17

(1)

Herr ~~prof~~ Dr Felix Klein, o. ö. professor ~~von Mathematik~~ der Geometrie
an der Universität ~~zu~~ Leipzig

Turin, le 16 Août 1883

Monsieur,

Vous recevrez par la poste avec ~~en même temps que~~ cette lettre un pli chargé contenant ~~un mémoire~~ le manuscript d'un mémoire ~~que~~ intitulé « Sur les espèces diverses de complexes du 2° dégré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre » ~~dont~~ pour lequel nous désirerions vivement obtenir votre approbation et l'impression dans vos « Mathematische Annalen ».

~~Le titre~~ Comme le titre même l'indique, nous avons ~~fait~~ dans ce travail donné une classification complète des complexes qui peuvent ~~se~~ être ~~considérés~~ ~~comme composé generes~~ obtenus de cette manière, avec les ~~princip~~ propriétés principales qui distinguent ces complexes entre eux et des autres complexes du 2° dégré. Il y a un grand nombre de ces complexes ; plusieurs d'entre eux sont même les plus généraux de leurs classes ou ont du moins pour surfaces singulières les surfaces les plus générales de leurs classes (en entendant par classes ~~d'un~~ de complexes du 2e dégré ou de leurs surfaces singulières celles qui correspondent à la classification ~~q~~ de ces complexes que Vous ~~Monsieur~~, avez ~~exposé~~ donnée succinctement dans votre Inauguraldissertation sur la géométrie de la droite, et qu'~~M. Weiler~~ a développée ensuite M. Weiler). Or ce mode de génération identique pour tous ces complexes, ~~par~~ et dans lequel pour les obtenir tous il ne faut que changer la position mutuelle des deux surfaces du second ordre, permet de les étudier tous sous un même point de vue qui présente ~~certains~~ plusieurs avantages.. Ainsi il ~~résulte~~ immédiatement

de ce mode de génération une manière ~~très simple et élégante~~ simple et élégante de construire la distribution des droites singulières ~~et~~, des droites doubles, des plans ~~toutes les~~ leurs surfaces singulières ~~de ces complexes~~ et des points notables de tous ces complexes et en outre, parmi lesquelles sont le tétraédroïde de Cayley, la surface romaine de Steiner, plusieurs surfaces réglées de Cremona, une surface du 3e ordre de Schläfli, etc. etc. Le cas le plus général de nos complexes est celui qui a été étudié par M. Battaglini comme le complexe le plus général du 2e degré et que Vous, Monsieur, avez prouvé être au contraire ~~deux~~ fois particularisé. Mais l'on peut dire que personne n'a encore étudié tous les autres cas ~~nombreux~~ ~~cas~~, bien que ~~quelques uns~~ deux ou trois de ces autres complexes se rencontrent dans quelques mémoires de MM. Darboux, Weiler et Hirst, que nous avons cités. Le cas le plus général, que ~~sont~~ M. Aschieri avait ~~déjà~~ déjà considéré ~~pour M. Aschieri~~ comme ~~prouve~~ composé des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, a été ~~récemment~~ dernièrement rencontré de nouveau ~~par~~ comme générable de cette manière par M. Schur dans le mémoire « Ueber das System zweier Flächen 2. Grades » publié dans le tome XXI des Mathematische Annalen. A Vous dire le vrai c'est précisément en voyant ce dernier mémoire, qui se rattache au même argument, que nous avons pensé que Vous auriez eu la bonté de l'accepter aussi pour Votre journal les résultats que nous avions déjà obtenus ~~ensemble~~ ensemble il y a près d'une année et que nous avons ~~reu~~ réunis et complétés à présent dans notre mémoire. Vous comprendrez facilement comment, étant tout-à-fait inconnus pour Vous et étant même des étrangers, nous avons cherché de publier notre travail dans Vos « Mathematische Annalen ; c'est que dans ces annales-ci ont été publiés tous les principaux travaux qui ~~ont été écrits~~ l'on a écrit sur la géométrie de la droite après Plücker, et, bien que nous n'ayons pas l'idée de ~~mettre~~ placer le nôtre à un rang qui s'approche de ceux-là, toutefois notre plus vif désir est de le voir aussi publié dans les mêmes annales.

Nous espérons, Monsieur, d'obtenir de Vous cette véritable faveur. ~~Votre~~ ~~avec~~ L'inclination que vous avez toujours eue pour les études de géométrie de la droite et la courtoisie avec laquelle vous encouragez les ~~autres~~ jeunes savants dans leurs recherches (~~et~~ courtoisie qui ~~sont~~ n'est pas moins ~~comme autant~~ comme que Vos ~~des~~ travaux scientifiques) nous ~~en~~ assurent que votre réponse ~~que~~ nous attendrons impatiemment sera favorable (x). En attendant recevez, Monsieur, nos salutations les plus distinguées

Vos dévoués

Dr Corrado Segre à Turin

Dr Gino Loria à Mantoue

(x) Ayez la complaisance de l'adresser à ~~M.~~ Corrado Segre, rue Montebello, 26, Turin (Italie)

Herrn Prof. Dr Klein. Saphirnstrasse 10/II.

Zurich, le 7 Septembre 1883 Leipzig

Monsieur,

Votre lettre du 28 Août nous a fait beaucoup de plaisir, car elle satisfaisait à nos ~~plus~~ vifs désirs d'obtenir non seulement la publication dans les Mathematische Annalen de notre premier travail, mais encore votre approbation pour celui-ci, à laquelle nous donnions la plus grande importance. C'est que ~~vous êtes~~ sans le savoir (nous pouvons tous le dire maintenant, sans que vous ayez à penser que c'est précisément pour obtenir cette approbation que nous le disons) vous êtes, Monsieur, pour ~~nous~~ nous non seulement un maître mais aussi un ami, dont nous étudions les travaux avec passion, car c'est par eux que nous avons commencé à vous connaître et à vous aimer.

Même les observations que Vous avez bien voulu nous faire sur nos citations nous ont ~~fait~~ causé du plaisir et n'ont pas été inutiles. Quant à la première relative ~~aux~~ au passage de notre écrit où nous nommons « la méthode des diviseurs élémentaires (Elementartheiler) de M. Weierstrass » vous avez bien raison en ~~disant~~ nous faisant réfléchir que ~~cette~~ l'origine de cette méthode ~~est~~ se trouve déjà dans les travaux de Sylvester. Cependant que penserez-vous lorsque vous saurez que nous ne connaissons pas ces travaux, car ~~bien qu'~~ il y ~~ait~~ a déjà quelque temps ~~que~~ qu'ici nous cherchons ~~en~~ en vain le tome de 1851 du Philosophical Magazine, où ils se trouvent? C'est pour cela que ~~on~~ nous n'avons pu citer Sylvester, car il nous répugnait de le faire seulement sur des citations lues dans d'autres ~~travaux~~ mémoires et sans connaître les travaux originaux.

devrait placer un astérisque (*) comme renvoi, et au pied de cette page ~~mettre~~ faire publier cette note. Si vous pouvez vous charger de ce soin ~~nous~~ vous en serons vraiment obligés.

Puisque vous avez parlé des corrections faites par M. Hirst au mémoire de M. Weiler, permettez, Monsieur, que je vous demande si vous avez déjà vu ailleurs d'autres corrections à ce mémoire. C'est ~~que moi~~ qu'à moi qui l'ai étudié avec beaucoup de soin, il est arrivé d'y trouver plusieurs autres inexactitudes, qui n'ont pas été rencontrées par M. Hirst et qui me paraîtraient d'autant plus dignes d'être connues qu'il peut arriver fréquemment aux géomètres ~~de~~ d'avoir à ~~faire usage de~~ recourir à ce mémoire. Il y en a surtout une qui ~~m'a rencontré~~ est très-notable car ~~il semble que M. Weiler~~ elle se rencontre pour toutes les classes de complexes dont la surface singulière est une surface du 2e degré double, c'est-à-dire pour les classes [(111)111] (la plus générale), [(211)11], [(111)21], etc. etc.; et ~~il semble que M. Weiler ai~~ comme dans le dernier mémoire publié par M. Weiler sur les complexes du 2e degré ~~&~~ dans le Zeitschrift für Math und Ph. ~~)~~ on ne voit pas qu'il s'en soit aperçu je me permets de vous en parler, sans m'arrêter à noter les conséquences erronées auxquelles elle conduit ensuite l'auteur. Tous ces complexes ont pour droites singulières les droites de 4 congruences linéaires (qui peuvent coincider ou se particulariser, etc.), dont les quatre couples de directrices appartiennent à un même système de génératrices de la surface singulière (le système qui ne se compose pas de droites doubles). Or M. Weiler dit que ces ~~les~~ 8 directrices se divisent en deux quaternes, chacun desquels contient une directrice de chacun de ces couples; ~~Or M. Weiler dit que~~ et ~~qui dont~~ ayant

~~Votre dernière observation~~ En second lieu, vous nous demandez si Hirst a corrigé quelques inexactitudes de M. Weiler dans les Proceedings of the London Math. Society. C'est ~~vrai~~ bien vrai ; dans un mémoire publié dans ces Proceedings et ~~qui contient~~, presque sans changements, dans la « Collectanea Mathematica » M. Hirst a étudié les complexes des droites qui joignent les points conjugués de deux plans ~~x~~ corrélatifs, et dans quelques notes a fait plusieurs corrections au mémoire de Weiler. Nous avons tenu compte de ces corrections en rédigeant notre travail.

Enfin votre dernière demande nous portait à examiner les complexes du 2e degré rencontrés par Ball dans sa "Theory of Screws", et cet examen nous fit conclure que le complexe des axes quadratique des complexes du 1er degré d'une série linéaire ~~2 fois~~ triplement infinie, complexe qui a la plus grande importance dans la théorie de Ball, est précisément l'un des complexes étudiés dans notre mémoire, c'est-à-dire il ~~est le~~ n'est pas (le point de vue projectif) projectivement le complexe le plus général de la classe [(11) 2 2], mais bien celui que nous avons nommé un complexe H de la 1e espèce (car à la même surface singulière appartiennent aussi deux autres complexes H, mais d'une espèce projective différente). ~~il est peut être obtenu comme lieu des droites q intersections des plans tangents orthogonaux d'un~~ Ce fait et l'~~une~~ observation faite par Ball ~~que~~ que le cylindroïde ~~qui est~~ ~~surface singulière de ce complexe quadratique~~ et dont la surface singulière est le cylindroïde lieu des axes du faisceau de complexes en involution avec cette série peut être considéré comme un cas particulier de la surface réglée du 4e degré rencontrée par M. Lindemann dans son mémoire sur la Mécanique projective m'ont fait penser que ce résultat pouvait se généraliser et en effet j'ai trouvé que même lorsque l'on ne prend pas une métrique spéciale, mais bien une métrique générale, les ~~axes~~ couples d'axes (dans la définition de ~~M.~~ Lindemann) des complexes du 1e degré d'une série linéaire 3 fois infinie forment encore un des complexes étudiés dans notre travail, c'est-à-dire le complexe H de la classe [(11) 1 1 1]. La surface singulière est le lieu des couples d'axes des complexes du faisceau qui est en involution avec cette série, et elle forme ~~la~~ une surface réglée de l'espèce XI de Cremona, comme a noté M. Lindemann, seulement ce n'est pas la surface la plus générale de cette espèce, mais bien cette surface particulière qui est la surface singulière d'un complexe H. — Comme ces remarques ne sont peut-être pas tout-à-fait inutiles, ~~j'en~~ ~~fait~~ nous en avons fait une note, que je joins à cette lettre dans une feuille séparée afin que vous ayez la bonté de la réunir au manuscript. Dans la page de celui-ci où l'on parle des complexes [(11) 2 2] et précisément après que l'on a ~~parlé~~ donné les propriétés des complexes H de cette classe et de la 1e espèce, c'est-à-dire après les mots « .... et l'on déduit de ce que nous avons dit à propos de ceux-ci la manière de déterminer les 4 droites doubles » l'on

les propriétés caractéristiques ~~sont~~ que les points des directrices de l'un quaterne sont des points singuliers (il entend ~~proprement~~ évidemment doubles) tandis que les plans des directrices de l'autre quaterne sont des plans singuliers; ~~Il entend évidemment par « singulier » il entend évidemment « double », car du reste tous les points et plans~~ en d'autres termes ~~selon M. Weiler~~ les deux quaternes jouissent selon M. Weiler de propriétés ~~réciproques~~ corrélatives. ~~On sait n'est pas vrai~~ Or il est bien vrai que ~~l'on a deux quat~~ ces directrices forment deux quaternes distincts, mais il arrive au contraire (comme il est très-facile de voir et même en plusieurs manières) que les points et les plans de l'un des quaternes sont doubles pour le complexe, tandis que l'autre quaterne n'a ni points ni plans doubles; de sorte que le premier quaterne figure comme quaterne principal de directrices, et l'autre comme quaterne secondaire.

L'importance de cette distinction résulte immédiatement de ce fait que les ∞^1 complexes ~~d'une~~ du 2e degré d'une telle classe ~~cf~~ formant une même série homofocale (vous comprenez bien ce que j'entends par là) ont le même quaterne principal de directrices et diffèrent au contraire entre eux par les quaternes secondaires, de sorte que pour les complexes de ces classes ce n'est pas la ~~série homofocale~~ surface singulière, dans le sens ordinaire de ce mot, qui déterminerait ~~dans ce cas-ci~~ la série homofocale de complexes du 2e degré, mais bien ces 4 droites qui forment le quaterne principal.

Les séries homofocales des complexes du 2e degré des diverses classes n'ont

pas été considérées par M. Weiler, mais il me semble qu'il a eu tort, ~~dans~~ car elles sont beaucoup d'importance même pour la classification de ces complexes ; ainsi elles lui auraient donné immédiatement le nombre des invariants absolus d'un complexe quelconque et leur signification géométrique. Dans ma thèse pour le doctorat (il y a à peine deux mois que, ~~je suis~~ moi et mon ami Loria, nous sommes docteurs ; c'est pour cela que cette thèse n'a pas encore été publiée, mais je ~~compte~~ la présenterai probablement à notre Académie des sciences, dès qu'elle sera ouverte, pour la publication dans ~~ses~~ mémoires) après avoir étudié les surfaces du 2e degré, leurs faisceaux et leurs séries, dans un espace à n dimensions, ayant égard spécialement à la géométrie sur une telle surface, j'ai appliqué des théorèmes généraux ainsi trouvés à la géométrie de la droite (considérée comme la géométrie d'une surface du 2e degré R_4^2 dans l'espace à 5 dimensions, selon votre manière de voir, Monsieur) et plus particulièrement des diverses ~~espèces~~ classes de complexes du 2e degré. J'ai obtenu ainsi une théorie de ceux-ci, laquelle ne fait aucun usage d'équations canoniques. ~~(De quelques uns des théorèmes ainsi trouvés j'ai déjà fait usage dans le travail fait avec Loria)~~ Les séries homofocales de ces complexes se sont ~~alors~~ présentées naturellement. Donc l'on considère une ~~la développable~~ surface développable (enveloppe de ∞^3 plans) ~~(pour ainsi dire)~~ de la 1re classe ~~(enveloppe de ∞^3 plans)~~ qui dans l'espace à 5 dimensions ~~est~~ sont circonscrites à R_4^2 et à un système d'autres surfaces du 2e degré $\mathcal{C}$; ~~ces-ci~~ celles-ci couperont R_4^2 dans ~~une~~ ce que j'appelle une série homofocale de complexes du 2e degré. Toutes les propriétés de cette série resultent facilement de cette définition. En outre cette surface développable aura des espaces quadratiques doubles ~~le plusieurs espèces~~, qui dans le cas le plus général [111111] seront 6 et à 3 dimensions, et couperont R_4^2 dans ~~les~~ 6 congruences du 2e degré ~~que~~ des tangentes doubles de la surface de Kummer ; mais dans des cas particuliers (qui dépendent très-simplement des discours élémentaires) pourront ~~devenir dont~~ être à un nombre moindre de dimensions, mais en même temps d'un caractère supérieur de singularité ~~de duplicité~~ ~~plus partie~~ singulier ~~notable~~ pour cette surface développable. Ainsi pour le cas [(11) 1111] l'un de ces espaces doubles de ~~la surface développable~~ celle-ci sera à 2 dimensions et coupera R_4^2 en une surface réglée biquadratique (dont les points et les plans sont singuliers pour tous les complexes de la série). Et pour le cas [(111) 111] l'un de ces espaces doubles sera à 1 seule dimension et coupera R_4^2 en 4 éléments, c'est-à-dire en 4 droites que l'on reconnaît former précisément ~~ce que j'appellais~~ le quaterne principal de directrices de tous les complexes de la série.

Je ne sais si cette méthode a déjà été appliquée par d'autres pour l'étude des propriétés diverses des différentes classes de complexes du 2e degré ; si cela était vous m'obligeriez en m'en avertissant. ~~Mais il est sûr, si je ne me trompe, que cette méthode est bien préférable aux longs calculs que nécessite l'usage continuel des diverses équations canoniques.~~

Excusez-moi si je vous ai entretenu si longuement sur cette matière ; c'est qu'il m'importe beaucoup de connaître votre opinion sur les choses qui m'occupent. En attendant, recevez encore, Monsieur, ~~une~~ avec nos salutations mes remercîments et ceux de mon ~~mon~~ ami Loria.

Votre très-dévoué

Corrado Segre

19

Herr. Prof. Dr Felix Klein Leipzig

Turin, le 22 Septembre 1883

Monsieur,

J'ai eu beaucoup de plaisir en voyant par votre dernière lettre que vous approuviez quelques idées générales qui m'ont ~~leur~~ guidé pour ~~composer~~ écrire ma dissertation. Ces idées sont ~~les vôtres~~ à vous, Monsieur, et je n'ai fait que les appliquer : n'est-il pas ~~il est~~ étrange de voir que, malgré leur fécondité, personne jusqu'à présent ne les ait développées ~~comme elles~~ et appliquées comme elles pourraient l'être?

J'avais voulu, suivant votre désir, préparer une note dans laquelle fussent corrigées les inexactitudes du mémoire de M. Weiler, dont je vous avais parlé dans ma dernière lettre. Mais je me suis aperçu que cette note aurait été beaucoup trop longue pour être mise aux pieds d'une page du travail ~~de Loria~~ ~~et~~ de moi ~~que vous avez~~ et de Loria, d'autant plus que je désirais donner les preuves ~~des corrections~~ des plus importantes de ces corrections ; et d'ailleurs il n'y avait pas ~~assez~~ de relation entre ce travail et ces corrections. Je me suis donc décidé à écrire ~~une~~ cette note ~~qui peut venir~~ publiée ~~à part~~ dans les Annalen ~~que je vous envoie avec cette lettre~~ que je vous envoie ici pour être, et dans laquelle j'étudie ~~avec beaucoup de concision~~ très-brièvement les complexes ~~dont que~~ du 2e degré dont la surface singulière est une surface ~~double~~ du 2e degré double, ~~et~~ complexes qui sont précisément ceux sur lesquels M. Weiler a ~~fait~~ écrit selon moi l'inexactitude la plus grave. En corrigeant celle-ci j'ajoute dans une note aux pieds de la page les corrections à d'autres inexactitudes. ++

Il est inutile que je vous résume ici cette note, car j'espère que vous aurez la

bonté de la lire et de ~~juger si elle mérite~~ me dire sans reserve si vous pensez qu'elle mérite de paraître dans les Mathematische Annalen. ~~Vous trouverez peut-être que j'abuse de votre courtoisie en vous envoyant cet autre travail quand il y a à peine un mois que je vous en avais envoyé un autre.~~ ~~Mais~~ Je vous dirai seulement que la proposition qui résume peut-être la plupart ~~du mc~~ de cette note est la suivante : la géométrie projective des ∞^5 complexes quadratiques qui ont une même « Regelschar » de droites doubles est identique à la géométrie métrique (non-euclidienne) des coniques d'un plan. Les applications que j'en ai faites sont exposées avec beaucoup de concision pour ne pas abuser de l'espace que vous m'accordez dans le cas où vous veuillez accepter cette note. Par exemple des résultats que j'obtiens ~~donne suivant~~ suivent plusieurs propositions qui me semblent interessantes : la géometrie métrique ordinaire des coniques est identique à la géometrie projective des complexes [(211)11], les paraboles correspondant aux complexes [(311)1] et les cercles aux complexes [(211)(11)] ; la géométrie métrique non-euclidienne des cercles est identique à la géométrie projective des complexes [(111)(11)1], etc. etc.. Malgré la concision que j'ai usée il me semble du reste que le lecteur attentif pourra développer sans difficulté les méthodes que j'indique. — A la fin de ta note je n'ai pu ne m'empêcher de résumer en une page ou deux ce que l'on peut faire d'analogue pour une athégorie beaucoup plus étendue de complexes quadratiques, c'est-à-dire pour tous ceux dont la surface singulière est reglée. Il me semble d'avoir ainsi indiqué suffisamment comment l'on peut classifier et étudier complètement tous ces complexes (qui comprennent la plus grande partie des classes de complexes quadratiques) sans faire aucun usage d'équations, mais par une représentation dans l'espace ordinaire qui réduit p.e. cette classification à la classification de la position mutuelle de deux surfaces du 2e degré. Je ~~crois~~ suis presque sûr que ~~cette méthode~~ ce procédé ne vous est pas inconnu, car il découle directement de vos méthodes ~~générales~~ ; mais comme il me semble inconnu ~~pour~~ aux géomètres en général, j'ai pensé qu'il pouvait leur paraître intéressant et utile.

Vous m'excuserez ~~si~~ je vous envoie ainsi un nouveau manuscript quand il y a à peine un mois que vous m'en avez accepté un autre pour la publication dans les Annalen. Au surplus s'il vous semble qu'il vous prenne trop de place et qu'il y ~~ait~~ soit quelque chose de superflu, vous m'obligerez en m'indiquant les raccourcissements que je dois y faire.

Et à présent je dois vous remercier de ~~votre~~ la bonté que vous m'avez montré dans votre dernière lettre ~~pour moi~~. Je suis ~~aussi~~ chargé de vous saluer ~~au nom~~ de la part de Mr le ~~prof~~ prof. D'Ovidio, qui a été mon professeur à cette université. Et recevez aussi, Monsieur, mes salutations les plus distinguées

Votre très-dévoué

Corrado Segre

de l'angle des deux sphères, les paramètres $k . k'$ ~~[illegible]~~ se changeront, comme nous avons vu, dans les carrés des rayons $r . r'$ des deux sphères, les axes $x . x'$ des ~~[illegible]~~ complexes linéaires deviendront les centres des deux sphères. (on aura $\cos(\widehat{x . x'}) = 1$) et la relation précédente deviendra:

$$2 r r' \cos(c . c') = r^2 + r'^2 - \overline{x x'}^2 ,$$

ce qui est une relation connue. ~~[illegible]~~

Je ne vous exposerai pas ici d'autres recherches que j'ai faites sur ~~ce~~ sujet, par exemple celle des coordonnées les plus générales de l'axe d'un complexe linéaire donné ~~[illegible]~~ et du centre d'une sphère donnée ~~[illegible]~~. Je crains de vous avoir déjà assez ennuyé. Veuillez m'excuser et agréez mes salutations les plus respectueuses

Votre très-dévoué

Corrado Segre

Herr Prof. Dr Felix Klein Leipzig

Turin, le 29 Octobre 1883

Monsieur,

En réponse à votre lettre bienvenue du 21 courant je dois vous dire que vous avez parfaitement raison en nous proposant une modification à ~~notre~~ la citation faite par Loria et moi du mémoire de M. Schur, ~~que moi et Loria et moi, nous avons~~. On pourrait croire, en lisant cette citation, que le but de ce mémoire était précisément le même que celui du travail de M. Archieri, ce que nous n'entendions ~~pas~~ absolument ~~dire~~ pas exprimer, car au contraire M. Schur (jeune savant pour lequel nous avons beaucoup d'estime) se propose dans son travail comme but principal l'étude d'une position particulière de deux surfaces du second ordre. Aussi ne manquerons-nous pas en corrigeant les épreuves de notre mémoire de modifier la citation dans ce sens-ci.

Nous aurons aussi à y ajouter plusieurs petites observations qui nous semblent devoir le rendre plus intéressant. Ainsi nous compléterons dans des notes aux pieds des pages l'énumération des complexes que l'on peut obtenir par les intersections des plans tangents perpendiculaires entre eux d'une surface de 2e ~~ordre~~ degré réelle. Nous avons aussi reconnu qu'à la catégorie des complexes que nous avons étudiés appartient le complexe très-remarquable des droites qui ont le même moment par rapport à une droite fixe. — Quant au mémoire de M. Weiler ~~dans le dern~~ que vous avez la bonté de nous indiquer dans le dernier cahier du Journal

für Mathematik, nous l'avions déjà aperçu, mais il n'y a rien qui nous intéresse ~~beaucoup~~ directement, car il traite seulement la question de la génération des complexes quadratiques dont la surface singulière n'est pas réglée au moyen de congruences quadratiques ayant ~~des~~ une droite et des coniques (ou des cônes) focales.

En attendant de savoir ce que vous pensez de ~~mon conte~~ ma note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une quadrique double (ou même, plus en général, une surface réglée), ce que je désire vivement de savoir, permettez-moi, Monsieur, de vous demander si vous avez jamais aperçu le lien intime qu'il y a entre la géométrie métrique euclidienne des droites et de leurs complexes linéaires et la géométrie métrique ordinaire des points et des sphères ~~de l'espace ordinaire~~. Il y a quelques semaines que j'ai fait là-dessus quelques observations qui, si elles sont nouvelles, me paraissent assez intéressantes et que je prends la ~~permission~~ liberté de vous exposer. (je ne parle pas du lien entre la géométrie projective des ~~droites et~~ complexes linéaires et la géométrie des rayons réciproques, car vous l'avez déjà montré complètement dans vos travaux)

~~Si l'on~~ En faisant usage de coordonnées générales x_i de droites, soit $R_{xx}=0$ l'équation du 2e degré à laquelle elles satisfont, et $\Omega_{xx}=0$ l'équation ~~à laquelle satisfait~~ de l'absolu euclidien en coordonnées de droites, c'est-à-dire l'équation du complexe des droites qui coupent le cercle imaginaire à l'infini. Comme ce complexe a la caractéristique $[(222)]$ on peut supposer que Ω_{xx} ait ~~avec~~ avec nulle discriminant et par conséquent aussi ses subdéterminants du 5ème et du 4me ordre. De plus en mul-

axe de symétrie. Le complexe même est le lieu d'une droite telle que ~~se compose des droites dont~~ le produit de sa distance à l'axe par la tangente de l'angle qu'elle fait avec cet axe est constant : cette constante est le paramètre du complexe.

Plus en général si l'on forme le produit de la distance à l'axe par la tangente de l'angle avec cet axe pour deux droites conjuguées par rapport à un complexe linéaires, le produit de ces deux quantités sera constant et égal au carré du paramètre.

symétrie. La sphère même est le lieu d'un point tel que sa distance au centre est constante. Cette constante est le rayon de la sphère.

Plus en général si l'on ~~trouve~~ trouve les distances de deux points conjugués par rapport à une sphère au centre de celle-ci, leur produit de ces deux distances sera constant et égal au carré du rayon.

Il y a encore d'autres relations remarquables entre des théorèmes connus ; par exemple il y a pour la géométrie des droites des propositions analogues à celles qui regardent la puissance d'un point par rapport à une sphère. Puis en considérant deux complexes linéaires $c.c'$ dont les axes soient $x.x'$ et les paramètres $k.k'$, et en ~~commençant~~ posant $\cos(c.c') = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}R_{c'c'}}}$, on trouve la relation suivante :

$$2\sqrt{k}\sqrt{k'}\cos(c.c') = (k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \text{mom}(x.x')$$

laquelle donne pour condition de l'involution des deux complexes celle que vous avez trouvée

$$(k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \text{mom}(x.x') = 0 .$$

Or si l'on passe à deux sphères $c.c'$, la fonction $\cos(c.c')$ ~~devient~~ ~~sera~~ ~~[illegible]~~ précisément dans le cosinus se changera

tipliant R_{xx} ou Ω_{xx} par un facteur numérique convenable on peut faire en sorte que l'expression du <u>moment</u> des deux droites $x \cdot x'$ soit

$$\text{mom}\,(x \cdot x') = \frac{R_{x \cdot x'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}\,.$$

(Et à ce propos je vous ferai remarquer que plusieurs écrivains modernes paraissent croire que le moment des deux droites $x \cdot x'$ est égal ou proportionnel ~~au~~ à $R_{xx'}$ simplement, ou en coordonnées plückeriennes à $\Sigma p_{ik} p'_{lm}$, ce qui non seulement est faux, mais n'a pas même de sens puisque il s'agit de coordonnées homogènes). L'angle des directions des deux droites $x \cdot x'$ est donné ~~par~~, comme l'on sait, par la formule:

$$\cos\,(x \cdot x') = \frac{\Omega_{x \cdot x'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}\,,$$

de sorte qu'en divisant la formule précédente par celle-ci on aura

~~et en conséquence en représentant pour simplicité par $(\overline{xx'})^2$ le produit de la distance de $x \cdot x'$ par la tangente de leur angle on a:~~

$$+\,\text{dist}\,(x \cdot x')\,\text{tg}\,(x \cdot x') = +\,\frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}}\,.$$

Or si l'on prend aussi des coordonnées générales x_i pour les sphères (espace à 4 dimensions), ~~que~~ on aura une equation quadratique $R_{x\bar{x}} = 0$ à laquelle devront satisfaire ~~les sphe~~ celles qui se réduisent à des points, et une équation linéaire ~~$\Sigma a_i x_i = 0$ à laquelle devront~~ $a_x = 0$ (plan tangent a R_{xx}) pour celles qui se réduisent à des plans. On peut alors faire en sorte que la distance des deux points $x \cdot x'$ ~~soit~~ ait pour carré exprimée par

$$(\overline{x \cdot x'})^2 = \frac{R_{xx'}}{a_x\, a_{x'}}$$

für Mathematik, nous l'avions déjà aperçu, mais il n'y a rien qui nous intéresse ~~beaucoup~~ directement, car il traite seulement la question de la génération des complexes quadratiques dont la surface singulière n'est pas réglée au moyen de congruences quadratiques ayant ~~des~~ une droite et des coniques (ou des cônes) focales.

En attendant de savoir ce que vous pensez de ~~mon conte~~ ma note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une quadrique double (ou même, plus en général, une surface réglée), ce que je désire vivement de savoir, permettez-moi, Monsieur, de vous demander si vous avez jamais aperçu le lien intime qu'il y a entre la géométrie métrique euclidienne des droites et de leurs complexes linéaires et la géométrie métrique ordinaire des points et des sphères ~~de l'espace ordinaire~~. (le lien entre la géométrie projective des ~~droites et~~ complexes linéaires et la géométrie des rayons réciproques, ce que je ne puis pas du vous l'avez déjà montré complètement dans vos travaux) Il y a quelques semaines que j'ai fait là-dessus quelques observations qui, si elles sont nouvelles, me paraissent assez intéressantes et que je prends la ~~permission~~ liberté de vous exposer.

~~Si l'on~~ En faisant usage de coordonnées générales x_i de droites, soit $R_{xx}=0$ l'équation du 2e degré à laquelles elles satisfont, et $\Omega_{xx}=0$ l'équation ~~indépendante~~ de l'absolu euclidien en coordonnées de droites, c'est-à-dire l'équation du complexe des droites qui coupent le cercle imaginaire à l'infini. Comme ce complexe a la caractéristique $[(222)]$ on peut supposer que Ω_{xx} ait nulle son discriminant et par conséquent aussi ses subdéterminants du 5ème et du 4me ordre. De plus en mul-

axe de symétrie. Le complexe même ~~se compose des droites dont~~ est le lieu d'une droite telle que le produit de la distance à l'axe par la tangente de l'angle qu'elle fait avec cet axe est constant : cette constante est le paramètre du complexe.

Plus en général si l'on forme le produit de la distance à l'axe par la tangente de l'angle avec cet axe pour deux droites conjuguées par rapport à un complexe linéaires, le produit de ces deux quantités sera constant et égal au carré du paramètre.

symétrie. La sphère même est le lieu d'un point tel que sa distance au centre est constante. Cette constante est le rayon de la sphère.

Plus en général si l'on ~~forme~~ trouve les distances de deux points conjugués par rapport à une sphère au centre de celle-ci, leur produit de ces deux distances sera constant et égal au carré du rayon.

Il y a encore d'autres relations remarquables entre des théorèmes connus ; par exemple il y a pour la géométrie des droites des propositions analogues à celles qui regardent la puissance d'un point par rapport à une sphère. Mais en considérant deux complexes linéaires $c.c'$ dont les axes soient $x.x'$ et les paramètres $k.k'$, et en ~~commençant~~ posant $\cos(c.c') = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}R_{c'c'}}}$, on trouve la relation suivante :

$$2\sqrt{k}\sqrt{k'}\cos(c.c') = (k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \operatorname{mom}(x.x')$$

laquelle donne pour condition de l'involution des deux complexes celle que vous avez trouvée

$$(k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \operatorname{mom}(x.x') = 0 .$$

Or si l'on passe à deux sphères $c.c'$, la fonction $\cos(c.c')$ ~~devient~~ ~~sera~~ ~~[illegible]~~ précisément dans le cosinus se changera

tipliant R_{xx} ou Ω_{xx} par un facteur numérique convenable on peut faire en sorte que l'expression du moment des deux droites $x.x'$ soit

$$\text{nom}\,(x.x') = \frac{R_{x.x'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}.$$

(Et à ce propos je vous ferai remarquer que plusieurs écrivains modernes paraissent croire que le moment des deux droites $x.x'$ est égal ou proportionnel ~~ou~~ à $R_{xx'}$ simplement, ou en coordonnées plückeriennes à $\Sigma p_{ik} p'_{lm}$, ce qui non seulement est faux, mais n'a pas même de sens puisque il s'agit de coordonnées homogènes). L'angle des directions des deux droites $x.x'$ est donné ~~par~~, comme l'on sait, par

la formule:

$$\cos(x.\hat{x}') = \frac{\Omega_{x.x'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}},$$

de sorte qu'en divisant la formule précédente par celle-ci on aura

~~et en conséquence en représentant pour simplicité par $(\overline{x.x'})^2$ le produit de la distance de $x.x'$ par la tangente de leur angle on a:~~

$$+\,\text{dist}\,(x.x')\,\text{tg}\,(x.x')^{\frac{1}{2}} = +\,\frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}}.$$

Or si l'on prend aussi des coordonnées générales x_i pour les sphères (espace à 4 dimensions), ~~que~~ on aura une equation quadratique $R_{x\bar{x}}=0$ à laquelle devront satisfaire ~~les sphe~~ celles qui se réduisent à des points, et une équation linéaire ~~$\Sigma a_i x_i = 0$ laquelle devra~~ $a_x = 0$ (plan tangent a R_{xx}) pour celles qui se réduisent à des plans. On peut alors faire en sorte que la distance des deux points $x.x'$ ait pour carré ~~est~~ exprimée par

$$(\overline{x.x'})^2 = \frac{R_{xx'}}{a_x\, a_{x'}}$$

für Mathematik, nous l'avions déjà aperçu, mais il n'y a rien qui nous intéresse ~~beaucoup~~ directement, car il traite seulement la question de la génération des complexes quadratiques dont la surface singulière n'est pas réglée au moyen de congruences quadratiques ayant ~~des~~ une droite et des coniques (ou des cônes) focales.

En attendant de savoir ce que vous pensez de ~~mon conte~~ ma note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une quadrique double (ou même, plus en général, une surface réglée), ce que je désire vivement de savoir, permettez-moi, Monsieur, de vous demander si vous avez jamais aperçu le lien intime qu'il y a entre la géométrie métrique euclidienne des droites et de leurs complexes linéaires et la géométrie métrique ordinaire des points et des sphères ~~de l'espace ordinaire~~ (je ne parle pas du lien entre la géométrie projective des ~~droites et~~ complexes linéaires et la géométrie des rayons réciproques, car vous l'avez déjà montré complètement dans vos travaux). Il y a quelques semaines que j'ai fait là-dessus quelques observations qui, si elles sont nouvelles, me paraissent assez intéressantes et que je prends la ~~permission~~ liberté de vous exposer.

~~Si l'on~~ En faisant usage de coordonnées générales x_i de droites, soit $R_{xx}=0$ l'équation du 2e degré à laquelles elles satisfont, et $\Omega_{xx}=0$ l'équation ~~quelle satisfa~~ de l'absolu euclidien en coordonnées de droites, c'est-à-dire l'équation du complexe des droites qui coupent le cercle imaginaire à l'infini. Comme ce complexe a la caractéristique $[(222)]$ on peut supposer que Ω_{xx} ait ~~nulle~~ son discriminant et par conséquent aussi ses subdéterminants du 5ème et du 4me ordre. De plus en mul-

ane de symétrie. Le complexe même est le lieu d'une droite telle que ~~se compose des droites dont~~ le produit de la distance à l'axe par la tangente de l'angle qu'elle fait avec cet axe est constant : cette constante est le paramètre du complexe.

Plus en général si l'on forme le produit de la distance à l'axe par la tangente de l'angle avec cet axe pour deux droites conjuguées par rapport aux complexe linéaires, le produit de ces deux quantités sera constant et égal au carré du paramètre.

Il y a encore d'autres relations remarquables entre des théorèmes connus ; par exemple il y a pour la géométrie des droites des propositions analogues à celles qui regardent la puissance d'un point par rapport à une sphère. Puis en considérant deux complexes linéaires $c.c'$ dont les axes soient $x.x'$ et les paramètres $k.k'$, et en ~~commençant~~ posant $\cos(c.c') = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}R_{c'c'}}}$, on trouve la relation suivante :

$$2\sqrt{k}\sqrt{k'}\cos(c.c') = (k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \operatorname{mom}(x.x')$$

laquelle donne pour condition de l'involution des deux complexes celle que vous avez trouvée

$$(k+k')\cos(\widehat{x.x'}) - \operatorname{mom}(x.x') = 0.$$

Or si l'on passe à deux sphères $c.c'$, la fonction $\cos(c.c')$ ~~devient~~ ~~[illegible]~~ précisément dans le cosinus se changera

symétrie. La sphère même est le lieu d'un point tel que sa distance au centre est constante. Cette constante est le rayon de la sphère.

Plus en général si l'on ~~forme~~ trouve les distances de deux points conjugués ~~quelconques~~ par rapport à une sphère au centre de celle-ci, leur produit ~~sera~~ de ces deux distances sera constant et égal au carré du rayon.

de l'angle des deux sphères, les paramètres $k . k'$ ~~changent~~ se changeront, comme nous avons vu, dans les carrés des rayons $r . r'$ des deux sphères, les axes $x . x'$ des ~~celles ci~~ complexes linéaires deviendront les centres des deux sphères. (on aura $\cos(\widehat{x . x'}) = 1$) et la relation précédente deviendra:

$$2 r r' \cos(c . c') = r^2 + r'^2 - \overline{x x'}^2,$$

ce qui est une relation comme ~~la quelle on a pour une — Il me semble q~~

Je ne vous exposerai pas ici d'autres recherches que j'ai faites sur ~~ce~~ sujet, par exemple celle des coordonnées les plus générales de l'axe d'un complexe linéaire donné ~~coordonnées générales~~ et du centre d'une sphère donnée ~~coordonnées aussi générales~~. Je crains ~~de~~ m'être vous avoir déjà assez ennuyé. Veuillez m'excuser et agréez mes salutations les plus respectueuses

Votre très-dévoué

Corrado Segre

Herrn Prof. Dr Felix Klein Leipzig

Turin, le 29 Octobre 1883

Monsieur,

~~Je~~ En réponse à votre lettre bienvenue du 21 courant je dois vous dire que vous avez parfaitement raison en nous proposant une modification à ~~notre~~ la citation faite par Loria et moi du mémoire de M. Schur, ~~que moi et, Loria et moi, nous avons~~. On pourrait croire, en lisant cette citation, que le but de ce mémoire était précisément le même que celui du travail de M. Archieri, ce que nous n'entendions ~~pas~~ absolument ~~dire~~ pas exprimer, car au contraire M. Schur (jeune savant, pour lequel nous avons beaucoup d'estime) se propose dans son travail comme but principal l'étude d'une position particulière de deux surfaces du second ordre. Aussi ne manquerons-nous pas en corrigeant les épreuves de notre mémoire de modifier la citation dans ce sens-ci.

Nous aurons aussi à y ajouter plusieurs petites observations qui nous semblent devoir le rendre plus intéressant. Ainsi nous ~~rem~~pléterons dans des notes aux pieds des pages l'énumération des complexes que l'on peut obtenir par les intersections des plans tangents perpendiculaires entre eux d'une surface du 2e ~~ordre~~ degré réelle. Nous avons aussi reconnu qu'à la cathégorie des complexes que nous avons étudiés appartient le complexe très-remarquable des droites qui ont le même moment par rapport à une droite fixe. — Quant au mémoire de M. Weiler ~~dans le dern~~ que vous avez la bonté de nous indiquer dans le dernier cahier du Journal

21

AM (6)

Herr Prof. Dr Felix Klein

Leipzig
Sophienstr. 10/II

Turin. le 22 Novembre 1883

Monsieur,

Je ai été très-content de voir que mes observations sur les analogies entre les géométries métriques des complexes linéaires et des sphères ou plus précisément sur le fait que cette dernière géométrie ~~n'est~~ peut ~~être~~ venir considérée comme un cas particulier de la première ne vous ont pas déplu. J'ai suivi votre conseil de consulter à ce propos le mémoire de M. Koenigs et je dois vous en remercier car malgré la différence de nos ~~vues~~ méthodes il y a effectivement quelques points de contact entre ce mémoire et mes recherches, et peut-être en le lisant plus attentivement j'aurai occasion de développer celles-ci ultérieurement.

Je vous remercie aussi, et avec la plus profonde reconnaissance, de l'offre que vous me faites de vos Annales pour y publier d'autres travaux. ~~Il y a à peine quatre mois que j'ai cessé d'être étudiant et je n'aurais jamais espéré de~~ Je ne manquerai pas de profiter (et bien tôt, comme vous verrez) de cette offre qui m'est d'autant plus chère que je ~~m'en sens~~ crains d'en être moins digne.

Le Dr Gerbaldi, dont vous me demandez des nouvelles, est maintenant à Rome, comme assistant aux chaires d'Algèbre et Géométrie analitique et de Calcul infinitésimal à cette université. J'ai été souvent avec lui le mois passé et c'est par lui que j'ai su que vous ne jouissez

santé et que votre envie de travailler et d'étudier vous
avec le médecin et vous fatigue au point de vous rendre
a fait beaucoup de déplaisir ; et je vois par quelques
échappés dans votre dernière lettre que M. Gerbaldi
ison. Hélas ! je n'ai que vingt ans, et je ne durais
lorsqu'il s'agit d'un savant comme vous ; cependant je connais
de l'esprit, qui voudrait continuellement s'occuper, avec
ressent des souffrances. Mais vous, monsieur, qui êtes
dispensable à la science, à l'enseignement, à vos amis
je voudrais être compté) vous devez vous
ur pour eux, et ne pas vous fatiguer comme vous faites
continuelle. Il ne faut pas, par amour pour la
ner notre corps de manière à ne plus pouvoir un jour
our même de la science nous impose la modération, pour conti-
force de la cultiver.

Ne riez pas de moi, monsieur, pour ces conseils que
: ils viennent du mon cœur et je désire vivement que
Et acceptez aussi mes salutations les plus respectueuses et affectueuses

Votre très-dévoué

Corrado Lezio

us prie de prendre note du changement de mon adresse soit pour vos lettres, soit pour l'envoi des épreuves des deux notes des Annales. Mon adresse sera dorénavant : Torino, via Bonafous, 3.

une surface décomposée en une courbe de la 2e classe et un cône quadrique, (et comme la courbe quartique ~~comme~~ [(21)11] se décompose en deux coniques ~~qui se tranchent~~ ayant deux points communs qui coïncident dans le cas [(21)1]) ~~tels~~ qui sont tels que les deux droites qu'ils ont communes ~~dans~~ pour le cas [(11)11] viennent coïncider dans notre cas.

~~Sur ces théorèmes la classification des comp~~ Un théorème semblable a lieu pour le cas où la caractéristique du complexe eût un groupe de trois ~~discriminants~~ exposants ~~élémentaires~~ ~~et~~ : on aura alors un quaterne de droites focales dont on connaîtra immédiatement la caractéristique. — ~~De même~~ Ainsi la classification des complexes quadratiques se réduit à celle des congruences quadratiques et des théorèmes analogues réduisent celle-ci à la classification des surfaces réglées biquadratiques et des quaternes focales, etc..

Comme cas particulier du même théorème général dont je parlais on a aussi les particularités des courbes focales (cycliques suivant Darboux) et des foyers proprement dits d'une surface cyclide quelconque. Ainsi la surface cyclide qui a pour caractéristique [21(11)] a sur la sphère fondamentale qui n'est plus nulle ~~un~~ une cyclique focale ~~de~~ [2(11)], c'est-à-dire décomposée en ~~deux~~ deux cercles dont l'un se décompose encore en deux droites ; sur la sphère fondamentale ~~nulle~~ qui correspond au 2 une cyclique focale [$\bar{1}$1(11)] décomposée en deux cercles, et enfin sur le cercle fondamental qui correspond à (11) un quaterne de foyers proprement dits dont la caractéristique est [21] et dont en conséquence deux coïncident dans ~~le~~ un point double.

Herr Prof. Felix Klein — Leipzig

Turin, le 3 Janvier 1884

Monsieur,

Merci pour votre lettre et pour les souhaits que vous me faites pour la nouvelle année : je vous en fais aussi et non pas par compliment, mais vraiment de cœur.

Ce que vous blâmez dans ma note sur certains complexes quadratiques c'est justement ce que j'y blâme : ~~elle a un manque de l'ordre~~, elle est trop concise et elle n'est pas bien ordonnée, car ce que j'ai mis à la fin aurait dû être mis au commencement et vice-versa. Je ~~savais~~ pensais ainsi même en l'écrivant : mais ~~X~~ voici la raison pour laquelle je l'ai écrite avec ces défauts. Je craignais d'~~abuser~~ de votre courtoisie en ajoutant au mémoire déjà assez long fait avec mon ami Loria ~~une note~~ un autre mémoire qui, si je l'avais fait selon mes désirs, l'aurait encore surpassé en longueur. C'est pour cela que j'avais commencé à vouloir en faire simplement une note qui fût jointe aux pieds du premier mémoire ; et comme cela m'avait été impossible j'en fis une note où, ~~malgré~~ bien que le premier but fût celui de corriger quelques fautes de M. Weiler, je ne pus me retenir de donner brièvement une idée ~~[illegible]~~ d'une méthode pour étudier et pour classifier les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2e degré double. Mais comme ~~X~~ l'idée ~~de~~ laquelle j'étais parti dans mes recherches était, précisément comme vous supposez, celle de la projection de l'intersection de deux surfaces du 2e ordre à 4 dimensions (dont l'une soit un cône ayant pour sommet ~~la~~ R_1 ou ~~le~~ R_2 ~~ou~~ ~~points doubles, lequel soit pour le R_1 ou R_2~~ par lequel on projecte), ~~je me~~ et

que j'avais déjà vu comment cette méthode donnait immédiatement la classification de tous les complexes quadratiques dont la surface singulière est réglée, je me sentis entraîné à donner à la fin de la note aussi une idée de ~~la méth~~ cette manière d'étudier ces complexes ; bien que cela sortît du titre de ma note. Maintenant que je ~~sais~~ vois qu'il ne vous déplaît pas que je vous envoie des mémoires pour les Annalen, même s'ils ont une certaine longueur, je ~~ne ferais~~ n'écrirais plus ma note de cette manière, mais j'exposerais complètement, ~~et~~ avec ordre et avec tous les détails nécessaires ~~cette~~ la classification obtenue par ~~cette~~ ma méthode des complexes à surface singulière réglée. Malheureusement il y a déjà quelques semaines que j'ai renvoyé à l'imprimerie Teubner les épreuves corrigées de cette note, de sorte que je ne crois plus ~~être à~~ qu'il soit temps de la refaire.

Mais ~~je compte~~ j'ai l'intention, si je ne puis plus refaire cette note, et si cela ne vous déplaît pas, d'écrire pour les ~~ott~~ Annalen, ~~si cela ne vous déplaît~~ une autre note où j'exposerai avec quelques détails ma manière d'étudier en général les complexes quadratiques ~~comme~~ des différentes espèces et leurs séries homofocales et ~~spécialement~~ surtout un théorème général ~~pour~~ sur les quartiques intersections des surfaces du 2e ordre dans un espace à n dimensions, théorème qui me semble très-important et qui m'a donné comme cas particuliers les théorèmes suivants :

« Soit ~~[illegible]~~ donnée la caractéristique (théorique) d'un complexe quadratique quelconque (~~il pourra y avoir des doubles~~ ensemble des exposants des diviseurs élémentaires divisés en groupes suivant les racines auxquelles ils appartiennent) ~~de diviseurs élémentaires isolés~~ à un exposant ~~pair~~ isolé de cette caractéristique correspondra un complexe linéaire fondamental isolé qui contiendra une congruence quadratique de tangentes doubles de la surface singulière ; or la caractéristique de cette congruence s'obtiendra de celle du ~~le~~ complexe en diminuant ~~seule~~ ~~ment~~ d'une unité ~~ce degré~~ et exposant, sans changer les autres. Par exemple les ~~droites~~ tangentes doubles ~~du~~ de la surface singulière du complexe [2 1 1 (1 1)] forment deux congruences quadratiques (appartenant à des complexes linéaires généraux) de l'espèce [2 1 (1 1)] et une congruence quadratique (appartenant à un complexe linéaire spécial) de l'espèce [$\bar{1}$ 1 1 (1 1)]. — Peut-être M. Schur a-t-il déjà aperçu cette proposition.

Si dans la caractéristique de notre complexe il y a un groupe de deux exposants ~~degrés entre ( )~~ la surface singulière est une surface réglée qui ~~d'un~~ de notre point de vue est la même chose qu'une courbe du 4e ordre et de 1e espèce, et a en conséquence, comme cette courbe, une caractéristique, qui sert à en donner toutes les particularités. Or on obtient cette caractéristique en diminuant d'une unité chacun de ces deux exposants ~~degrés qui entrent~~ dans la caractéristique du complexe. Par exemple la surface singulière du complexe [(1 1) 3 1] est une surface réglée de caractéristique [3 1], c'est-à-dire (courbe à point de rebroussement) une surface du 4e ~~ordre~~ degré ~~à~~ génératrice de rebroussement ~~conjuguée~~. Par exemple encore le complexe [(2 1) 3] a pour surface singulière une surface réglée appartenant à une congruence linéaire générale et ayant une génératrice de rebroussement [$\bar{1}$ 3], c'est-à-dire une surface réglée appartenant à une congruence linéaire ~~appartenant~~ spéciale et ayant une génératrice de rebroussement. La surface singulière du complexe [(3 1) 2] aura pour caractéristique [$\bar{2}$ 2], c'est-à-dire elle appartiendra aussi à une congruence linéaire spéciale et se décomposera en un faisceau et une surface réglée du 3e degré. La surface singulière [(3 2) 1] est la surface réglée ayant pour caractéristique [($\overline{21}$) 1] et appartenant en conséquence à une congruence linéaire décomposée en un plan avec un point ~~(et comme [(21)1] représente deux coniques qui se touchent)~~ : c'est donc

dans ~~des~~ quelque mémoire postérieur.

Agréez, Monsieur, mes salutations les plus respectueuses et affectueuses

Corrado Segre

P. S. Je reçois en ce moment votre lettre ~~de l'autre~~ d'avant-hier : je vous répondrai ~~longuement~~ avec beaucoup de détails demain ou au plus tard après-demain.

Puisque je rencontre ici les surfaces du 4e ordre à conique double, je veux vous demander si vous avez déjà remarqué ~~que la représental~~ qu'en considérant ces surfaces comme les projections centrales de l'intersection $F_2^{2.2}$ de deux F_3^2 dans R_4 on en obtient la représentation comme sur un plan (due à Clebsch) ~~aussi~~ très-simplement au moyen d'une projection faite non plus par un point mais par une droite R_1 contenue dans ~~cette intersection~~ $F_2^{2.2}$ sur un R_2 ou plan. Plus en général si dans un R_n on considère une $F_{n-2}^{2.2}$, on peut la représenter univoquement sur un R_{n-2} (pourvu que $n>3$) en la projetant sur celui-ci par l'un des ~~infinis~~ R_1 qu'elle contient ~~sur droites~~ ~~(qu'elle contient toujours pour $n \geq 4$)~~ : dans R_{n-2} on a alors un espace fondamental du 5e ordre R_{n-4}^5 dont chaque point correspond à une droite de $F_{n-2}^{2.2}$. Pour $n=5$ on a ainsi la représentation des complexes quadratiques dans l'espace ordinaire que vous avez trouvée en 1869 et qui a été dernièrement développée par M. Caporali.

~~Est-ce que une recherche j'avais faite~~ Parmi plusieurs autres recherches je pense depuis quelque temps à écrire un travail dont je veux vous demander si vous le jugeriez utile, car il y a des moments ~~que~~ dans lesquels j'en doute. Je possède toute la théorie et la classification des $F_2^{2.2}$ du R_4 et ~~je~~ au moyen de la projection dont je vous parlais les différentes représentations de ces $F_2^{2.2}$ sur un plan. Or j'en puis tirer toutes les surfaces du 4e ordre à conique double pouvant se décomposer en deux droites distinctes ou non : ~~celui~~ il y a une quarantaine de ces surfaces, de sorte qu'on peut dire que M. Kondörfer n'a fait que commencer cette ~~étude~~ ~~qu'esquisser cette~~ classification. Je voudrais donc l'exposer complètement

en ayant aussi égard aux focales dans le cas où ces surfaces sont des cyclides, et tout cela par les méthodes que j'ai apprises de vos travaux et sans faire usage d'équations. Mais comme la F_3^2 du R_4 peut aussi être représentée dans l'espace ordinaire par d'autres manières que par la projection stéréographique (et l'une de mes occupations dans ces derniers temps est justement celle d'étudier quelques autres représentations d'une F_3^2 dans le R_3), la classification des $F_2^{2.2}$ du R_4 me donne ainsi celle d'autres espèces de surfaces de l'espace ordinaire et, parmi les surfaces du 4e ordre, celles qui ont parmi leurs singularités une droite double et deux noeuds ou bien un point uniplenaire et deux noeuds. Ces deux espèces de surfaces du 4e ordre pourraient, à la vérité, venir étudiées au moyen de celles à coniques double par deux transformations rationnelles connues de l'espace ordinaire; mais je préférerais les obtenir toutes en même temps comme des transformations des $F_2^{2.2}$. Par exemple après avoir reconnues les propriétés de la $F_2^{2.2}$ qui a pour caractéristique [1 2 (11)], j'en déduirais celles d'une espèce de surface à conique double, de deux espèces de surfaces à conique double décomposée en deux droites distinctes, d'une espèce de surfaces à conique double décomposée en deux droites coïncidentes (suivant qu'on fait la projection stéréographique d'une F_3^2 générale quelconque passant par la $F_2^{2.2}$, ou bien d'un cône ayant pour sommet un R_0 ou un R_1), et puis de deux espèces de surfaces à droite double et deux noeuds, et de surfaces à point uniplenaire et deux noeuds. — Je voudrais en même temps interpréter les propriétés des différentes $F_2^{2.2}$ comme si elles étaient des congruences quadratiques, de manière à donner la classification de celles-ci et de leurs surfaces singulières. On aurait ainsi une contribution à la classification complète des surfaces du 4e ordre, laquelle ne comprendrait pas moins de cent espèces de ces surfaces : et il y aurait des représentations de ces surfaces sur un plan et entre elles qui ne laisserait pas de présenter des rapprochements intéressants entre leurs propriétés. Par exemple j'ai déjà vu des rapprochements parmi les surfaces à conique double générale et celles à coniques double décomposée qui les rendent pour ainsi dire identiques entre elles et qui ne paraissent pas avoir été aperçus par M. Kondörfer.

Mais vous voyez aussi que ce serait un travail très-long et qui, bien qu'une grande partie soit déjà faite dans ma tête me prendrait beaucoup de temps : c'est pour cela que je vous prie de me dire si vous croyez qu'il y aurait quelque utilité pour la science dans un tel travail. C'est une question un peu indiscrète que je vous fais là, mais je vous prie de me dire franchement ce que vous en pensez, car vous me ferez un véritable service : la science nous présente déjà assez de recherches importantes à faire pour que nous allions faire des recherches longues et presque inutiles : c'est pour cela que je désire savoir de vous, qui êtes beaucoup plus à même que moi d'en juger, ce qu'il vous semblerait de cette recherche.

Bien que ma lettre soit déjà très-longue je veux encore vous dire à propos de ce que vous m'écrivez sur le travail de M. Cayley sur le tétraédroïde que je m'en étais déjà aperçu lorsqu'il y a deux années j'ai lu ce travail. J'étais alors étudiant et je me rappelle qu'après l'avoir lu j'avais fait remarquer à mon camarade et très-cher ami Loria les fautes qu'il y avait en commençant par le point où l'auteur considère des plans passant par 4 noeuds du tétraédroïde et coupant celui-ci en deux coniques suivant l'auteur, qui ne remarque pas qu'ils contiennent encore deux autres noeuds et touchent en conséquence la surface le long d'une conique. Cependant je croyais que ces fautes eussent été corrigées par M. Cayley

une surface décomposée en une conique de la 2e classe et un cône quadrique, (et comme la courbe quartique ~~comme~~ [(21)11] se décompose en deux coniques ~~qui se touchent~~ ayant deux points communs qui coïncident dans le cas [(21)1]) ~~tels~~ qui sont tels que les deux droites qu'ils ont communes ~~dans~~ pour le cas [($\bar{1}$1)11] viennent coïncider dans notre cas.

~~Un ce théorème la classification des comp~~ Un théorème semblable a lieu pour le cas où la caractéristique du complexe eût un groupe de trois ~~éléments~~ exprimant ~~et~~ : on aura alors un quaterne de droites focales dont on connaîtra immédiatement la caractéristique. — ~~De même~~ Ainsi la classification des complexes quadratiques se réduit à celle des congruences quadratiques et des théorèmes analogues réduisent celle-ci à la classification des surfaces réglées biquadratiques et des quaternes focales, etc..

Comme cas particulier du même théorème général dont je parlais on a aussi les particularités des courbes focales (cycliques suivant Darboux) et des foyers proprement dits d'une surface cyclide quelconque. Ainsi la surface cyclide qui a pour caractéristique [21(11)] a sur la sphère fondamentale qui n'est plus nulle ~~a~~ une cyclique focale ~~de~~ [2(11)], ~~&~~ décomposée en ~~deux~~ deux cercles dont l'un se décompose encore en deux droites ; sur la sphère fondamentale nulle qui correspond au 2 une cyclique focale [$\bar{1}$1(11)] décomposée en deux cercles, et enfin sur le cercle fondamental qui correspond à (11) un quaterne de foyers proprement dits dont la caractéristique est [21] et dont en conséquence deux coïncident dans ~~les~~ point double.

Horr Prof. Felix Klein — Leipzig

Turin, le 3 Janvier 1884

Monsieur,

Merci pour votre lettre et pour ~~les~~ souhaits que vous me faites pour la nouvelle année : je vous en fais aussi et non pas par compliment, mais vraiment de cœur.

Ce que vous blâmez dans ma note sur certains complexes quadratiques c'est justement ce que j'y blâme : ~~elle a manqué d'ordre~~, elle est trop concise et elle n'est pas bien ordonnée, car ce que j'ai mis à la fin aurait dû être mis au commencement et vice-versa. Je ~~savais~~ pensais ainsi même en l'écrivant : mais ~~X~~ voici la raison pour laquelle je l'ai écrite avec ces défauts. Je craignais ~~d'abuser~~ de votre courtoisie en ajoutant au mémoire déjà assez long fait avec mon ami Loria ~~une note~~ un autre mémoire qui, si je l'avais fait selon mes désirs, l'aurait encore surpassé en longueur. C'est pour cela que j'avais commencé à vouloir en faire simplement une note qui tinsse aux pieds du premier mémoire ; et comme cela m'avait été impossible j'en fis une note où, ~~malgré~~ bien que le premier but fût celui de corriger quelques fautes de M. Weiler, je ne pus me retenir de donner brièvement une idée ~~concise~~ d'une méthode pour étudier et pour classifier les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2e degré double. Mais comme ~~X~~ l'idée ~~de~~ laquelle j'étais parti dans mes recherches était, précisément comme vous supposez, celle de la projection de l'intersection de deux surfaces du 2e ordre à 4 dimensions (dont l'une soit un cône ayant pour sommet ~~la~~ R_1 ou ~~le~~ R_2 ~~X~~ ~~points doubles, lequel est pour le R_1 ou R_2~~ par lequel on projecte), ~~je me~~ et

[23]

Enfin à pag. 50 avant de passer au numéro 26 vous dites que le complexe quadratique ~~peut~~ se correspond~~e~~ à soi-même relativement à des surfaces du 2e degré autres que les 10 fondamentales : or cela n'est ~~pas exact~~ vrai, du moins si j'ai bien compris ce que vous avez entendu dire.

~~Ma~~ dernière observation ~~est relative~~ n'est pas une correction, mais un doute, qui regarde ce que vous dites au commencement de votre travail : est-il juste de dire que les coordonnées de droites ont été introduites ~~par~~ dans la science par Plücker ? Moi aussi je suis habitué à nommer « coordonnées plückeriennes » les coordonnées p_{ik} de droites ; mais ne serait-il pas plus juste de les appeler « cayleyennes » ?

Avant de finir je veux vous dire que, selon mon avis, vous avez bien raison de donner de l'importance au théorème du n° 16 de votre dissertation : il a réellement beaucoup d'importance pour la théorie générale des formes quadratiques et cependant, non seulement il me semble tout-à-fait nouveau, mais encore il me semble qu'on ne l'a pas encore ~~assez~~ remarqué dans votre travail, ~~et que vous feriez bien de l'en~~ qui ~~peut~~ être n'a pas été assez lu par les analystes. Ainsi de votre théorème suit que l'équation $|s a_{ik} - b_{ik}| = 0$, dans laquelle $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ soit une forme qui réduite à une somme de carrés ait m ~~termes~~ carrés d'un signe plus que de carrés de l'autre signe, a au moins m racines réelles ; et il comprend comme cas particulier celui où cette forme étant définie, $m = n$ et cette équation aura toutes les n racines réelles, ce qui est un théorème connu, dont je n'ai jamais vu qu'on connaisse la généralisation qui est contenue dans le vôtre.

Agréez de nouveau mes salutations et tâchez de me donner le plus souvent que vous pourrez l'occasion de vous être utile.

Corrado Segre

Herrn Prof. Felix Klein — Leipzig

Turin, le 5 Janvier 1884

Monsieur,

Me voici à répondre à votre dernière lettre, dont je vous remercie beaucoup, puisqu'elle me donne la manière de vous faire un petit service, quelque insignifiant qu'il soit.

Je approuve votre idée de publier ~~nouvellement~~ dans les Annalen votre Inaugural-Dissertation : il me semble que depuis quelques ~~temps~~ années la géométrie de la droite soit injustement négligée par les géomètres et cette publication pourrait ~~aussi~~ servir aussi à leur rappeler ~~aux~~ cette branche des mathématiques. J'avais déjà trouvé quelques petites inexactitudes dans votre travail lorsque je l'avais étudié : ~~ou~~ à la suite de votre lettre je l'ai relu complètement et voici ce que j'y ai trouvé à corriger (quelques unes des corrections sont relatives à des fautes d'impression dans des formules : mais je crois bien de vous les dire aussi)

Aux pages 3 et 5 les formules (2) et (4) doivent être changées dans les suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} p_4 z_2 + p_5 z_3 + p_6 z_4 = 0 \\ p_4 z_1 - p_3 z_3 + p_2 z_4 = 0 \\ p_5 z_1 + p_3 z_2 - p_1 z_4 = 0 \\ p_6 z_1 - p_2 z_2 + p_1 z_3 = 0 \end{cases}$$

et celles qui s'en déduisent en changeant les lettres p, z dans les q, y.

À la page 8, lignes 3 et 4 on doit dire « das Verschwinden des zweiten oder ersten Factors » (la même correction doit être faite dans le mémoire du tome II des Math. Ann dans les dernières lignes de la pag. 200)

A la pag. 13, dernières lignes, les deux produits de déterminants qui s'annullent en vertu des relations (10) ne sont pas ceux-là, mais bien

$$\Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33} \cdot \Sigma \pm b_{41} b_{52} b_{63}$$

et

$$\Sigma \pm b_{14} b_{25} b_{36} \cdot \Sigma \pm b_{44} b_{55} b_{66} .$$

Puis dans les premières lignes ~~il con~~ de la pag. 14 il convient de supposer que les facteurs qui s'annullent sont non pas ceux qui y sont désignés mais bien

$$\Sigma \pm b_{11} b_{52} b_{63} , \quad \Sigma \pm b_{14} b_{25} b_{36} ,$$

et cela afin qu'effectivement comme vous dites à pag. 15 les droites P'_1, P'_2, P'_3 se coupent en un point et les droites P'_4, P'_5, P'_6 soient en un plan.

A ce propos il y a dans cette première partie de votre dissertation une suite d'inexactitudes qui seraient toutes corrigées si à la pag. 6 où vous définissez les arêtes du tétraèdre $P_1, P_2 \ldots P_6$ vous échangiez ~~ceux~~ ces dénominations de manière que les arêtes

$$O_1O_2 , \quad O_1O_3 , \quad O_1O_4 , \qquad O_3O_4 , \quad O_4O_2 , \quad O_2O_3$$

fussent appelées respectivement

$$P_4 , \quad P_5 , \quad P_6 , \qquad P_1 , \quad P_2 , \quad P_3$$

ou $Q_1 , \quad Q_2 , \quad Q_3 , \qquad Q_4 , \quad Q_5 , \quad Q_6 ,$

de manière que ceux qui passeraient par un même point seraient maintenant les arêtes P_4, P_5, P_6, tandis que P_1, P_2, P_3 seraient dans un plan (la même modification devrait être faite à la pag. 13 pour les P' et alors ~~on~~ ne devrait plus faire la correction précédente). — Mais si, comme je suppose, vous préférez conserver aux symboles P_i et Q_i la signification que vous leur avez donnée à pag. 6, alors voici les corrections qu'on devra faire :

A pag. 6 on devra dire que pour l'arête $P_x \equiv Q_{x+3}$ s'annullent toutes les coordonnées, hors « diejenige, welche wir mit $\underline{p_x \equiv q_{x+3}}$ bezeichnet haben ».

A pag. 7 on devra dire que l'équation $\underline{p_{x+3} = 0}$ est satisfaite par les droites « welche die Coordinaten-Kante P_x schneiden » et ~~après~~ ensuite : on devra dire « Wenn für die Kante P_x selbst alle Coordinaten bis auf die eine, $\underline{p_x}$, verschwinden .... »

A pag. 12, 13 dans les formules (8), (9) ~~dont elle modifiée ainsi~~ on devra mettre au lieu de $a_{x,\lambda+3}$, $b_{x,\lambda+3}$ resp. $a_{x+3,\lambda+3}$ et $b_{x+3,\lambda+3}$ (ou bien, si l'on veut p_{x+3} au lieu de p_x)

~~(6) de la formule (8)~~ $\cancel{p_x = \sum_\lambda a_{x+3,\lambda+3} \cdot p'_\lambda}$

et deux lignes après il faudra dire « die Kante $\underline{P_{x+3}}$ » et non pas P_x, et ensuite « das Verschwinden des Ausdrucks $\underline{\sum_\lambda a_{x+3,\lambda+3} \cdot p'_\lambda}$ ». — ~~A pag. 13 dans la formule (9)~~ De même à pag. 14 dans les formules (12), (13) au lieu de $b_{x+3,\lambda}$ il faudra mettre $b_{x,\lambda}$.

Dans l'autre partie de votre travail, qui est aussi la plus importante, je n'ai trouvé rien à corriger, excepté dans les dernières pages ~~(15 ou il manque toujours un facteur i. Ainsi~~ A pag. 45, dernières lignes on devra écrire

$$X_1 + i X_2 = 0 , \qquad X_1 - i X_2 = 0 .$$

De même dans toutes les équations de la pag. 46 on devra au second terme ajouter un facteur i ; et à pag. 47 les équations des dernières lignes doivent être modifiées ainsi qu'il suit : . . . . . .

A pag 48 les équations 3e et 4e ~~il faut écrire~~ doivent être écrites ainsi : ... et quelques lignes après on doit écrire $\sqrt{2}\, z'_3 = z_2 + z_3$

$I\left(\frac{n+1}{2}\right)$ $I\left(\frac{n+1}{2}\right)$ $n=2m$ $I\left(\frac{n}{2}\right)+1$ $n=2m+1$ $\frac{2m+1}{2}$

~~Principe~~ Depuis ~~les~~ dernières lettres que je vous ai écrites j'ai fait une ~~autre~~ nouvelle application du principe du « Projiciren und Schneiden », qui avait occupé jadis M. Veronese. Dans l'espace à $n+1$ dimensions j'ai trouvé qu'il y a $\frac{n}{2}+1$ ou $\frac{n-1}{2}+1$ espèces de surfaces réglées à 2 dimensions d'ordre n F_2^n (rationales) ~~telles que~~ de sorte que deux surfaces de la même espèce sont projectives entre elles. Or en projetant ces F_2^n par un R_{n-3} ou un R_{n-2} ~~dans~~ sur un espace ordinaire ou ~~dans~~ sur un plan j'~~en obtient~~ ai obtenu toute la théorie ~~de la représentation~~ des surfaces réglées rationales de l'espace ordinaire et de leurs représentations sur un plan qui a été donnée par Clebsch dans un mémoire du tome V des Annalen. La recherche est très-intéressante.....

Mais je abuse de votre patience et de votre temps en vous parlant un peu trop de mes recherches. Veuillez m'~~excuser~~ excuser, et disposez toujours de moi, si je puis vous être utile.

Votre

Corrado Segre

24

Herrn Prof. Dr. Felix Klein .. Leipzig

Turin le 19 Janvier 1887

Monsieur,

Avant tout je vous assure que ~~Ce~~ ce sera avec plaisir que je ~~me~~ ~~occuperai~~ m'occuperai de la correction des épreuves de votre dissertation, si vous voudrez m'en charger. Vous n'aurez qu'à me ~~les~~ l'envoyer et je vous promets d'y mettre tous les soins possibles.

Quant au mémoire de vous et de Lie sur les tangentes principales de la surface de Kummer la seule demonstration qui n'est peut-être pas tout-à-fait satisfaisante est selon moi celle donnée au n° II pour prouver que la courbe du 16e ordre, lieu ~~des points~~ des points de la surface ~~dont~~ dans lesquels ~~plures tangentes~~ les faisceaux des ~~les~~ droites tangentes appartiennent au complexe quadratique, est une courbe des tangentes principales. Mais il ne faut y faire qu'une petite modification pour la rendre tout-à-fait rigoureuse (~~et je ne suis même pas~~ et à l'abri de toute objection, et vous pourrez le faire en réimprimant ce mémoire ~~vous~~ le trouverez bon, ~~voulez~~, dans une note. Voici comment on pourrait raisonner:

Dans un plan ~~singulier~~ tangent quelconque à la surface de Kummer la courbe du complexe quadratique considéré se décompose en deux points K_1, K_2 qui appartiennent à la courbe ~~(du 4e ordre et de~~ et ~~sont~~ sur une même droite (singulière) avec d'intersection de la surface avec ce plan ~~passent par ces points et sont dans~~ le point double O de cette courbe. ~~le point de contact un point double O tel que la droite K_1K_2 passera par~~ (singulière) Par chacun des deux points ~~Il suit que~~ ~~par~~ K_1 et K_2 passent 8 tangentes de cette courbe (en dehors des tangentes en K_1, K_2) ~~(en dehors des tangentes en K_1 K_2~~ (du 4e ordre et de la 10e classe) et leurs points de contact sont, d'après ce qui a été dit au n° I, les 16 points d'intersection du plan avec la courbe du 16e ordre considérée. Or si ce plan (ou, si l'on aimait mieux, le complexe quadratique dans la série homofocale) se meut de manière que ~~le plan pa~~ le point K_1

vienne coïncider avec O, alors ~~deux~~ l'une des tangentes menées par K_2 ~~coïncideront~~ ~~dans la seule~~ viendra coïncider avec la droite OK_2 ~~laquelle sera~~ c'est-à-dire avec l'une des deux tangentes ~~princ~~ principales relatives au point O de la surface, ~~tandis q~~ et deux des tangentes menées par K_1 viendront coïncider dans l'autre tangente principale. ~~relative a~~ Donc 3 des 16 points coïncideront en O, c'est-à-dire le plan sera devenu osculateur à la courbe du 16e ordre ; donc celle-ci a pour plans osculateurs des plans tangents à la surface et en est par conséquence une courbe des tangentes principales ~~par~~ en vertu d'un théorème connu. — Il n'est même pas nécessaire de recourir à celui-ci pour prouver votre proposition, car il suffit de remarquer que ~~comme~~ puisque en s'approchant K_1 à O indéfiniment deux des tangentes à la courbe d'intersection menées par K_1 ~~vraisemblement~~ tendent à coïncider en l'une ~~tang~~ des deux tangentes en O à cette courbe, la droite qui en joint les points de contact tend aussi à coïncider avec cette ~~droite~~ tangente et d'ailleurs ~~elle les~~ comme elle joint deux points de la courbe du 16e ordre ~~lesquels~~ qui s'approchent indéfiniment ~~on voit qu'~~ elle tend aussi à devenir tangente à ~~cette~~ celle-ci ~~courbe~~. Donc les tangentes de la courbe du 16e ordre sont tangentes principales pour la surface et on voit en outre que ~~elles ne sont pas~~ pour chaque point de cette courbe ce n'est pas la tangente à celle-ci mais l'autre tangente principale de la surface qui est ~~une~~ une droite singulière pour le complexe quadratique.

Je vous remercie de vos conseils pour mes recherches : je ne manquerai pas de les suivre. — Quant au mémoire de Reye dans le vol. 95 du Journal je j'ai vu en le lisant qu'il ne contient rien que je ne connusse déjà. Tous les résultats qu'il contient je les avais déjà ~~for~~ exposés avec plusieurs autres dans ma thèse (dont ~~la publication~~ l'impression dans les mémoires de notre Académie se fait un peu ~~trop~~ lentement.), mais d'une ~~autre~~ manière un peu différente. Je ne crois pas qu'il soit bon, dans l'état présent de la science, de se mettre à faire, comme M. Reye, une théorie des complexes de sphères, puis une théorie des complexes de complexes linéaires, puis ... que sais-je ? peut-être une théorie des complexes de surfaces ~~d'ordre~~ du 2e, 3e, ... ordre. Puisque l'on sait que ~~les th~~ ces théories sont identiques entre elles (en dehors de la considération du groupe fondamental de transformations que l'on ne considère pas assez souvent) et qu'elles ne diffèrent que par le nom de l'élément (sphère, droite, surface, etc.) et par le nombre des dimensions, il vaut mieux de ~~étudier la géométrie~~ faire les recherches dans l'espace à n dimensions et puis en déduire tout comme cas particuliers. C'est ainsi que lorsque je me suis mis à réfléchir sur la théorie des complexes quadratiques de droites et de leurs séries homofocales (et notez bien qu'alors je ne connaissais pas encore votre manière de considérer la géométrie de la droite, de sorte qu'en lisant plus tard votre mémoire « Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie » j'étais empêché d'y retrouver ce qu'avec beaucoup de fatigue j'avais trouvé par moi-même) ~~si on qu'il était bon~~ j'ai été porté naturellement à étudier les surfaces du 2e degré et leurs intersections dans un espace quelconque et à en tirer comme cas particuliers non seulement les complexes quadratiques, mais encore les congruences quadratiques et les cyclides.

25

Herr Prof. Felix Klein

(cartolina postale)

Turin, le 8 Février 1884

Monsieur

Je vous écris pour vous demander une petite faveur. J'avais envoyé il y a quelque temps à M. Schlömilch pour sa Zeitschrift une note qui regardait surtout le complexe quadratique des droites qui ont un moment donné par rapport à une droite fixe. Par la nature élémentaire de cette note, elle me paraissait adaptée pour la Zeitschrift. Mais comme je l'avais écrite en français je reçois à présent, dans ce moment-même, une lettre de M. Schlömilch qui, en me faisant remarquer que dans son journal ne paraissent que des travaux écrits en allemand, m'offre de faire parvenir mon manuscript à la rédaction des Mathematische Annalen, pour le faire imprimer dans ceux-ci. Je lui ai répondu que oui, qu'il en fasse ainsi; et je vous prie de vouloir recevoir ma note: mais de ne pas la publier sans vous être assuré, ou par vous-même ou par quelqu'un de vos collaborateurs, qu'elle n'est pas trop élémentaire pour les Annalen. J'ai écrit cette note entre deux travaux de géométrie à n dimensions, pour me reposer de ces recherches difficiles avec une recherche simple: et je ne voudrais pas charger vos Annalen de choses inutiles.

J'espère que vous aurez reçu ma note du Giornale di matematiche: comme je l'ai écrite lorsque j'étais encore étudiant, on peut m'excuser si elle n'a

pas beaucoup d'importance.

Recevez mes remerciments et mes salutations les plus respectueuses et affectueuses

Votre Conrado Legre

26

Herr Prof. F. Klein

Turin, le 29 Février 1884

Monsieur,

~~J'ai~~ J'ai reçu votre pli et je n'ai qu'à vous remercier de votre bonté pour m'avoir renvoyé mon manuscript : il me déplait ~~que~~ de vous avoir incommodé et causé même une légère dépense en vous faisant passer ce travail, qui aurait pu être imprimé ailleurs comme « kleine Mittheilung », mais ~~non pas~~ qui n'était certainement pas adapté pour les Annalen : je suis aussi en cela de votre avis.

J'écrirai donc, puisque vous m'y encouragez, peut-être un mémoire un peu plus important pour les Mathematische Annalen : ce sera, ~~comme~~ une étude dont je vous avais déjà écrit, ~~une étude~~ faite au moyen du R_4 des surfaces du 4e ordre à conique double ou ~~unpic~~ de rebroussement, générale ou décomposée, ~~étude~~ ~~que on peut faire très-simplement au moyen du R_4~~ ~~je ferai~~. Je suis en doute si je dois étudier en même temps les congruences quadratiques ou non (une ~~étude~~ classification ~~de~~ complète de celles-ci avait été promise par M. Scheer, mais je ne sais s'il y pense encore). Ce que je laisserai certainement de part ce seront d'autres classes de surfaces du 4e ordre : je suis en cela votre conseil et je me bornerai, à indiquer la méthode en général, sans m'arrêter à la développer dans ~~tous~~ pour celles-ci les cas particuliers ~~sans la développer complètement~~.

Je m'occupe aussi en ce moment de la théorie générale des sur-

faces du 4e ordre, mais j'y trouve bien de difficultés ....

Je suis ~~très content~~ heureux que M. Schur vienne nous faire visite, car je désire vivement en faire la connaissance personnelle, et devenir l'un de ses amis. Veuillez lui dire que je suis dès-à-présent à sa disposition et que ~~s'il~~ quelques choses, qu'il lui faille, ~~des~~ ~~lui faut quelques~~ ~~renseignements, que dois-je?~~ il n'a qu'à me l'écrire. Il verra probablement notre exposition nationale qui promet déjà d'être une chose vraiment belle et digne d'être vue. — Et vous, Monsieur, est-ce que vous ne saisirez pas cette occasion pour venir faire une visite à Turin et à vos amis d'ici? Il nous ferait tant de plaisir de pouvoir vous saluer et vous parler de vive voix .... Est-ce que vous ne me laissez pas cet espoir?

J'attends toujours les épreuves de votre Dissertation; ne manquez pas de me laisser vous faire ce ~~petit~~ service, ~~tout~~ quelque petit qu'il ~~est~~ soit, car vous me l'avez presque promis. ~~Et~~

Votre ~~très dévoué~~

Corrado Segre

Herrn Prof. Dr. F. Klein. — Leipzig

Turin, le 15 Mars 1884

Monsieur,

~~J'ai presque~~ Dans deux jours j'aurai fini d'écrire (en langue française) le mémoire pour les Mathematische Annalen, dont je vous avais parlé dans ma dernière lettre; mais comme il m'est réussi long outre mesure (une centaine de pages) je tiens, avant de le copier et de vous l'envoyer, à vous expliquer avec quelques détails ce qu'il contient afin que vous puissiez me dire si vous l'acceptez tout-de-même, malgré sa longueur.

Il y a une année que je pense à ce travail et j'en avais déjà dans la tête plusieurs résultats sans encore avoir pu jusqu'à présent en écrire un mot. L'année passée mon ami Loria et moi ~~dans~~ ces jours-ci nous écrivions nos thèses: Loria avait choisi pour thème la géométrie des sphères et la classification des cyclides; moi, j'avais choisi l'étude des F^2_{n-1} ~~dans~~ et de leurs intersections dans R_n, et l'application de ces études à la théorie et à la classification des complexes et des congruences quadratiques et des surfaces réglées biquadratiques. Et comme de cette manière j'étudiais aussi l'intersection de deux F^2 dans R_3, j'étais porté naturellement (surtout en ayant lu alors votre mémoire "Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie" et l'ouvrage de M. Darboux sur les cyclides) à projecter cette intersection sur R_3 et à obtenir ainsi la ~~clas~~ théorie et la classification des cyclides que développait en même temps Loria. En comparant les difficultés que chacun de nous par sa propre méthode trouvait pour parvenir aux mêmes résultats, je devins enthousiaste de ma méthode qui me donnait une réponse immédiate à chaque ~~question~~ question que je me proposais sur cette théorie. Cette méthode avait aussi l'avantage que l'étude d'une seule surface dans R_4 me donnait plusieurs surfaces

ou bien les points-clos de la conique cuspidale et toutes leurs différentes propriétés par une méthode ~~directe~~ qui ne pourrait être plus facile et qui me ~~permet~~ donne une vérification très-jolie des résultats de M. Beuthen sur cette théorie (Math. Ann. X) — les droites (et les cubiques) de la surface s'obtiennent très-facilement dans chaque cas; de même les quadriques doublement tangentes, les cônes de Kummer, les inversions (en sens projectif) qui transforment chaque surface en soi-même, etc. Je vous ai aussi indiqué autrefois comment j'obtiens les résultats de Clebsch (et de Korndörfer) pour la représentation de ces surfaces sur un plan au moyen d'une simple projection de la $F^{2,2}_2$ par l'une de ses droites sur un plan: en particulier j'obtiens ainsi la représentation plane connue de la surface de Steiner, surface dont je ne crois pas que l'on eût jusqu'à présent rattaché la théorie à celle plus générale des surfaces quartiques à conique ~~double~~. — Dans les cas où la conique double ou cuspidale ne se décompose pas je considère aussi l'hypothèse qu'elle soit l'absolu, c'est-à-dire que la surface soit une cyclide; et j'obtiens ainsi toutes les propriétés connues des cyclides et d'autres que je crois nouvelles; par exemple ces particularités des quartiques focales et des foyers de chaque espèce de cyclides dont je vous avais parlé autrefois.

A la fin du travail je m'occupe des invariants absolus d'une cyclide pour le groupe des inversions, et voici le théorème auquel j'arrive: Si pour un point quelconque de l'espace on prend le lieu des ses points conjugués harmoniques ~~par~~ par rapport aux deux points dans lesquels une droite passant par lui et ~~coupant~~ appuyée sur l'absolu coupe encore une cyclide, ce lieu est un cercle que j'appelle le cercle polaire du point ~~relatif~~ par rapport à la cyclide (analogue de la congruence polaire d'une droite par rapport à une complexe quadratique). Et parmi les

dans R_3.

Maintenant j'ai développé ce qu'alors j'avais seulement pensé. J'ai laissé de côté ~~aussi~~ les congruences quadratiques (qu'après ce travail il me sera facile d'étudier dans un autre mémoire, et qui m'auraient doublé la longueur de celui-ci) et je me suis borné exactement à ce thème : étudier les principales propriétés de toutes les surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale, générale ou décomposée en deux droites (distinctes ou coïncidentes) en considérant ces surfaces comme les projections des $F_2^{2.2}$ du R_4. Je n'ai ~~pas~~ fait aucun usage d'~~une certaine~~ équations, et la méthode que j'ai suivie est tout-à-fait synthétique, si l'on en excepte quelques propositions sur les $F_2^{2.2}$ que j'ai prises de ma thèse et dont d'ailleurs la demonstration est des plus faciles. Soit une $F_2^{2.2}$ du R_4 (intersection d'un faisceau de F_3^2) et qu'on la projète sur R_3 par un point P : suivant que ~~celle~~ la F_3^2 passant par cette $F_2^{2.2}$ et par P est ~~une surface~~ générale, ou un cône de 1e espèce (~~c'est à~~ un R_0-cône), ou un cône de 2e espèce (un R_1-cône), la projection sera une surface quartique à conique double générale ou décomposée en deux droites ou réduite à une droite bi-double. Si en outre dans le 1er cas on prend P de façon que l'espace (linéaire à 3 dimensions) tangent en P à cette F_3^2 soit aussi tangent à un cône de 2e espèce du faisceau, la surface quartique sera à conique cuspidale. Si dans le 2me cas le cône de 1e espèce dans lequel se trouve P a son sommet sur la $F_2^{2.2}$, la surface quartique à deux droites doubles aura dans le point d'intersection de celles-ci un point triple. On voit donc que les espèces de surfaces quartiques que l'on obtient ainsi dans R_3 sont fort différentes entre elles et très-nombreuses. J'en trouve ainsi plus de soixante (parmi lesquelles il y en a plusieurs qui sont très-intéressantes ; il ~~me~~ suffit d'en nommer une : la surface de Steiner) : je crois que presque la moitié de ces surfaces sont nouvelles : ainsi je ne sais pas que l'on ait déjà étudié les surfaces quartiques ayant un point triple par lequel passent deux droites doubles, ni les surfaces à deux droites doubles (distinctes ou non) et un point biplanaire ou uniplanaire ; ni que l'on ait considéré tous les cas que peut présenter une surface quartique à conique cuspidale (à ce propos vous me feriez plaisir en m'indiquant si outre le travail de M. Kötössy Béla dans les Math. Ann. XIX, ~~il y a~~ vous connaissez d'autres travaux sur les surfaces quartiques à conique cuspidale, écrits dans des langues que je puisse comprendre). Surtout, et c'est presque là ce qui m'importe de plus, la méthode que je suis toujours et que je vous ai indiquée, n'a jamais été appliquée à cette étude (bien que M. Veronese, à ce qu'il m'écrit, en ait déjà eu l'idée), à laquelle elle semble à plusieurs égards la plus adaptée.

Je applique cette méthode à toutes les questions que se sont proposées Clebsch, ~~et~~ Darboux et Casey sur la surface générale, et que ces deux derniers, Kowalewski, Béla, et mon ami Loria se sont proposées sur leurs cas particuliers. Par exemple Coupons la $F_2^{2.2}$ par les ∞^4 espaces linéaires à 3 dimensions contenus dans R_4 et nous avons ∞^4 courbes biquadratiques dans cette $F_2^{2.2}$: en projectant nous voyons que chacune de nos surfaces contient ∞^4 courbes biquadratiques, ~~parmi lesquelles~~ et que les ∞^3 sections planes sont des projections de telles courbes gauches. (M. Béla se trompe en en trouvant seulement ∞^3 sur celle à conique cuspidale) ~~Cela~~ Cette dernière remarque me donne la manière de reconnaître toutes les singularités des intersections de ~~cette~~ ces surfaces avec certains plans. Ainsi je trouve directement les points-pinces de la conique double

sphères du faisceau déterminé par ce cercle il y en a ~~une~~ qui ~~est~~ sont orthogonales aux sphères directrices (ou fondamentales) de la cyclide et de sa série homofocale ; et dans le cas où la cyclide aurait un faisceau de sphères directrices (par exemple il y en a deux pour la cyclide de Dupin) il y a parmi les sphères passant par ce cercle une qui est orthogonale à tout ce faisceau. Le groupe de ces sphères passant par un cercle polaire a des ~~invariants absolus~~ rapports anharmoniques (~~rapports~~ qui ne varient pas en changeant le point dont ce cercle est polaire ~~si~~ en ~~changeant~~ substituant à la cyclide considérée une cyclide quelconque de sa série homofocale : ces ~~invariants~~ rapports anharmoniques sont justement les invariants absolus de cette série homofocale. Si, entre ces sphères passant par le cercle polaire d'un point par rapport à une cyclide on prend la sphère nulle qui a ce point pour centre, le groupe de sphères d'un faisceau que l'on obtient ainsi a pour rapports anharmoniques tous les invariants absolus de cette cyclide particulière. Deux cyclides (ou séries homofocales de cyclides) qui aient ainsi les mêmes invariants absolus peuvent se transformer l'une dans l'autre ~~par une suite~~ au moyen d'une suite (finie) d'inversions. — Ces théorèmes sont tout-à-fait analogues et ont la même origine que les théorèmes sur les invariants absolus des complexes quadratiques dans la géométrie projective.

Sans que cela vous engage encore pour ~~lequel~~ le cas où en examinant plus tard ce travail il ne vous plairait pas, je voudrais savoir si ~~la~~ la longueur ne suffit pas pour vous empêcher ~~pas~~ de le faire imprimer dans les Annalen (sans le couper en parties ; car il est de telle nature qu'il doit être publié tout entier). Il me déplairait devoir publier ailleurs que dans votre journal ce travail auquel j'ai une certaine affection ; cependant vous gênez pas pour me dire non, si vous craignez qu'un travail si long puisse [illegible] aux lecteurs des Annalen. — Et ~~veuillez aussi~~ il n'est pas nécessaire que

je vous dise que si vous avez quelques conseils à me donner, soit pour des questions que je devrais ou ne devrais pas étudier dans ce mémoire, soit pour des travaux sur cette matière que je ne paraisse pas connaître, vous me ferez une véritable faveur en me les donnant.

En attendant avec impatience votre réponse ~~agréez mes~~ (1) je vous salue cordialement

Votre

Corrado Segre.

~~P.S.~~ (1) Dans le cas où ~~votre réponse~~ ~~elle~~ elle serait affirmative veuillez aussi me dire dans quel cahier le mémoire pourra être publié : quant à moi je vous ferais avoir le manuscript dans ~~trois ou quatre~~ quelques semaines.

P.S. Je reçois en ce moment les copies d'une de mes notes et je m'empresse à vous en envoyer une. C'est une note sur les géométries métriques des complexes linéaires et des sphères et vous connaissez déjà quelqu'un des résultats qu'elle contient : cependant comme, lorsque je vous en avais parlé, je n'avais pas pu vous expliquer ma méthode, je serais heureux si vous y donniez un ~~coup~~ regard.