle due punteggiate hanno gli elem. corrisp. in doppio modo, cioè nell'involuzione e nel caso (che non rientra in quello) di due punteggiate coincidenti. A proposito di trascuratezza nelle espressioni, eccone un esempio (pg. 60): « una punteggiata costituita da punti tutti coincidenti nel punto che... ». Non mi piace di ricorrere ai punti uniti per dimostrare che se l'involutorietà ha luogo per una coppia di elementi corrispondenti ha luogo per tutte.

AP 66

AP 66

Brelle, 84

93 Probenius. - Über lineare Substitutionen und bilineare Formen (1-64)

Brelle 86

94 Probenius. - Über homogene totale Differentialgleichungen (1-20)

" - Über die schiefen Invarianten einer bilinearen oder quadrat. Form (44-72)

95 Stickelberger - Über Scharen von bilinearen und quadratischen Formen

96 Sylvester. Philosoph. Magazine 1851
Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires

Cayley. Remarques sur la notation des fonctions algébriques. Brelle 50

98 Hesse. Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Funktionen II. Grades in andere transformiren die nur die Quadrate der Variablen enthalten. Brelle 57

99 Christoffel. Théorie des bilinéaires Formen. Brelle 68

100 Bosches. Über die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst Brelle 80

101 Kronecker. (Berl. Mon. 1868 e anav. più) Berl. Mon. 1874: Über die congruenten Transformationen der bilinéaires Formen

102 Jordan. Comptes-rendus, Dec. 1873 (et Mars 1874), Journal de Liouville ser. II, n° 19

103 Hermite. Sur la théorie des formes quadratiques, pag. 313. e seg.

104 Bachmann. (sulla trasformazione di una forma quadratica in se stessa)
una breve aggiunta nel Brelle 78 originata dal lavoro seguente di Bachmann.

Bachmann. Untersuchungen über quadratische Formen. Brelle 76 (completa la teoria di Hermite)

105 Dimostrazioni del teorema di Weierstrass: Kochs nel Brelle 66, Christoffel nel Brelle 68, Hamburger nel Brelle 76, Liocei negli Annali di Matem. ser. II tom. IV pag. 36

AP 67

106 Rosanes — Über die Transformation einer quadratischen Form
in sich selbst (Brelle's J., Bd. 80, 1875, pag. 52-72)

Hermite nella sua memoria ^(Théorie des formes quadratiques) del giorn. di Brelle, vol. 47 generalizzò la questione delle sostituzioni ortogonali considerando una sostituzione che muti in se stessa una forma quadratica qualsiasi (e Bayley nel vol. 50 diede poi una formula di sostituzione per ampi caso ed esprimendo i coefficienti della sostituzione in funzione di quelli della forma e di 3 parametri arbitri). Terza Rosanes chiama sostituzione Hermitiona (Hermite'sche Substitution) ogni sostituzione che trasformi una forma quadratica in se stessa.

Rosanes chiama antisimmetrica la sostituzione fornita dalle equazioni:

$$\sum_x a_x^r x_x = \varepsilon \sum_x a_x^s X_x \quad (r=1 \dots n)$$

dove $\varepsilon = \pm 1$. Il suo determinante $|\varepsilon a_x^r - p a_y^x| = P(p)$ è reciproco e viceversa se una sostituzione ha il determinante reciproco con tutte le radici semplici e non ha simultaneamente +1 e -1 per radici, si può con una sostituzione cogrediente ridurre quella sostituzione alla forma antisimmetrica

(pag. 62) La sostituzione considerata muta in se stessa la forma quadratica $f(x) = \sum_x a_x^\lambda x_x x_\lambda$
Affinché una sostituzione qualsiasi muti in se stessa una forma quadratica basta che i suoi coefficienti verifichino una condizione sol. (non allora) quelle forme quadratiche che si mutano in se stesse hanno tutti i subdeterminanti fino a quelli del 3° grado nulli; due condizioni se i subdeterminanti di quelle forme fino a quelli del 3° ad anche del 4° grado possono annullarsi; in generale se i subdeterminanti evanescenti sono del grado minimo $2r$ ovvero $2r+1$, rimangono r condizioni da soddisfare. (pag. 64)

(pag. 64-66) Ogni sostituzione Hermitiona si può porre sotto la forma antisimmetrica, escluso il caso in cui l'equazione fondamentale abbia le due radici +1 e -1, il che accade quando, se essendo pari, il determinante $|b_x^\lambda|$ della sostituzione $x_i = \sum_x b_x^\lambda x_\lambda$ vale -1 (V. Balyoz. Detern. p. 182)

Balyoz pag 176. Il determinante di una sostituzione

AP 68

AP 68

WOF Probenius: Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen
(Brelle's J. Bd. 84, pag. 1 - 63).

I divisori elementari della serie $uA + vA'$ (dove A è una forma bilineare ed A' ha uno conigato ^(fondi) cioè quello che se ne ottiene scambiando i due sistemi di variabili) della forma $(u+v)^{2x+1}$ oppure $(u-v)^{2x+1}$ sono sempre contenuti due volte. (V. per questo e simili teoremi Kronecker nei Monatsh. Berl. 1874 pag. 660, gli altri divisori elementari sono a coppie di egual grado e corrispondenti a radici reciproche).

Dette le due forme A, B si indichi con AB lo $\sum_i \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i}$, donde si ha il significato di A^2, A^3, \dots e si ponga $A^0 = \sum_i x_i y_i$. Allora non in senso determinato una funzione razionale di A ; sarà cioè una altra forma bilineare. Bis' posto.

Se $(r-a)^\alpha, (r-b)^\beta, \dots$ sono i divisori elementari della funzione caratteristica di A (determinante di $rE - A$) e se $f(A)$ è una funzione razionale di A tale che $f'(r)$ non s'annulli per alcun valore di r che annulla un divisore elementare multiplo, saranno $(r-f(a))^\alpha, (r-f(b))^\beta, \dots$ i divisori elementari della funzione caratteristica di $f(A)$.

Una forma dicesi simmetrica od alternata se scambiando le variabili essa non muta oppure cambia segno. La forma reciproca di una data è la sua aggiunta divisa per determinante. Una forma dicesi ortogonale se è conigata della sua reciproca. Bis' posto.

Se una forma è ortogonale a simmetrica, i suoi divisori elementari sono tutti semplici e s'annullano nei valori 1 e -1 .

Una forma ortogonale ed alternata ha tutti i divisori elementari semplici, che si annullano una metà per valore i , l'altra per valore $-i$

AP69

Dato le due forme A, B se se ne possono determinare altre due P, Q tali che simbolicamente sia $PAQ = B$, dicesi che A e B sono equivalenti; e le P, Q dicono le due sostituzioni che trasformano A in B .

Affinché le sostituzioni P, Q siano alte a trasformare in se stessa una forma di determinante non nullo occorre e basta che le serie di forme $rE - P$ e $rQ - E$ siano equivalenti; cioè che i divisori elementari delle funzioni caratteristiche risp. di P e Q possano farsi corrispondere al che i corrispondenti siano di ugual grado e s'annullino per valori reciproci. — Altri termini riguardanti il uso in cui la forma da trasformare in se stessa abbia il determinante e certi subdeterminanti nulli.

Se Q è la forma coniugata P' di P , la sostituzione a cui P, Q danno luogo dicesi cogrediente. Affinché una sostituzione cogrediente P sia alta a trasformare una forma di determinante non nullo in se stessa occorre e basta che le serie di forme $rE - P$ ed $rP - E$ siano equivalenti, cioè che i divisori elementari della funzione caratteristica di P siano a coppie di ugual grado e con radici reciproche, eccettuati quelli che corrispondono alle radici $+1$ ovvero -1 ; ad altri termini che il determinante caratteristico ed i massimi comuni divisori dei subterminanti di ugual grado siano funzioni reciproche.

Una sostituzione P (cogrediente) dicesi propria od ingegnosa quando che il suo determinante vale $+1$ ovvero -1 . Dicendo $p + q$ i gradi a cui entrano le radici $+1$ e -1 nel determinante di $rE - P$, ed $\varepsilon (= \pm 1)$ il determinante di P sarà $\varepsilon = (-1)^q = (-1)^{n-p}$ (pag. 35)

AP69

(pag. 41) Affinché una sostituzione (cogrediente) sia atta a trasformare in se stessa una forma simmetrica [od alternata] di determinante non nullo è necessario e sufficiente che i divisori elementari della sua funzione caratteristica siano a coppie di ugual grado e annullantisì per valori reciproci, eccettuati quelli che annullano per valore +1 oppure -1 ed hanno un esponente impari [o siamo pari] le ultime proprietà rispetto pure ai divisori elementari del determinante di $RQ - P$ dove P e Q sono due diverse sostituzioni che mantengono la stessa una stessa forma. (pag. 42)

(pag. 46) Affinché le potenze distinte di una forma siano in numero finito (cioè un'omografia ripetuta un certo numero di volte conduca all'identità) occorre e basta che il suo determinante caratteristico svanisca solo per valori zero (il che non farà se l'omografia non è degenera) e per radici dell'unità; e che quei loro divisori elementari che s'annullano per queste siano tutti semplici.

A pag. 48 e seg. si occupa delle forme ortogonali. Considerandovi le due serie di variabili come cogredienti, la teoria ivi esposta potrebbe tradursi in una teoria geometrica di quelle correlazioni che mutano una quadrica non degenera in se stessa.

AP63

102. Brell. 86. — Stiukelberger, über Scharen von bilinearen und quad. Formen
Sag. 43, un teorema di Kronecker (Biel. Monatsh. 1874) : Se A e B sono
forme bilineari coniugate, nel determinante di $rA - B$ entreranno sempre a
cognizione i divisori elementari annullantesi per $r=1$ ed aventi esponenti pari,
come pure i divisori elementari annullantesi per $r=-1$ e con esponenti impari.

103. Brell 86 — Frobenius. Neben die schräge Invariante einer bilinearen
oder quadratischen Form.
Se A' è la forma coniugata di A abbiamo : Se il determinante di $rA - A'$
ha un divisore elementare di esponente impari annullantesi per $r=1$, la forma A
ammette trasformazioni improprie in se stessa. Se ciò non avviene e se inoltre quel
determinante di $rA - A'$ non è identicamente nullo, la forma A ammette soltanto
trasformazioni proprie in se stessa.

Se il determinante di un fascio di forme quadratiche ha un divisore
elementare con esponente impari, quel fascio ammette trasformazioni improprie in
se stesso. Se invece quel determinante (non identicamente nullo) ha tutti i di-
visori elementari con esponenti pari, il fascio ammette solo trasformazioni proprie
in se stesso.

AP70

Sulle forme bilineari

110 Jordan nei Comptes-rendus 1873, dicembre (2^e sem) « Sur les polynomes bilinéaires » pag. 1487 - 1491 espone i risultati delle sue ricerche (V. Journal de Liouville 1873 o 1874) sulle forme bilineari, cioè le soluzioni dei 3 problemi: 1^o « Ramener un polynome bilinaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur x_1, \dots, x_n , les autres sur y_1, \dots, y_n », 2^o « Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques, mais opérées simultanément sur les x et sur les y . » 3^o « Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques opérées isolément sur chacune des deux séries de variables ». — Il 2^o problema viene risolto riducendo P alla seguente forma canonica: la somma di funzioni bilineari dell'uno delle forme seguenti (di cui ciascuna contiene una o due coppie di variabili)

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \Delta(x_2 y_1 - x_1 y_2), \quad x_{2p+1} y_{2p+1}, \quad x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n$$

$$x_m y_m + x_{n-2p} y_m - x_m y_{n-2p}$$

Il 3^o problema viene risolto lasciando inalterata una forma $R = pP + qQ$ del fascio la quale abbia determinante nullo e mettendo Q sotto la forma $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$, dove \mathcal{P} abbia una delle forme $P = XY$, $P = Xy_1 + x_1 y_2 + \dots + x_{k-1} y_k$, ovvero $P = Xy_1 + x_1 y_2 + \dots + x_{k-1} y_k + x_k Y$ ($k \leq m$ essendosi prima però risolto $R = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$ dove $m < n$), essendo X, Y variabili non contenute in R .

111 Kronecker nei Comptes-rendus 1874 (Aprile 1^o sem.) pag 1181-2) dice in queste

AP74

solutions' che " la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée ; et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Accémons il ses résultats qui une forme bilinéaire avec une même transformation si peut réduire à une somme de fonctions de une des formes suivantes élémentaires :

$$\text{I. } (-1)^n \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} + x_n y_n \quad (h=0, 1, \dots n-1)$$

$$\text{II. } (-1)^m \sum_h x_h y_{h+1} + \sum_h (-1)^h y_h x_{h+1} \quad (h=0, 1, \dots 2m-2)$$

$$\text{III. } a \sum_h x_h y_{h+1} + b \sum_h y_h x_{h+1} \quad (a^2 \geq b^2) \quad (h=0, 1, \dots n-1)$$

Uno dei 2 coefficients a, b può prendre la valeur 0 ; alors l'autre est différent de ± 1 et peut prendre la valeur 0 si n est pair.

Une forme bilinéaire $\varphi(x, y)$ est caractérisée par le faisceau $u\varphi(x, y) + v\varphi(y, x)$, et indiquant avec F_1, F_2, F_3 les faisceaux qui appartiennent aux formes élémentaires I, II, III et avec D_1, D_2, D_3 les déterminants, on a

$$D_1 = [u + (-1)^n v]^{n+1}$$

$$D_2 = (u \pm v)^{2m}$$

$$D_3 = (au + bv)^m (av + bu)^m \quad - n+1 étant égal à 2m$$

$$D_3 = 0 \quad n+1 étant impair$$

Le faisceau F_1 sont eux-mêmes éléments, mais aucun des faisceaux F_2, F_3 n'est décomposable en deux faisceaux éléments du même nombre de variables.

H. L. Jordan (ibid. 1874 1^{re} sem. pag. 614) après reclam sur les critiques de Kronecker connaît il ses résultats qui si le déterminant (P, Q) est identiquement 0

AP 71

si può rendere

$$P = x_1 y_1 + \dots + x_{m-1} y_{m-1} + P', \quad Q = x_2 y_1 + \dots + x_m y_{m-1} + Q'$$

P' e Q' non contenendo più che le variabili $x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, x_n, y_n$

AP72

$(m-1)$ od ancor minore e quindi sarebbe effettivamente al più del grado $(m-1)$ rispetto a W , poiché gli elementi di questi subdeterminanti contengono la variabile W solo linearmente. L'indipendenza così dimostrata delle $m+1$ funzioni f' permette di trasformare le variabili $x_1, x_2 \dots x_n$ linearmente in $x'_1, x'_2, \dots x'_{n-1}$, per modo che $f'_1, f'_2, \dots f'_m$ diventino le derivate parziali della forma trasformata di f prese risp. secondo $x'_1, x'_2, \dots x'_{n-1}$. Questa forma trasformata sia f' e:

$$f'(x'_1, x'_2, \dots x'_{n-1}) = \phi'(x'_1, x'_2, \dots x'_{n-1}) - W \psi'(x'_1, x'_2, \dots x'_{n-1})$$

e sia poi per ogni indice h :

$$\phi'_h = \frac{\partial \phi'}{\partial x'_h}, \quad \psi'_h = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_h}$$

e quindi:

$$(\phi'_1 - W \psi'_1) + (\phi'_2 - W \psi'_2) W + (\phi'_3 - W \psi'_3) W^2 + \dots + (\phi'_m - W \psi'_m) W^m = 0.$$

Dal quest'equazione seguono per le prime derivate di ϕ' e ψ' le relazioni:

$$\phi'_1 = 0, \quad \psi'_m = 0 \quad \text{e, quando sia } 0 < k \leq m, \quad \phi'_k = \psi'_{k-1},$$

e quindi per le seconde derivate:

$$\phi'_{1,h} = 0, \quad \psi'_{m,h} = 0, \quad \phi'_{k,h} = \psi'_{k-1,h}$$

per ogni indice h . Siccome adunque per ogni indice h tra i limiti assegnati sarà:

$$\psi'_{m,k-1} = \psi'_{k-1,m} = \phi'_{k,m} = 0,$$

e, se anche l'indice h sta compreso tra questi limiti:

$$\phi'_{k,h-1} = \psi'_{k-1,h-1} = \psi'_{h-1,k-1} = \phi'_{h,k-1},$$

segue immediatamente che, se entrambi gli indici h e k non sono maggiori di m , deve sempre essere $\phi'_{k,h} = 0$: Le funzioni $\phi'_1, \phi'_2, \dots \phi'_m$ possono perciò solo essere

AP73

Monatsh. der k. p. Ak. d. W. zu Berlin, 18 Mai 1868 pag. 339-346

~~103~~ Kronecker aggiunge alcune osservazioni alla memoria del Weierstrass (ib. pag. 310-322) riguardanti una schiera (Schaar) di forme quadratiche $u\phi(x_1, \dots, x_n) + v\psi(x_1, \dots, x_n)$. Nel 1^o paragrafo studia le 2 specie di schiere: quelle che contiene forme definite di determinante non nullo e quelle che non ne contiene. A questa 2^a specie di schiera appartengono quelle particolari schiere ($u\phi + v\psi$), il cui determinante s'annulla identicamente e per le quali passa ad essere l'espressione generale nel 2^o paragrafo:

II. (pag. 343). Se si indica il valore negativo del rapporto $\frac{v}{u}$ con W e si pone $\phi - W\psi = f$, sarà f una forma quadraticha di x_1, x_2, \dots, x_n , i cui coefficienti sono funzioni lineari di W . Se il determinante di f deve annullarsi per valori arbitrari di W , dovrà tra le n derivate di f passare almeno una relazione lineare omogenea, i cui coefficienti sono funzioni intiere di W . Una tal relazione, la quale sia rispetto a W del minimo grado possibile, sia ordinata secondo la potenza di W :

$$f'_0 + f'_1 W + f'_2 W^2 + \dots + f'_m W^m = 0,$$

dove f'_0, f'_1, \dots, f'_m rappresentano funzioni lineari omogenee delle n derivate di f . Le $(m+1)$ funzioni f' non possono esser legate da relazioni lineari con coefficienti costanti, cioè indipendenti anche da W , poiché, se ciò fosse, dovrebbe esservi già tra m funzioni f' un'equazione lineare omogenea, i cui m coefficienti allora sarebbero al più del grado $m-1$ rispetto a W . Sicché, imaginando le derivate secondo le n variabili x di quelle m funzioni f' ordinate in n linee orizzontali, ciascuna di m elementi, dovrebbero nell'ipotesi fatta annullarsi tutti i determinanti d'ordine m formati con esse; quegli m coefficienti sarebbero quindi proporzionali ai subdeterminanti d'ordine

AP 73

funzioni lineari di $x'_{m+1}, \dots x'_{n-1}$, e considerando inoltre le equazioni:

$$\phi'_0 = 0, \quad \psi'_m = 0, \quad \phi'_k = \psi'_{k-1},$$

si ottiene in conclusione per quelle schiere che contengono solo forme di determinante nullo l'espressione generale:

$(ux'_1 + vx'_0)\phi'_1 + (ux'_2 + vx'_1)\phi'_2 + \dots + (ux'_m + vx'_{m-1})\phi'_m + u\Phi + v\Psi,$
 in cui $x'_0, x'_1, \dots x'_{n-1}$ indicano funzioni lineari di $x_1, x_2, \dots x_n$, e Φ, Ψ forme quadratiche di $x'_{m+1}, \dots x'_{n-1}$, e finalmente $\phi'_1, \phi'_2, \dots \phi'_m$ funzioni lineari omogenee delle stesse $(n-m-1)$ variabili.

Nell'espressione trovata le $\phi'_1, \phi'_2, \dots \phi'_m$ sono perfettamente determinate come funzioni lineari delle variabili x dall'equazione supposta tra le n derivate della forma f , cioè della forma $(\phi - \psi)$.
 Poiché ordinando quell'equazione secondo le potenze di w , i diversi coefficienti $f'_0, f'_1, \dots f'_m$ daranno immediatamente quelle funzioni lineari ϕ' mediante la relazione

$$f'_0 + f'_1 w + f'_2 w^2 + \dots + f'_{k-1} w^{k-1} + \phi'_k w^k = 0$$

per $k = 1, 2, \dots, m$. Ma le funzioni lineari x' contengono una certa arbitarietà in quanto che quelle $(n-m-1)$ il cui indice è superiore ad m possono essere sostituite da funzioni lineari di esse stesse, e simili funzioni possono essere aggiunte a quelle x' il cui indice non supera m . Si ottengono in questo modo:

$$(n-m-1)^2 + (m+1)(n-m-1) = n(n-m-1)$$

costanti arbitrarie. Appunto questi numeri di costanti arbitrarie si ottiene dalla determinazione delle funzioni lineari x' , che ha condotto alla derivazione dell'espressione generale sopra ottenuta. Poiché secondo quella determinazione, se la relazione tra le variabili x e x' è espresso dall'equazione:

$$x_k = \sum_{h=0}^{h=n-1} c_{hk} x'_h$$

per $k = 1, 2, \dots, n$, dovevano i coefficienti c il cui primo indice non è maggiore di m venir presi dalla relazione:

$$f'_h = \sum_{k=1}^{k=n} c_{hk} f_k$$

per $h = 0, 1, \dots, m$, mentre i rimanenti $n(n-m-1)$ coefficienti c si possono scegliere ad arbitrio e sono solo soggetti all'unica limitazione che il determinante degli n^2 coefficienti c non può annullarsi.

Siccome tra le m prime funzioni f' non passa alcuna relazione lineare, dovranno anche le m funzioni Φ' esprimibili con esse essere indipendenti tra loro. Si può dunque supporre le m funzioni $x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_{2m}$ scelte in modo che coincidano colle m funzioni Φ' . Allora si può riunire la parte delle forme quadratiche Φ e Ψ contenente queste m variabili x' , nella espressione generale data, ai primi m termini di essa. Dunque lo schiera qui trattate contenente solo forme con determinanti evanescenti, sono caratterizzate completamente dal notare ognuna delle loro forme venire rappresentata nel modo seguente:

$$f_1 x'_{m+1} + f_2 x'_{m+2} + \dots + f_m x'_{2m} + F,$$

dove F significa una forma quadratica delle ultime $(n-2m-1)$ variabili x' e con f_1, f_2, \dots, f_m sono da intendere funzioni lineari omogenee qualunque di tutte le n variabili x' . ⁽⁺⁾

(+) Nel Monatsbericht del 19 Januar 1874 nella nota «Ueber Scharen von quadratischen Formen» (pag. 59-76) allo pag. 73 Kronecker riduce lo schiera delle due forme a

$$u \left(\sum_k x_{2k} x_{2k+1} + \Phi \right) + v \left(\sum_k x_{2k+1} x_{2k+2} + \Psi \right) \quad (k=0, 1, \dots, m-1)$$

dove Φ e Ψ sono forme quadratiche delle variabili che seguono le x_{2m} .

AP74 Cremona. - Rappresentazione piana di alcune superficie

algebriche dotate di curve cuspidali (Memorie Acc. Bologna, 1872, serie 3^a tom II, pag 117-27)

Dal una particolare trasformazione cubica dello spazio ottiene come immagine di una quadrica particolare la superficie di 5° ordine

$$x(4z^2 - 3xw)^2 - 4z(4z^2 - 3xw)(xz - gy^2) + 3w(xz - gy^2)^2 = 0$$

avente le quattro equazioni $4z^2 - 3xw = 0, \quad xz - gy^2 = 0$

(di cui $x = y = z = 0$ è cuside, e che si può anche rappresentare così
 $x : y : z : w = 3\lambda^4 : \lambda^3 : 3\lambda^2 : 4$)

per curva cuspidale. — Quella superficie di 5° ordine non è altro che la reciproca di una superficie cubica dotata di un punto uniplanare. — Il Cremona ne studia la rappresentazione piana mediante quella della quadrica di cui è l'immagine.

Giunge poi nella 2^a parte alla superficie di 4^o ordine dotata di una cuspidale come segue. Una superficie cubica F'_3 con due punti doppi p', q' si può sempre rappresentare così

$$F'_3 = (z' + w')(z'^2 - 2x'y') - u'w'^2 = 0$$

essendo $x' = y' = z' = 0$ il vertice del cono quadrico circoscritto ad F'_3 , $w' = 0$ il piano della conica di contatto, $u' = ex' + fy' + gz' + hw' = 0$ il piano della conica di semplice intersezione, $z' + w' = 0$ il piano tangente ad F'_3 lungo $p'q'$, ecc.. Proiettando F'_3 da uno de' punti doppi su un piano e

AP74

poi facendo una trasformazione quadratica si ha una rappresentazione piana di F'_3 in cui le cubiche immagini delle sezioni piano passano per sei punti fissi distinti $0, 1, 2, 3, 4, 5$, di cui $0, 1, 2, 0, 3, 4$; stanno su due rette immagini di p', q' . La retta $p'q'$ è rappresentata da 0 , le altre $4+4$ rette uscenti da p', q' da $1, 2 + 3, 4, 5$, e da $3, 4 + 1, 5, 2, 5$; la retta $u' = z' + w' = 0$ da $0, 5$; e le altre sei rette di F'_3 dal punto 5 ; dalle rette $13, 14, 23, 24$ e dalla conica 12345 . — Una retta R passante per 5 e una conica C per 1234 sono le immagini risp. delle coniche

$$N' = z'^2 - 2x'y' = 0 \quad , \quad u' = z'^2 - 2x'y' = 0 .$$

Bisogna fare una trasformazione razionale dello spazio mediante il sistema omaloidico delle quadriche passanti per i punti $0'$ e la conica $u' = z'^2 - 2x'y' = 0$, cioè colle formule

$$x': y': z': u' = xu: yu: zu: z^2 - 2xy$$

$$\text{ossia} \quad x: y: z: u = x'u': y'u': z'u': z'^2 - 2x'y' .$$

La F'_3 si trasformerà nella seguente (posto $t = ex + fy + gz$):

$$F'_4 = (z^2 - 2xy)^2 - u(z^2 - 2xy)(2t + hu) + u^2[t^2 + hu(t - hz)] = 0$$

che è di 4° ordine la conica unipolare $u = 0$, $z^2 - 2xy = 0$. (Questa trasformazione della F'_3 nella F'_4 equivale per me ad una inversione eseguita su una cubica cubica $[(11)111]$ qualunque da un suo fuoco). — La rappresentazione piana di F'_3 darà quella di F'_4 : immagini delle sezioni piano

di questo sono le curve di 4^o ordine $o^2 + 2345^2$ del sistema lineare 3 volte infinito determinato dalla curva composta delle quattro rette $012, 034, R, R$ e da una rete di cubiche 012345 da associarsi alla retta fissa 05 .

I due punti doppi p', q' di F_3' danno due punti particolari p, q di F_4 aventi per immagini le rette $012, 034$. Le p, q passano per $4+4$ rette le cui immagini sono i punti $1, 2, 3, 4$ e le rette $s1, s2, s3, s4$. Eseguiti p, q , l'immagine della conica auspicata di F_4 è la retta R .

Le coniche di F_4 formano 7 serie, di cui sei stanno (a due a due) nei piani tangenti di 3 coni quadrici, facenti parte del sistema di quadriche

$$(1-2\lambda)(z^2 - 2xy - tu) + hu(z + \lambda^2 u) = 0$$

avente per iniziatrice la F_4 ; le coniche della settima serie stanno in piani passanti per la retta pq . Immagini delle sette serie di coniche sono

le coniche 0524 , , le coniche 0513 ;

le coniche 0523 , , le coniche 0514 ;

le cubiche 012345^2 , , le rette o ;

la retta s .

Due coniche della settima serie poste in un piano hanno per immagini due rette per s coniugate armoniche con due rette fisse, di cui una è R e l'altra è l'immagine della conica di contatto fra F_4 e il piano $u+4z=0$.

Bulletin de la Société Mathématique de France.

AP75

Volume I (1872-3)

~~115~~ Halphen. — Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre. — (p. 19-20)
Le superficie d'ordine minimo passanti per una curva algebrica sita su una quadrica la tagliano inoltre secondo generatrici d'uno stesso sistema. — Usando notazioni più moderne (?) per una curva (m, n) di una quadrica, essendo $m \geq n$, passa una superficie d'ordine m ; in particolare una curva (m, m) è l'intersezione completa della quadrica con una F^m .

~~116~~ Laguerre. — Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe (p. 101-4)

(J. 104). Quand une normale à une surface anallagonomique (du 4^e ordre) se déplace, le rapport anharmonique de 4 quelconques des 5 points conjugués où elle coupe les 5 surfaces ... (quadriques différents) demeure constant. — L'A. comunicò questo teorema (com'egli avverte in nota) verbalmente alla Société philomatique in maggio 1868; solo più tardi (1872) lo ritrovò Darboux.

Volume II (1873 - 4)

~~117~~ Halphen. — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques. (p. 69-72)

Per una curva sghemba d'ordine q e classe (rango) r senza singolarità: 1° l'inviluppo dei piani rettificanti è di classe $4r-3q$; 2° la superficie delle normali principali è d'ordine $4r-2q$; 3° la superficie delle binormali è d'ordine $3r-2q$; 4° il numero delle normali principali che incontrano di nuovo la curva è $(q-1)(4q-2r)-3r$; 5° il numero delle binormali che incontrano di nuovo

la curva è $(q-1)(3r-2q) - r$; 6° il numero delle rette a distanza finita normali alla curva in due punti diversi è $\frac{(q+r)(q+r-1)}{2} - 2r$. Quest'ultimo risultato si applica pure alle curve piane, ponendo $r = q(q-1)$.

Volume III (1874-5)

118. Jordan. — Essai sur la géométrie à n dimensions. (p. 103-174)

... Nous étudions, dans la section I de notre Mémoire, les divers degrés de parallélisme qui peuvent exister entre deux multiplans (Une équation linéaire entre les n coordonnées d'un point définit un plan; k équations linéaires simultanées, un k -plan; $n-1$ équations, une droite).

Dans la seconde section nous donnons les conditions de perpendicularité.

Dans la troisième les formules de transformation des coordonnées.

Les sections suivantes renferment des résultats plus intéressants.

Les sections IV et V. sont consacrées à l'étude des relations indépendantes du choix des axes (les coordonnées restant rectangulaires), qui peuvent exister entre deux multiplans. Nos principaux résultats consistent dans les propositions suivantes:

1° Un système formé d'un k -plan P_k et d'un l -plan P_l passant par un même point de l'espace a p invariants distincts, p étant le plus petit des nombres $k, l, n-k, n-l$. On peut considérer ces invariants comme définissant les angles des deux multiplans.

2° Les divers plans perpendiculaires à P_k et à P_l forment respectivement par leurs intersections un $(n-k)$ plan P_{n-k} et un $(n-l)$ plan P_{n-l} , formant entre eux les mêmes angles que P_k et P_l .

AP.75

3° Si P_k et P_l n'ont pas de points communs, on aura un invariant de plus, à savoir leur plus courte distance. cet invariant s'exprime par une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés de déterminants.

Dans la section VI nous donnons le système des formules qui relient entre eux les angles mutuels des divers multiplans formés avec n plans donnés quelconques (se courant au même point). Ces formules se réduisent, pour $n=3$, à celles de la trigonométrie sphérique. Nous les rattachons à la considération du déterminant de la forme quadratique qui donne la distance de deux points (les n plans donnés étant pris pour plans coordonnés).

Dans la section VII nous montrons comment une substitution orthogonale de déterminant 1 peut être ramené par un changement d'axes rectangulaires à une forme canonique simple, dépendant de $\frac{n}{2}$ invariants si n est pair, de $\frac{n-1}{2}$ si n est impair. Nous donnons les équations différentielles partielles auxquelles satisfont ces invariants. De cette recherche nous déduisons entre autres résultats la généralisation des théorèmes suivants : tout mouvement plan se réduit à une rotation autour d'un point; tout mouvement dans l'espace est un mouvement hélicoïdal.

Nous en tirons encore la généralisation de la loi de réciprocité signalée par M. Chasles, et qui a servi de fondement à ses belles recherches sur le mouvement d'un corps solide.

Nous terminons en donnant les lois de la composition des mouvements infiniment petits dans l'espace à 4 dimensions. Le résultat auquel nous arrivons se formule dans ce théorème :

Une rotation R , autour d'un point dans l'espace à 4 dimensions, peut être représentée dans l'espace à 3 dimensions par deux droites A et B , de grandeur et de direction convenables. Deux rotations R_1 et R_2 , respectivement représentées par les droites A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , auront pour résultante une rotation représentée par les droites A , résultante de A_1 et A_2 , et B , résultante de B_1 et B_2 (ces droites étant combinées suivant la règle du parallélogramme).

Compte IV (1875 - 6)

95. Halphen. Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes (p. 29 - 41)
Expression générale du genre d'une courbe plane : Soient p le genre, m le degré, c la classe d'une courbe algébrique, N la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et T le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers. Ces éléments satisfont à la relation (Comptes-rendus, t. 78, p. 1833, et t. 80, p. 638) : $2(p-1) = c - 2m + N - T$

H. Picquet. — Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré (Bulletin de la Soc. Math. de France, t. IV, 1875-6, pag. 128-48)

Comincia con alcuni teoremi sulle cubiche piane. Così ogni cubica è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un suo punto arbitrario alle coniche di un fascio (passanti per 4 punti di contatto della cubica colle tangenti condotte da quel punto). Ne segue che la cubica ha ∞^2 inversioni fondamentali (anallagmases), le cui coniche direttrici formano una serie tale che per 2 punti della cubica ne passano 6 (i cui corrispondenti centri d'inversione sono i tangenziali di quei due punti ed i punti di contatto delle 4 tangenti condotte alla cubica dal terzo punto d'intersezione di questa colla retta conjugante i due punti dati); di quella serie di ∞^2 coniche fanno parte le coniche polari dei punti della cubica. Ogni cubica anallagmatica è il luogo dei punti di contatto delle tangenti parallele all'asintoto reale condotte al fascio delle iperboli equilateri passanti per quattro punti principali (centri delle 4 inversioni fondamentali ordinarie) (teorema di Bouret).

Passando allo spazio dimostra il teorema già noto che ogni superficie cubica è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto d'intersezione di due rette della superficie ad un fascio di quadriche, la cui base (a questo punto dovuta all'autore, a quanto egli dice) è la biquadratica secondo cui la superficie cubica è bisecta dal cono circoscritto ad essa dal punto considerato.

AP77

9 135 fasci di quadriche che così corrispondono ai 135 punti d'intersezione delle 27 rette della superficie cubica sono direttici d'inversioni fondamentali (surfaces d'anallagmasie) aventi risp. quei punti per centri: per una data conica della superficie passano 5 di quelle quadriche e i loro corrispondenti centri sono i punti di contatto dei piani tangentì condotti alla superficie dalla retta di questa posta nel piano di quella conica.

Segue una brutta dimostrazione analitica del seguente teorema: Il luogo della conica armonicamente iscritta alle coniche della ∞^4 che si ottiene tagliando con un piano rotante intorno ad una retta fissa le quadriche di una ∞^4 lineare composta delle quadriche passanti per 5 punti dati, è una superficie cubica contenente la retta fissa: i 5 piani tangentì condotti alla superficie da questa retta hanno appunto quei 5 punti dati per punti di contatto. (Comincia dal considerare una ∞^4 lineare generale di quadriche, nel quale caso il luogo è di ordine 8 colla retta fissa restopla; e suppone poi che in particolare quelle quadriche abbiano 5 punti comuni). — Dimostri, poi, in modo che egli stesso ammette non rigoroso, il teorema inverso cioè che ogni superficie di 3^o grado può esser considerata in 27 modi diversi come luogo della conica armonicamente iscritta alle coniche della ∞^4 lineare ottenuta tagliando con un piano rotante intorno ad una delle 27 rette le ∞^4 quadriche passanti per 5 punti di contatto dei 5 piani tangentì condotti da quella retta alla superficie.

In particolare per le superficie anallagmatiche cubiche si ha una generalizzazione del teorema di Bonnet, considerando i piani paralleli passanti per la retta all'infinito, e gli iperboloidi equilateri passanti per i 5 centri d'inversioni fondamentali (propriamente dette), o poli principali.

Ogni superficie cubica anallagmatica è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un polo principale a tutte le quadriche passanti per la biquadratica, curva d'intersezione a distanza finita della superficie e della sfera direttrice corrispondente. (pag. 147)

Il luogo della conica sorta in un piano rotante intorno ad una retta fissa e coniugata ad un pentagono eguale dato è la superficie cubica passante per la retta fissa e tangente in ogni vertice del pentagono al piano che lo congiunge a questa retta. (pag. 147)

124. Sturm - Luv. Théorie des Plaçhen dritter Ordnung

(Brettle's Journal, 88, pag. 213 - 40)

N° 6 (pag. 215-6). Siano K le coniche di una F^3 nei piani passanti per una sua retta g . « Die Doppelpunkte der fünf Geradenpaare unter den Kegelschnitten K bilden ein derartiges räumliches Fünfeck dass in Bezug auf jeden K die Spuren der Verbindungslinee zweier Ecken und der Verbindungsebene der drei anderen in der Ebene von K Pol und Polare sind, oder, dass das Fünfeck ein Polfünfeck (Beys) in Bezug auf jede Fläche Φ , dove Φ indica la conica K come superficie di 2^o classe degenera. — Pare però che questo teorema sia dovuto a Sicquet (Bulletin de la société mathématique IV, pag. 128) »

AP 78

AP 72

122 Veronese - Sopra alcune notevoli configurazioni di punti,

rette e piani, di coniche e superficie di 2^o grado e di altre curve e superficie
(Atti dell' Acc. Lincei serie 3: vol. 9, 1880-81 pag. 268-343)

Ulla fine della memoria 2^o (pag. 340) considera la trasformazione:
 $\mu x_i^2 = x'_i$, caso particolare di quellata del Reye, ma che pure trascurre da questo. Riumane in un teorema LXXIX (pag. 341) le proposizioni riguardanti la corrispondenza tra rette, piani e punti dell' uno spazio e gli elementi corrispondenti dell' altro. Ma non ne fa applicazioni che al fascio di superficie di 4^o ordine contenente 16 rette e dotato di 12 punti doppi

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda+1)(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0,$$

fascio che sarà rappresentato da un fascio di com' quadri aventi comuni il vertice e passanti per vertici del tetraedro fondamentale.

Dato un tetraedro di riferimento A, due quaterni B, C di punti formanti un gruppo simmetrico rispetto ad A formano due tetraedri B, C omologhi in 4 maniere diverse sui vertici e le facce opposte di A per centri e piani di omologia. La relazione dei 3 tetraedri A, B, C è scambievole. I loro vertici sono 3 a 3 su 16 rette h passanti a 4 a 4 per 12 vertici. Correlativamente le facce passano 3 a 3 per 16 rette h'. Il gruppo A, B, C si chiama terna di tetraedri facciali (desmiques di Stephanos Kyparissos - Bulletin di Darboux, 1880): i vertici di uno qualunque di essi hanno le facce opposte per piani polari rispetto ad un altro (piano polare del punto (111) essendo il piano (111))

APP 79

Veronese - Sopra alcune notevoli configurazioni ecc.

Piano di superficie di 4^o ordine con 12 punti doppi:

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \lambda(x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) - (\lambda+1)(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) = 0.$$

Nel piano partono i tre tetraedri (i cui vertici formano i punti doppi)

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_3 - x_4) = 0$$

$$(x_1 - x_3)(x_1 + x_3)(x_4 - x_2)(x_4 + x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_4)(x_1 + x_4)(x_2 - x_3)(x_2 + x_3) = 0$$

Nel piano le 3 superficie 4^o armoniche dopo questo 3 sono notevoli.

Ripetuta l'eqnz. del piano ad uno di quei 3 tetraedri essa diventa

$$\sum x_i^4 - 2 \sum x_i^2 x_k^2 + (2k + \lambda)x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

e la supers. notevole coniugata a questo tetraedro, è:

$$\sum x_i^4 - 2 \sum x_i^2 x_k^2 = 0.$$

La base del piano si compone di 16 rette.

de 3 coppie costituite da un tetraedro e dalla sua superficie coniugata, formando un'involtura, i cui elementi doppi sono 2 superficie notevoli.

$$x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) + \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) = 0$$

che contengono altre 8 rette.

I 18 spigoli di A, B, C s'incontrano tre a tre in 12 punti $P_{ik} P'_{ik}$ situati 3 a 3 in 12 piani $\Pi_{ik} \Pi'_{ik}$ che formano la figura corrispondente a quella di $P_{ik} P'_{ik}$. Si possono separare quei 12 punti in tre tetraedri

$$P_{12} P'_{12} P_{34} P'_{34}, \quad P_{13} P'_{13} P_{24} P'_{24}, \quad P_{14} P'_{14} P_{23} P'_{23}$$

le cui facce sono risp.

$$\Pi_{12} \Pi'_{12} \Pi_{34} \Pi'_{34}, \quad \Pi_{13} \Pi'_{13} \Pi_{24} \Pi'_{24}, \quad \Pi_{14} \Pi'_{14} \Pi_{23} \Pi'_{23}$$

Questi 3 tetraedri formano una 2^a terna, congiunta alla prima, di tetraedri fasciali. Essi hanno gli stessi spigoli della 1^a terna, e le 4 rette che ne congiungono a tre a tre i vertici sono le h' , mentre le loro facce s'incontrano a tre a tre nelle 16 rette h . Queste due terne di tetraedri formano una sextupla fondamentale. — Se A è il tetraedro di riferimento e le coordinate dei vertici di B, C sono (111) $(11-1)$ (-111) $(-1-1)$ e (-111) $(1-11)$ (111) , le facce degli altri 3 tetraedri sono $x_i \pm x_k = 0$.

I 18 spigoli della sextupla fondamentale formano 9 coppie uguali: scelta una di esse si determinano i due punti (immaginari) doppi per l'involtura delle due coppie di vertici p.e. $A, A_2, P_{12} P'_{12}$ che si trovano sull'uno e delle due $A_3 A_4, P_{34} P'_{34}$ che si trovano sull'altro. Si avranno così 4 punti, vertici di un tetraedro; ~~che sono~~ in tutto 9 tetraedri che colta sextupla danno i 15 tetraedri della configurazione di Klein. Questa dà luogo a 10 diverse sextuple fondamentali, corrispondenti alle 10 quadriche fondamentali, le quali nelle nostre ipotesi hanno per equazioni

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + x_3 x_4 &= 0 & x_1 x_2 - x_3 x_4 &= 0 \\ x_1 x_3 + x_2 x_4 &= 0 & x_1 x_3 - x_2 x_4 &= 0 \\ x_1 x_4 + x_2 x_3 &= 0 & x_1 x_4 - x_2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

123 C. Stephanos. Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres.

(Bulletin des sciences mathématiques de Darboux, 2^e série, t. III, 1879, 1^e partie
pag. 424-56)

Lei tetraedri A, B, C i quali, considerati come superficie di 4^o ordine, formano un fascio, diconsi formare un sistema desmico (da δέσμη, fascio). Due qualunque di essi godono della proprietà caratteristica che ogni spigolo dell'uno incontra due spigoli opposti dell'altro, o più precisamente che ogni coppia di spigoli opposti dell'uno incontri una coppia di spigoli opposti dell'altro. — Gli stessi 18 spigoli sono spigoli per altro tre tetraedri a, b, c formanti un sistema desmico ed aventi con ciascuno dei primi tetraedri una coppia di spigoli opposti comuni; tali due sistemi desmici sono in posizione reciproca e diconsi coniugati. — Un sistema desmico è reciproco di se stesso; due di tre tetraedri sono in omologia armonica con uno qualunque dei vertici del terzo e le facce opposte come centro e piano d'omologia. — Dato l'un tetraedro A e un vertice di B, questo secondo tetraedro è individuato: la sua faccia opposta ad un vertice è il piano polare di questo rispetto alla superficie di 4^o ordine A. — Il tetraedro B corrisponde a se stesso nell'omologia sghemta (gerhardt) involutoria avente due spigoli opposti di A per assi. (*) — Di

(*) La memoria dello Stephanos è sintetica. Ma tutti i suoi risultati si riassumono in questi che riferendosi al tetraedro A come fondamentale i vertici di B e C costituiscono le due quaterne di un'ottupla simmetrica rispetto ad A.

AP80

sono ancora altre proprietà relative ad un solo sistema desmico, ad a due sistemi desmici coniugati, che tralascio per brevità.

Nel capitolo ^{ultimo} "Formation et propriétés d'un système remarquable de quinze tétraèdres" (pag. 443 - 56) partendo da due sistemi desmici coniugati giunge ai 15 tétraèdri fondamentali del sistema di 6 complessi lineari involutori e studia essa' da un nuovo punto di vista la configurazione di Klein.

I 15 tétraèdri formano 20 terne desmiche e 10 coppie di sistemi desmici coniugati. Ogni tétraèdre appartiene a 4 sistemi desmici. Due tétraèdri aventi comune una coppia di spigoli opposti appartengono in due modi diversi a due sistemi desmici coniugati. Le 10 coppie di sistemi desmici coniugati corrispondono alle 10 quadrche fondamentali.

I 60 vertici dei tétraèdri stanno a 3 a 3 su 320 rette \mathcal{R} per cui passano pure a 3 a 3 le 60 facce. I 3 tétraèdri i cui vertici stanno su una retta appartengono a un sistema desmico, il cui coniugato è dato dai 3 tétraèdri le cui facce si tigliano in quella retta. — I 60 vertici stanno pure a 2 a 2 su 360 rette \mathcal{R} in cui si tigliano a due a due le 60 facce. Per un vertice passano 12 rette \mathcal{R} poste 3 a 3 in 16 piani N , e 16 rette \mathcal{R} poste a due a due in 48 piani Q di cui ciascuno contiene pure una retta \mathcal{R} passante pel vertice considerato. I 60 vertici stanno a 4 a 4 su 960 piani N e a 6 a 6 su 480 piani Q : su ogni piano N stanno una

1 retta L e tre rette H , mentre su ogni piano Q stanno 4 rette L formanti un quadrilatero completo le cui tre diagonali sono rette H .

ge

p

n

to

di

:

)

3

pmc

:

L

retta

960

m

AP81

124. Il sistema di due quadriche.

(V. Lüroth. Ueber Polarkörper und die Schmittkurve zweier Punkten zweiter Ordnung. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd XIII (1868) pag. 466)

Siano le 2 quadriche $A = \sum a_{ik} x_i x_k = a(x x)$, $B = \sum b_{ik} x_i x_k = b(x x)$. Si formi il discriminante $H(\lambda)$ della quadrica $A + \lambda B$. e sia:

$$H(\lambda) = \Theta_0 + \Theta_1 \lambda + \binom{n}{2} \Theta_2 \lambda^2 + \dots + \binom{n}{i} \Theta_i \lambda^i + \dots + \Theta_n \lambda^n$$

dove Θ_0 e Θ_n sono i discriminanti di A e B . Tutti gli invarianti del sistema delle 2 quadriche si potranno per tot. di Kleinertius egualare mediante i Θ che sono così stessi invarianti simultanei. Consideriamo anzitutto il significato geometrico. Sia $x^{(1)} \dots x^{(n)}$ una nuple di punti coniugati rispetto ad A e non posti sullo stesso piano, il che si può sempre avere, anche se A è specializzata. Sarà, nella notazione del Lüroth:

$$a(x^{(1)} x^{(2)}) = \sigma \binom{n}{2}$$

e $D = \sum x'_1 \dots x'_n$ non sarà nullo. Avremo:

$$\begin{aligned} D^2 H &= \left| \begin{array}{cc} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{nn} + \lambda b_{nn} & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x'_1 \cdot x'_n \\ \vdots \\ x'_n \cdot x'_1 \end{array} \right| = \frac{\partial A(x^{(1)})}{\partial x'_1} = \\ &= \left| \begin{array}{cc} A'_1 + \lambda B'_1 & A'_n + \lambda B'_n \\ \vdots & \vdots \\ A'_n + \lambda B'_n & A'_1 + \lambda B'_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} x'_1 \cdot x'_n \\ \vdots \\ x'_n \cdot x'_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a(x'x') + \lambda b(x'x'), & \lambda b(x'x'), & \lambda b(x'x') \\ \lambda b(x''x') & a(x''x') + \lambda b(x''x'), & \lambda b(x''x') \\ \lambda b(x''x') & \lambda b(x''x'') & a(x''x'') \end{array} \right| \\ &= D^2 \Theta_0 + D^2 \binom{n}{2} \Theta_1 \lambda + \dots + D^2 \binom{n}{i} \Theta_i \lambda^i + \dots + D^2 \Theta_n \lambda^n \end{aligned}$$

Introducendo, col d'Inzioth, la notazione:

$$\begin{vmatrix} b(xx) & : & b(xy) \\ b(yx) & : & b(yy) \end{vmatrix} = B(x..y)$$

quell'identità ci darà immediatamente:

$$\Theta_0 D^2 = a(x'x').a(x''x'') \dots a(x''x'')$$

$$n\Theta_1 D^2 = a(x'x') \dots a(x''x'') \left\{ \frac{b(x'x')}{a(x'x')} + \frac{b(x''x'')}{a(x''x'')} + \dots + \frac{b(x''x'')}{a(x''x'')} \right\}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\Theta_2 D^2 = a(x'x') \dots a(x''x'') \left\{ \frac{B(x'x'')}{a(x'x')a(x''x'')} + \dots + \frac{B(x''x'')}{a(x''x'')a(x''x'')} \right\}$$

$$(n)\Theta_i D^2 = \sum a(x^{i+1}x^{i+1}) a(x^{i+2}x^{i+2}) \dots a(x^n x^n) B(x'x'' \dots x^{i'})$$

(nella qual somma si devono prendere tutte le combinazioni i esime di 1...n)

$$n\Theta_{n-1} D^2 = a(x'x') B(x''x''' \dots x^n) + a(x''x'') B(x'x''' \dots x^n) + \dots$$

$$\Theta_n D^2 = B(x'x'' \dots x^n)$$

Se l'annullarsi di $B(x..y)$ significa (V. pag. 20 bis) che il sistema lineare di punti $x..y$ è tangente alla quadrica B . Dunque:

L'annullarsi dell'invariante simultaneo Θ_i è la condizione necessaria e sufficiente affinché dato un sistema di n punti comuni rispetto alle quadriche A e B non posti ⁿ_{ne} ⁿ_{ne} sullo stesso piano, ove tutti meno uno dei sistemi i upli ($i=1$ volte inf.) di punti determinati da i qualsiasi di quegli n punti siano tangenti alla quadrica B , le siano formate tangentie il sistema i upli costituito. (V. una pagina dopo)

Già premesso è facile vedere a che cosa corrisponda una radice multipla dell'equazione $H(\lambda) = 0$. Indichiamo con $\Theta_i(A + \mu B, B)$ l'invariante simultaneo Θ_i formato per le 2 quadriche $A + \mu B$ e B , ed esprimiamolo mediante le Θ di $A + B$. Per definizione si ha:

$$H(\lambda) = \sum_i \binom{n}{i} \Theta_i(A, B) \lambda^i$$

essendo $H(\lambda)$ il discriminante di $A + \lambda B$. Il discriminante di $A + \mu B + \lambda B$ sarà dunque $H(\mu + \lambda)$: e per quella formula sarà analogamente:

$$H(\lambda + \mu) = \sum_i \binom{n}{i} \Theta_i(A + \mu B, B) \lambda^i$$

(per la formula di Taylor) $= \sum_i \frac{d^i H(n)}{d\mu^i} \lambda^i$

Essendo così rispetto a λ , un'identità ne segue:

$$\begin{aligned} \Theta_i(A + \mu B, B) &= \frac{1}{n(n-1)\dots(n-i+1)} \frac{d^i H(n)}{d\mu^i} \\ &= \sum_{k=i}^{n-i} \binom{n-i}{k-i} \Theta_k(A, B) \mu^{k-i} \end{aligned}$$

Adunque $\Theta_i(A + \mu B, B)$ s'annulla colla derivata i-ima di $H(\mu)$ e quindi: Se una radice μ dell'equazione $H(\mu) = 0$ è i uguale, le corrisponde una quadrica $A + \mu B$ specializzata del fascio AB tale che i primi invarianti Θ fino a Θ_{i-1} formati da essa o da una quadrica qualunque B del fascio stesso s'annullano tutti; e viceversa l'annullarsi di tutti questi invarianti ha per conseguenza l'essere $A + \mu B$ una quadrica tale che μ corrisponde ad una radice i uguale dell'equazione $H(\mu) = 0$.

Il significato geometrico dell'annullarsi dell'invriante Θ_i dato precedentemente si può generalizzare, generalizzando la data dimostrazione. Moltiplichiamo il determinante $H = |a_{ik} + \lambda b_{ik}|$ per due determinanti $X = |x_k^{(r)}|$, $Y = |y_k^{(s)}|$. Avremo $HYX = |a(x^{(r)}, y^{(s)}) + \lambda b(x^{(r)}, y^{(s)})|$. E se supponiamo che le due nuple di punti x ed y , non posti ne' l'una né l'altra su un piano, siano polari l'una dell'altra rispetto alla quadrica A , sicché $a(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0$ per $r \geq s$, allora addendo e sottrattando e confrontando le potenze simili di λ :

(*) $\Theta_i XY = \sum B[(x^i..x^i)(y^i..y^i)] a(x^{i+1}..y^{i+1})..a(x^n..y^n)$ -
- anche l'annullarsi di Θ_i significa che ore tutta meno una B si annullino, anche quell'uno si annulli. Ora $B[(x^i..x^i)(y^i..y^i)] = 0$
- significa che i 2 sistemi linearì $x^i..x^i$ e $y^i..y^i$ di punti sono coniugati rispetto alla quadrica B , in un senso che va precisato. Si ha quindi un'interpretazione più generale dell'annullarsi di Θ_i . Per esempio:
- l'annullarsi di Θ_i è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di coppie di nuple di punti polari l'una dell'altra rispetto ad A e avendo i punti corrispondenti coniugati rispetto ad B .

185.

Loria - Sulla formula del binomio (lettera 28 Ottobre 1883)

Tongari :

$$1+y = x$$

Allora dalla formula del binomio applicata successivamente si avrà:

$$y^0 - 1 = 0$$

$$y^0 + y - x = 0$$

$$y^0 + {}^2y + y^2 - x^2 = 0$$

$$y^0 + {}^3y + {}^3y^2 + y^3 - x^3 = 0$$

$$y^0 + (n-1)y + {}^{(n-1)}_2 y^2 + \dots + (n-1)y^{n-2} + y^{n-1} - x^{n-1} = 0$$

$$y^0 + ny + {}^n_2 y^2 + \dots + {}^n_2 y^{n-2} + ny^{n-1} - x^n + y^n = 0$$

cive' $n+1$ equazioni da cui eliminando y^0, y, \dots, y^{n-1} e ponendo per y^n il suo valore si ha:

$$(x-1)^n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (n-1) & {}^{(n-1)}_2 & {}^{(n-1)}_3 & \cdots & (n-1) & 1 & x^{n-1} \\ 1 & n & {}^n_2 & {}^n_3 & \cdots & {}^n_2 & n & x^n \end{vmatrix}$$

che è la formula del binomio sotto forma di determinante, trovata prima in altro modo da Pincherle.

AP 82

AL 232

~~126~~ D. Franklin. - On Newton's Method of Approximation
 (American J., IV pag. 275-6)

Lia l'equazione $f(x) = 0$ di cui una radice ^{unica compresa tra a e b attiva per} approssimata sia a , e dopo una nuova approssimazione sia $a_1 = a + k$ dove $k = -\frac{f(a)}{f'(a)}$ è la correzione Newtoniana. Lia $a+k$ la vera radice, sicché:

$$0 = f(a+k) = f(a) + kf'(a) + \frac{1}{2}k^2f''(a+\theta k)$$

$$k = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{1}{2}k^2 \frac{f''(a+\theta k)}{f'(a)}$$

Dunque k ha lo stesso segno di h ed è minore in valor assoluto che h poiché $f''(a+\theta k)$ abbia lo stesso segno che $f(a)$. Ecio' il valor corretto a_1 sarà più prossimo alla radice che a e dalla stessa parte della radice che a , poiché $f''(x)$ abbia nell'intervalle in questione il segno di $f(a)$; e siccome se questa condizione è soddisfatta, $f(a) < f(a_1)$ hanno lo stesso segno, la stessa condizione sarà soddisfatta per a_1 . Dunque: « E nell'intervalle considerato $f''(x)$ non cambia segno, si sarà sicuri di approssimarsi indefinitamente alla radice col metodo di Newton, cominciando ad applicare questo a quella tra le due quantità a, b (limiti dell'intervalle) per la quale f ha lo stesso segno che f'' . » — Questo criterio è dovuto a Ponier, che però dicono $f'(x)$ ne $f''(x)$ cambiano segno, mentre la prima condizione è superflua. Si può darne un'interpretazione geometrica.

L'errore dopo la prima correzione sarà $-\frac{1}{2}k^2 \frac{f''(a+\theta k)}{f'(a)}$, cioè non sorpassa in valor assoluto il prodotto $-\frac{1}{2}h^2 \cdot \frac{F''}{f'(a)}$ essendo F'' il massimo valor numerico di $f''(x)$ tra $x=a$ ed $x=b$. — Serret (Alg. sup. II, pag. 346-347) dà un criterio per l'errore, meno accurato.

AP84

~~10.~~ Karl Rohn (in Leipzig). - Ein Beitrag zur Theorie der
biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte (Math. Ann. XXII, pag 124-144)

« Die biplanare Knotenpunkte bilden zwei gänzlich verschiedene Typen (»biplanare Knotenpunkte von geradem Typus und solche von ungeradem Typus«), je nachdem sie die Klasse der betr. Fläche um eine gerade oder ungerade Zahl erniedrigen; im ersten Fall wird die Fläche aus einem beliebigen Punkte des Raumes durch einen Kegel mit Selbstberührung, im zweiten Falle durch einen Kegel mit Rückkehrkante projiziert. Bezeichnen wir die Klasseerniedrigung beide Male mit x , so ist der biplanare Knotenpunkt B_x im ersten Falle durch Zusammenrücken von $\frac{x}{2}$ gewöhnlichen Knotenpunkten entstanden, im zweiten Falle dagegen durch Zusammenrücken von einem B_3 mit $\frac{x-3}{2}$ gewöhnlichen Knotenpunkten. Demgemäß ist die Selbstberührung des Projektionskegels der Art, dass beide Mäntel $\frac{x-2}{2}$ consecutive Eingangskanten gemein haben, und die Rückkehrkante der Art, dass $\frac{x-1}{2}$ Eingangskanten beiden Mantel gemeinsam sind. » (pag. 127, 8)

Dalla considerazione di un punto comico' giunge poi, quanto alla forma delle superficie altra seguente conclusione (v. le figure disegnate a pag. 129, 130):

« In der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes von ungeradem Typus existiert nur ein einziger Flächentheil, der aber stets reell ist. Derselbe hat die Form eines Dornes, wenn die singulären Ebenen conjugat imaginär sind; dagegen wird bei reellen singulären Ebenen die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Knotenpunktes

annähernd durch das Ebenenpaar wiedergegeben, wenn man zuvor die beiden Abschnitte der singulären Geraden in entgegengesetztem Sinne auflöst. In der Umgebung eines biplanaren Knotenpunktes von geradem Typus ist die Fläche entweder ganz imaginär — der Knotenpunkt ist alsdann ein isolierter — oder sie besteht aus zwei sich gegenüberstehenden Flächenteilen. Dieselben haben die Gestalt von Dornen, wenn die singulären Ebenen conjugirt imaginär sind; im andern Falle erhält man annähernd die Gestalt der beiden Flächenteile aus dem Ebenenpaar durch Auflösen der beiden Abschnitte der singulären Geraden in gleichem Sinne.” (pag. 130)

“Die Schnittkurven in den singulären Ebenen eines biplanaren Knotenpunktes B_x sind im Allgemeinen Kurven mit einem dreifachen Punkt, dessen eine Tangente die singuläre Gerade ist; weitere Besonderheiten brauchen dabei nicht aufzutreten.” (pag. 133). — Die Klasserniedrigung des Knotenpunktes hat demnach keinen Einfluss auf die Kurven in den singulären Ebenen. — “Besitzt eine der beiden Kurven in den singulären Ebenen einen δ -fachen Punkt, so reduziert der betr. Knotenpunkt die Klasse (der flächen) mindestens um Δ Einheiten.” (pag. 134).

Passando poi ai punti uniplanari” (pag. 134 e seg.) considera la curva di contatto con ciascun cono circoscritto alla superficie: questi cono ha delle generatrici multiple passante per punto uniplanare la stessa diminuzione di classe che la superficie da questo punto. Se l’equazione della superficie è (punto unipla-

nare l'origine e piano singolare $z=0$) :

$$f = z^2 + A + Bz + (cz^2 + Dz^3 + \dots) = 0,$$

essendo $A = (xy)^x + (xy)^{x+1} + \dots$, $B = [xy]^\lambda + [xy]^{\lambda+1} + \dots$,

dove $(xy)^x, \dots$ indicano funzioni omogenee dei gradi x, \dots in x, y , allora bisogna distinguere 3 casi : 1^o se $x < 2\lambda$ la generatrice suddetta del cono è x upla ed ha per piani tangentî piani passanti per le x tangentî nel punto x uplo all'intersezione della superficie col piano singolare ($(xy)^x = 0$). 2^o se $2\lambda < x$ quella generatrice è 2λ upla e i suoi piani tangentî coincidono a due a due in λ piani. 3^o se $2\lambda = x$ la generatrice è x upla, ma non ha più i piani tangentî sulla proprietà del 1^o caso. (pag. 136). — Ritorna poi nei casi generali (pag 142-4), ma prima si fermano a considerare il caso particolare in cui non manchino termini di 3^o grado, sicché l'equazione sia della forma

$$f = z^2 + \{(xy)^3 + (xy)^4 + \dots\} + z \{[xy]^2 + [xy]^3 + \dots\} + z^2 \{.. \} = 0.$$

Allora nel piano singolare passano per nodo tre rami distinti, con diverse tangenti; e lo stesso accade per la curva di contatto della superficie con un cono circoscritto qualunque. Le poi due tangenti alla sezione del piano singolare coincidono, questa curva avrà pure nel nodo un punto di regresso per cui passa un ramo semplice: in un caso più particolare però la curva ha in quel punto 3 rami distinti di cui due si toccano. Infine se le tre tangenti ($(xy)^3 = 0$) coincidono la curva consta di

un solo ramo (triplo?) e l'abbassamento della classe è 8: in un caso più particolare vi è una cuspide per cui passa un ramo semplice avente in essa la stessa tangente e l'abbassamento della classe è 9. (pag 137-8) ; e così considera altri casi sempre più particolari.

~~128.~~ Cremona. Sulle superficie gobbe di quarto grado
(Memorie Acc. di Bologna. Tomo VIII, ser. 2^a, 1868, pag. 235-250)

Riassunto (pag. 250) (R, R' , S rette, H conica, K cono, Γ cubica gobba e Σ sviluppabile di 3^a classe)
Classificazione delle superficie gobbe di 4° grado

Genere 0	Curva doppia (ordine = 3)	Sviluppabile bitangente (classe = 3)
Specie 1 ^a	Γ	Σ
" 2 ^a	$H+R$	$K+R$
" 3 ^a	R^3	$K+R$
" 4 ^a	$H+R$	R^3
" 5 ^a	$R+R'+S$	$R+R'+S$
" 6 ^a	R^2+S	R^2+S
" 7 ^a	Γ	R^3
" 8 ^a	R^3	Σ
" 9 ^a	R^3	$R^{1,3}$
" 10 ^a	R^3	R^3
Genere 1	Curva doppia (ordine = 2)	
Specie 11 ^a	$R+R'$	$R+R'$
" 12 ^a	R^2	R^2

AP 85

AP85

~~186~~ Superficie di 4^o ordine e 3^a classe ⁽¹⁾

XVI. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w} = 0$. Superficie di Steiner

XVII. ⁽²⁾ $16z^2w^2 + (8y^2 - 36xy + 27x^2)zw + y^3(y - x) = 0$. Vi è una conica cuspidale $y^2 - 12zw = 0$, $gx - 8y = 0$; il punto $y = z = w = 0$ è un nodo biplano e il piano $x = 0$ tocca la superficie lungo una conica, mentre i piani $w = 0$, $z = 0$ tagliano su $y = 0$ (contata 3 volte) e un'altra retta. È la $[(11) 3]$ ^{conica cuspidale} (v. mio lavoro n° 87)

XVIII. ⁽³⁾ $(y^2 + 4wx + 4wz)^2 - 64w^2xz = 0$. Il piano $w = 0$ taglia in $w = y = 0$ 4 volte. I piani $x = 0$, $z = 0$ toccano lungo coniche. La retta $y = 0$, $w = 0$ è trisodale (cioè conta come due rette doppie), e la $y = 0$, $x - z = 0$ è semplicemente nodale.

XIX. ⁽⁴⁾ $64z^2w^3 + (y^2 + 4xw)^2 = 0$. Il piano $w = 0$ taglia in $w = y = 0$ 4 volte. Il piano $z = x$ tocca lungo una conica. La retta $w = y = z = 0$ è osnodale (tridoppia)

XX. ⁽⁵⁾ $27(z^2 + 4xw)^2 - 64w^3y = 0$. Il piano $w = 0$ taglia in $w = z = 0$ 4 volte. Vi è una conica cuspidale $y = 0$, $z^2 + 4xw = 0$. Il punto $y = z = w = 0$ è insieme biplano e svoltò point. clos. È la $[(41)]$ a coda cuspidale (n° 112 del mio lavoro)

(1) Bayley. A memoir on Cubic Surfaces. — Phil. Trans. 1869 (vol. 159, pag. 231 - 326). — I numeri si riferiscono alle sgn. reciproche di Schläfli.

(2) loc. cit. pag. 316. (3) pag. 319. (4) pag. 319. (5) pag. 320

130. H. Durrande. Sur les surfaces du quatrième ordre
(Comptes-rendus, 1870, 1^{re} sem., vol. 70, pag. 920-2)

Considera le superficie di 4^e ordine generabili con fasci proiettivi di quadriche e ne nota poche proprietà che seguono da questa generazione. Accenna qualche caso particolare tra cui un ultimo il caso di due fasci proiettivi di sfere, il quale dà le anallagmatiche di Montard e Dartoux.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris

131. Laguerre. Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques (tome V, 1868, Janvier 1868) (pag. 17-21)

Di risultati di Montard sulle ciclidi aggiunge che le intersezioni delle sfere direttrici delle quadriche differenti sono le 5 focali ordinarie della ciclide: ciascuna di esse determina le altre. La ciclide ha poi 3 coniche focali singolari le quali sono le 3 coniche focali comuni alle 5 quadriche differenti. Mostra poi anche come date una sfera direttrice e la sua quadrica deferente si costruiscano le altre 4 sfere direttrici e le loro quadriche differenti.

132. Laguerre. Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques (tome V, mars 1868) (pag. 48-52)

M'importa specialmente osservare come il Laguerre considerati i 2 sistemi di cerchi della ciclide appartenenti ad uno stesso modo di generazione ed osservato che due cerchi si tagliano in due punti o non si tagliano, secondo che sono di diverso o dello stesso sistema (pag. 50) aggiunge che questi due sistemi di cerchi godono di un gran numero di proprietà analoghe a quelle delle generatrici delle quadriche, e si limita a citare questi (pag. 51): « Etant donné quatre cercles quelconques d'un même groupe et un cercle variable C d'un autre groupe rencontrant les quatre cercles fixes aux points a, b, c, d à l'on mène par le cercle variable C les sphères qui touchent la surface aux points a, b, c et d, le rapport anharmonique de ces quatre sphères est constant ».

Nei "Comptes rendus" (séance 1^{re} febbraio 1864) in una nota presentata da Serret il Darboux ("Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales", pag. 240-2) studia oltre al sistema triplo ortogonale generale un sistema triplo ortogonale particolare costituito da cicli omofocali, ma cicli a tre piani di simmetria (ne noti solo 3 fuochi: quelle piane), e trova solo 8 rette in esse). Subito dopo vi c'è una nota presentata da O. Bonnet in cui il Montard ("Lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre" pag. 243-4) osserva che "un insieme di superficie analitematiche del quarto ordine forma un sistema triplicemente ortogonale".

Il Darboux era allora studente alla scuola normale. Negli "Annales de l'Éc. normale supér." vol. 2, 1865 pubblicò poi una memoria "Recherches sur les surfaces orthogonales" (pag. 55 - 69) in cui dimostrò che le superficie di un sistema triplo ortogonale qualunque sono omofocali passa al sistema omofocale di cicli a tre piani di simmetria. Vi trova le 16 rette (credo per la prima volta), ecc..

AP 88

AP 88

134

Montard. — Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.

(Nouvelles Annales, 2^e sé. t. 3, 1864. pag 306-9)

— Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

(ibid. pag. 536-9)

Nella prima nota, egli stende le proprietà della trasformazione, propone il nome di anallagmatiche (dal greco, «che non mutano») per quelle superfici che non mutano per una tal trasformazione: chiama polo principale e sfera principale per la superficie il polo e la sfera d'inversione. Una tal superficie sarà l'inviluppo delle sfere ortogonali alla sfera principale col aventi i centri su una superficie direttrice fissa. — Enuncia poi tutte le principali proprietà delle anallagmatiche di 3^o e 4^o ordine: le 5 sfere principali, i 5 coni bitangenti, le 5 quartiche focali d'intersezione delle sfere colle quadriche direttive, le quali quadriche nota essere omofocali; e via dicendo. Osserva anche potersi dedurre da queste le proprietà delle superficie cubiche e quartiche con conica doppiata qualunque.

Nella seconda nota poi dà tutte le proprietà di un sistema generale di anallagmatiche di 4^o ordine omofocali, e dà il teorema che ogni tel' superficie è luogo dei punti per cui il rapporto del prodotto delle potenze rispetto a due sfere fisse al prodotto delle potenze rispetto ad altre due sfere fisse è costante; e casi particolari.

I lavori successivi di Laguerre e Darboux si basano poi su questi

AP89

AP89

135 | Kummer. — Ueber die Flächen vierten Grades mit
sechzehn singulären Punkten. (Monatsh. 1864, 18 April, pag. 246)

Presenta un modello della particolare superficie di Kummer (*)

$$[p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 4(pr + ps + qr + qs) - 8pqrs]^2 = 0$$

e ne descrive la forma senza però notarne le particolarità proiettive (253-4).
 "Durch jede gegebene ebene Kurve vierten Grades kann man sechs ver-
 schiedene vierfach unendliche Scharen von Flächen vierten Grades mit 16
 "singulären Punkten hindurchlegen." (pag. 256)

Dice che le superficie di diverse serie hanno i 16 punti singolari
 taglienti il piano, per ciascuna in 16 delle 28 tangenti doppie della curva
 di 4° ordine, e tra tutti 96 tutte quelle tangenti doppie; e precisamente
 le tangenti doppie vengono tagliate 6 volte, altre 6 due volte, e le
 rimanenti 16 tre volte. Ero' a puo' dubitare di queste ultime affermazioni,
 che lo conducono al risultato che le tangenti doppie di una sua super-
 ficie formano le congruenze quadratiche ed una congruenza di 4° grado.
 Solo più tardi nella breve nota « Ueber die Stahlensysteme, deren
 "Brennflächen" Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten sind,
 (stesso volume, pag. 495-9) mostrò che anche quella congruenza si
 divide in due quadratiche.

(*) Essa è triplicemente tetraedroide, come ben vide Klein.

136 Kummer. - Ueber einige besondere Arten von Flächen

vierten Grades (Monatsberichte, Juni 1872, pag. 474-83)

(pag 477) " ... die Strahlen aller (Strahlensysteme 2^{er} Ordnung und Klasse 4)
" lassen sich in Scharen zusammenfassen welche nur je eine Schaar der graden
" Linien eines Hyperboloids ausmachen. Die Strahlen des Strahlensystems 2ter
" Ordnung und 3ter Klasse aber lassen sich überhaupt nicht in Scharen von
" graden Linien von Hyperboloiden zusammenfassen, sowie auch die Brennfläche
" dieses Strahlensystems die einzige ist, welche nicht als Einfüllende einer Schaar
" von Flächen 2ter Grades dargestellt werden kann. "

AP 91

AP 91

Kummer. Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen. (Monatsh. der k. Ak. 1863 pag. 324 - 336)

1. Superficie da cui' serie di piani non tangenti tagliano coniche. « Tutte le superfici di 4° grado con conica doppia e due punti la cui' congiungente non taglia quella conica sono tagliate in coppie di coniche dai piani passanti per i due punti doppi. » L'equazione generale di una superficie di 4° grado a conica doppia è $\phi^2 = 4p^2qr$, e di questo particolare è $\phi^2 = 4p^2qr$: in due piani $q=0, r=0$ la toccano lungo due coniche. — In particolare se vi sono due tali coppie di punti doppi, l'equazione si può scrivere $(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2qr$ ossia $p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0$; i 4 piani $q, r, s, t = 0$ sono tangenti lungo coniche, le 4 rette congiungenti le 2 coppie di punti doppi appartengono alla superficie. Questo comprende la ciclide di Dupin la cui' equazione si può scrivere $b^2 = \sqrt{(ax - ck)^2 + b^2y^2} + \sqrt{(ex - ak)^2 + b^2z^2}$.

— Appartengono pure alla stessa categoria di superficie quelle dotate di una retta doppia: tutti i piani passanti per questa tagliano ancora in coniche; l'equazione di una tale superficie è $p^2\phi + 2pq\phi_1 + q^2\phi_2 = 0$. — Infine vi sono « le superficie di 4° grado che toccano se stesse in due punti: tutti i piani passanti per entrambi questi punti (« Selbstberührungs punkte ») tagliano la superficie in due coniche toccantisi nei punti stessi ». Quattro di questi piani toccano lungo coniche; l'equazione della superficie è $\phi^2 = (a, b, c, d, e)(p, q)^4$ ed il 2° membro uguagliato a 0 a' di quei 4 piani singolari. Se questa forma ha due fattori lineari coincidenti, cioè se coincidono due di quei piani, la superficie acquista una conica doppia (in questo piano).

2. Superficie di 4° grado da cui serie di piani semplicemente tangenti taglano coniche. — Oltre alle superficie rigate di certe specie vi sono le superficie di Steiner con 3 rette doppie taglianti in un punto triplo ed aventi per equazione $Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cr^2q^2 + 2Dpqrs = 0$. Per ogni punto passa un cono di piani tangentili secanti in due coniche: questo cono è di 6° grado per un punto qualsiasi, del 4° per un punto sulla superficie, del 2° per un punto di una retta doppia. — « Le una superficie di 4° grado ha conica doppia ed un punto doppio, tutti i piani tangentili passanti per questo punto secano in copie di coniche » ed inviluppano un cono quadrico diverso dal cono tangente nel punto doppio: l'equazione è $\phi^2 = 4p^2\psi$ essendo $\psi = 0$ un cono avente il vertice sulla quadrica $\phi = 0$ (esso è appunto il cono inviluppato dai piani delle copie di coniche)

3. Superficie di 4° grado da cui serie di piani doppiamente tangenti taglano coniche. — « Le superficie di 4° grado con conica doppia sono tagliate in copie di coniche dai loro piani doppiamente tangenti » « Vi sono in generale 5 coni quadrici inviluppati dai piani doppiamente tangenti ad una tal superficie e taglienti questo secondo copie di coniche ». Per la $\phi^2 = 4p^2\psi$ quei coni hanno equazioni $\psi + \lambda\phi + \lambda^2p^2 = 0$. Se l'equazione di 5° grado in λ ha una radice doppia, in luogo della corrispondente serie di piani tangentili doppii vi sono solo due piani tangentili lungo coniche, oppure una serie di piani tangentili semplici passanti per un punto doppio. Se la superficie con una o due copie di punti doppi (v. sopra) rimangono 3, od 1 cono bitangente. In particolare per la ciclide di Dupin non vi sono solo le 2 serie di circoli che prima si conoscevano, ma ancora un'altra serie che anzi il sig'. Stad. Schwarz riconobbe esser doppia.

138. Klein - Neben einem liniengeometrischen Satz

(Gött. Nachrichten, 20 März 1872, e Math. Ann. Bd XXII pag 234-41)

Pag. 237. Sulla varietà quadratica non specializzata $P=0$ essendo date una superficie $P=0$, $\Omega=0$, proiettandola da un punto di P che non sta in essa, su uno spazio ordinario si ha una superficie d'ordine $2m$ fra m è l'ordine di Ω) avente la conica fondamentale per linee multiple. Viceversa ogni tali superficie dello spazio ordinario è la proiezione di una superficie $P=0$, $\Omega=0$ dello spazio a 4 dimensioni.

Pag. 238. Quest'ultima proposizione essa in generale di valere se $P=0$ ha determinante nulla : allora la conica fondamentale degenera in due rette ; si può però dire che se una superficie d'ordine $2m$ dello spazio ordinario ha le rette stesse per rette multiple allora essa può considerarsi come la proiezione di una superficie $P=0$, $\Omega=0$ da un punto di P .

Il teorema che è scopo della memoria è il seguente (pag. 238) : « Es sei eine allgemeine Mannigfaltigkeit (raum lineare) von n Dimensionen gegeben, wo $n \geq 4$, und aus ihr eine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung $P=0$ abgeschieden. Jede in der letzteren enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen kann durch eine zu $P=0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden, falls nicht alle aus den Coefficienten von P zusammengesetzten fünfreihigen Unterdeterminanten verschwinden. »

Forne casi particolari ne deduce che :

(pag. 240) "Congruenzen, welche einem allgemeinen linearen Complexo angehören, können als vollständiger Durchschnitt desselben mit einem anderen Complexo dargestellt werden."

(pag. 241) "Jede algebraische Fläche kann vermöge Umformung durch reciproke Radice in eine solche übergeführt werden, die durch eine Gleichung zwischen den ... (pentasferiche) Coordinaten rein dargestellt wird."

139 Klein - Lineageometrie und metrische Geometrie (Math. Ann. Bd. V
pag. 257.)

La geometria delle rette va tuttora analiticamente come la geometria su una quadrica.

(V. anche vol. IV) Ponendo in luogo delle coordinate di rette più funzioni lineari arbitrarie di esse soddisfacenti solo alla condizione di trasformare la quadrica $P=0$ in se stessa si hanno tutte le trasformazioni collineari e dualitiche (o reciproche) dello spazio di rette.

140 Klein - Ueber einen lineageometrischen Satz (Gött. Nachr. 20 März 1873)

« Sei data in uno spazio ad n dimensioni (dove $n \geq 4$) una quadrica ad $n-1$ dimensioni $P=0$. Ogni spazio algebrico ad $n-2$ dimensioni contenuto in questa si può rappresentare con un'equazione algebrica da aggiungersi a $P=0$, perché non si annullino tutti i subdeterminanti di 5° ordine formati coi coefficienti di P »

Dimostrazione anzitutto il teorema per $n=4$ facendo dei punti x della quadrica $P(x)=0$ una rappresentazione nello spazio ordinario a 3 dimensioni di punto ξ (proiezione di un punto x di P su un piano dello spazio dei punti x) mediante le formule date nel lavoro, di cui sopra si parla, del vol. V dei Math. Annali. Si estende con poche osservazioni la dimostrazione. Nota che il caso di $n=5$ dà appunto il teorema che cercava, cioè che ogni complesso algebrico di rette si può

representate con una sola equazione oltre alle $P=0$. Giusto al caso di $n=4$ si dimostra che "le congruenze algebriche appartenenti ad un complesso lineare generale si possono rappresentare come l'intersezione completa di questo con un altro complesso", cosa che non vale più per il complesso lineare speciale. Da' pure un'altra interpretazione geometrica di quel caso notando che prendendo per coordinate affini di un punto le potenze di questo rispetto a s'afere qualunque, lo spazio ordinario di punti viene rappresentato da una quadrica, non speciale, in uno spazio a 4 dimensioni e ciò dimostra: « Ogni superficie algebrica (ordinaria) si puo' trasformare nei raggi vettori in un'altro luogo sia rappresentata in quelle coordinate con una sola equazione, oltre a quella di condizione ». E' vero sarebbe più p.e. per coordinate analoghe dei punti di un piano.

161 Klein — Über einen Satz aus der Theorie des Linein-Complexus
welches dem Dupin'schen Theorem analog ist (Gött. Nachr. 8 März 1871)
gli enunciati si trovano già nei Math. Ann. e qui si trova inoltre la dimo-
strazione di quel teorema.

AP 95

AP 95

142 Bertini. — Sulle curve gobbe razionali di 5° ordine

(Collectanea Mathematica in mem. Bertini, pag. 313-326)

Da una trasformazione quadratica delle quantiche razionali in quintiche deduce che vi sono 2 specie di quintiche gobbe razionali: quelle di 1^a specie (C_1^1) hanno una sola retta quadrisecante, quelle di 2^a specie (C_2^1) hanno infinite quadrisecanti formanti due sistemi di generatrici di una quadrica in cui necessariamente una tal curva è contenuta.

La rappresentazione con un parametro h è data per le quintiche di 1^a specie da:

$$x_1 \equiv h^3(h-m), \quad x_2 \equiv h^2(h^3 - A_1 h^2 + A_2 h - A_3), \quad x_3 \equiv h^3 - B_1 h^2 + B_2 h - B_3, \quad x_4 \equiv h(h-n)$$

e per quelle di 2^a specie da:

$$x_1 \equiv h^3(h-m), \quad x_2 \equiv h^4(h-m) + A_1 h^2(h-n), \quad x_3 \equiv h^2(h-m) + B_1(h-n), \quad x_4 \equiv h(h-n)$$

L'. O. si occupa specialmente delle quintiche di 1^a specie. Su ogni punto di una tal quinta passano 3 trisecanti ed il loro luogo è una superficie di 8° ordine avente la quinta tripla e la quadrisecante per retta quadruplicata: di questi rigata razionale studia la rappresentazione piano: la rappresentazione d'ordine minimo è del 5° ordine. Ne deduce che l'ordine della curva d'ordine più basso contenuta in essa è 4 (senza ricorrere alla teoria di Clebsch né citare questo): vi sono cioè ∞^1 quantiche piane intersezioni delle rigate coi piani passanti per la quadrisecante (e non altre quantiche) e poi ∞^3 quintiche razionali di entrambe le specie. — Tutte le curve regolari d'ordine inferiore a 10 giacenti sulla superficie sono razionali.

Studia poi le coniche cinquiseccanti della quinta di 1^a specie: quelle tre esse che secano pure una data trisecante, o che passano per un dato punto, ecc. e alcune super-

fici formate da esse. Per ultimo la superficie luogo delle coniche cui queste passanti per un dato punto: superficie di 7^o ordine avente in questo punto un punto quintuplo, la quintica per curva doppia e le 6 bisecanti di questi passanti per quel punto per rette doppie. Di questa superficie studia la rappresentazione piana minima (di 6^o ordine con un punto fondamentale quadruplo e 13 semplici).

Per la quintica passa un fascio (e solo un fascio) di rigate del 3^o grado: la loro retta doppia è la quadrisecante.

163. Preye. Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und

Complexen - Gewebe. (Journal. t. 95, pag. 330 - 348)

trova tra altri risultati già contenuti nella mia tesi l'equazione di una serie omogenea di complessi quadratici in coordinate plückeriane a pag. 343.

164.

Libri lodati nel Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1881

(pag. 717). P. Auerbach. Die theoretische Hydrodynamik. Nach dem Gange der Entwicklung in der neuesten Zeit in Kürze dargestellt (Braunschweig. Vieweg u. Sohn.; circa 150 pag.). — È un'opera utile, specialmente per le notizie storiche sullo sviluppo della scienza negli ultimi trent'anni.

165 (91) P. Neumann. Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus (Leipzig, Teubner 1881). — Esposizione chiara ed elegante della teoria matematica dei principali problemi del magnetismo.

166. Schur - Ueber Strahlencomplexe zweiten Grades

(Math. Ann. XVII pag. 107 - 109)

Trovav con una via abbastanza lunga e applicando risultati della sua dissertazione inaugurale che l'equazione della serie di complessi quadratici aventi la stessa superficie singolare è rappresentabile in coordinate plückeriane con una forma a quinta (determinante); caso particolare dell'equazione da me data per coordinate qualunque. — In una nota dice che il Klein gli fece notare come quella equazione risulti da quella nota $\sum \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0$ in causa dell'invarianza.

AP 97

AP 97

167.

Thomas Weddle — Demonstration of Pascal's Hexagramme

(Cambridge and Dub. Math. J. vol. 3, 1848, pag. 285-6)

Indicando con $u=0$, $v=0$, $w=0$ le equazioni di tre lati alternati dell'esagono con fattori costanti convenienti si può supporre l'equazione della conica sotto la forma:

$$u^2 + v^2 + w^2 - (\lambda + \lambda^{-1})vw - (\mu + \mu^{-1})wu - (\nu + \nu^{-1})uv = 0$$

Allora i vertici dell'esagono saranno:

A ... $u=0$, $v=\lambda w$; B ... $u=0$, $w=\lambda v$; D ... $v=0$, $w=\mu u$

F ... $w=0$, $v=\nu u$; C ... $v=0$, $w=\mu u$; E ... $w=0$, $u=\nu v$

Brindì le equazioni degli altri tre lati DE, FA, BC sono:

$$u = \mu w + \nu v, \quad v = \lambda w + \mu u, \quad w = \lambda v + \nu u$$

e i 3 punti d'intersezione coi lati rispettivamente opposti soddisfano l'equazione

$$\frac{u}{\lambda} + \frac{v}{\mu} + \frac{w}{\nu} = 0$$

AP 98

AP 98

168 libri - Histoire des sciences mathématiques en Italie (1838)
(-1841)

Volume I

Pag. XIII. — L'expérience prouve que l'espérance d'une utilité immédiate ne porte que trop souvent les hommes à négliger la culture des sciences abstraites, qui sont si progrès cependant à conduire aux grandes applications, en perfectionnant l'instrument intellectuel qui doit les faire éclorer.

Pag. XIV. — L'argent n'est tout que dans les siècles où les hommes ne sont rien.

Volume III

Pag. 149 e 152 — Scipione Rerio da Bologna risolse nel primo in generale l'equazione di 3^o grado (che s'indicava allora con « cubi e cose uguali ai numeri ») e non senza pubblicare la sua scoperta; l'aveva però confidato ad Antonio Fioro, che se ne servì per proporre dei problemi a vari geometri, tra cui, nel 1535, a Bartaglia. Non essendo Fioro che un calcolatore, il geometra di Brescia non credette a tutta prima che egli conoscesse la soluzione dei problemi inviagli. Ma Fioro avendo aggiunto che il metodo per risolverli gli era stato comunicato 30 anni prima da un gran matematico, Bartaglia vi si applicò e ne trovò la soluzione (con un metodo a noi ignoto) (V. Bartaglia. Quæsti et inventioni diverse, libro 9^o, e Bardano. Ars magna, 1^o capitolo). La supposta di Bartaglia, che gli nascose con cura, fece rumore. Gerolamo Cardano, altro medico milanese, che s'occupava d'algebra, vi si interessò vivamente. Più volte sollecitò invano Bartaglia di comunicargli il suo metodo, finché ne ebbe dei veri in cui spiegava

AP 99

AS 33

il modo di avere una radice di ogni equazione di 3^o grado (nel 1539). Cardano ne svolse allora la dimostrazione: formò dei discepoli, tra cui Ferrari che risolse l'equazione di 4^o grado, e li esibì contro Tartaglia. Vi furono sfide e discussioni pubbliche a Milano. Malgrado le promesse di segreto, Cardano aveva inserito nella sua «Ars magna» la risoluzione delle equazioni di 3^o grado, riconoscendo l'anticità di Tartaglia.

Pag. 158. La formula del binomio nel caso di un esponente intero e positivo fu data in modo generale da Tartaglia (General trattato di numeri e monete, part II pag. 69-72, lib. II c. 1), il quale dà la regola di sommare, per avere il coefficiente di un termine in uno sviluppo, due coefficienti dello sviluppo precedente, e forma così la nota tabella dei coefficienti binomiali.

Pag. 159. Cardano considerò nell'«Ars magna» le multiplicità delle radici, le radici negative e quelle immaginarie che notò andare sempre a coppie e per le quali diede la regola per moltiplicarle. Trovò relazioni tra i coefficienti e le radici, es.

169

Schur. Ueber das System zweier Flächen 2. Grades

Math. Ann. XXI. pag. 515 - 527.

Se la 1^a generazione di una quadrica G^2 contiene 3 rette coniugate rispetto ad un'altra quadrica F^2 , allora l'insieme delle sue due generazioni contiene ∞^1 tali rette; e anche ogni generazione di F^2 contiene ∞^1 rette di rette coniugate rispetto a G^2 . — La condizione analitica è in generale:

$$\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' = 0$$

e nel caso in cui le 2 quadriche siano $\sum a_i x_i^2 = 0$, $\sum b_i x_i^2 = 0$ essa si riduce a:

$$(a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2)(a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3) + (a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2)(a_1 a_2 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4) + (a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3)(a_1 a_3 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4) = 0$$

Il complesso delle rette che tagliano armonicamente 2 quadriche ha la stessa proprietà rispetto ad ∞^1 copie di altre quadriche. Ogni quadrica di questo sistema è tagliata dalla sua corrispondente e da un'altra 2^a quadrica del sistema in curve appartenenti alla superficie singolare del complesso; a questa 2^a quadrica corrisponde di nuovo una quadrica del sistema formante con essa una coppia; quest'ultima è di nuovo tagliata da una 2^a altra in una curva della superficie singolare, ecc.. Se questo processo si chiude in modo da abbracciare in-

AP 100

AP 100

tutto il quadriche del sistema, esso si chiederà sempre (da qualunque quadrica del sistema si parla) nello stesso modo, e le generatrici di ogni quadrica del sistema contengono rette di rette coniugate rispetto alla quadrica corrispondente. Viceversa quest'ultima proprietà ha la prima per conseguenza. Ad ogni quadrica G^2 del sistema corrisponde oltre ad F^2 , tale che il dato comprende i costituenti delle rette che contengono punti di F^2 coniugati rispetto a G^2 , un'altra quadrica H^2 tale che le sue coppie di punti tangenti per le rette del complesso sono coniugate rispetto a G^2 . Ora ad H^2 corrisponde una quadrica K^2 , come a G^2 corrisponde F^2 ; e così via. Questo processo si chiude dopo ripetizione sette volte se il complesso ad il sistema di quadriche soddisfa alle condizioni indicate. Analiticamente, se il complesso considerato è $\sum A_{ik} p_{ik}^2 = 0$ (dove $A_{ik} = a_i b_k + a_k b_i$), quella condizione è espressa da:

$$(\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' \equiv -\frac{1}{4}x) \quad A_{12}^2 A_{34}^2 + A_{13}^2 A_{42}^2 + A_{14}^2 A_{23}^2 - 2A_{12} A_{34} A_{13} A_{42} - 2A_{12} A_{34} A_{14} A_{23} - 2A_{13} A_{42} A_{14} A_{23} = 0$$

Il complesso di Battaglini è il solo che contenga entrambe le generazioni di una quadrica.