

SI 11

E. Segre

Sulle stelle di raggi e pianeti

(November 1881)

SI 12

1

Stella

Riprendiamo l'equazione (a 3 membri) di un raggio di una stella

$$\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_3}{\alpha_3}$$

e vediamo che cosa siano le coordinate omogenee $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ di quel raggio (nella stella, badiamo). Siano anzitutto M_1, M_2, M_3 nella forma normale. Allora quel raggio giace nel piano $\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2}$, e questo è tale (lo mostra l'equazione) che ogni suo punto ha dai 2 piani fissi M_1, M_2 distanze che stanno tra loro come α_1 ad α_2 . Dunque in questo caso ogni punto del raggio considerato ha dalle 3 facce M_1, M_2, M_3 del nostro trichio di riferimento distanze che stanno tra loro come $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$. In altri termini i seni degli angoli che quel raggio fa con quelle 3 piani di riferimento stanno tra loro come $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$. Fra quei seni, poi, passa una certa relazione, colla quale conoscendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ si potranno trovare i seni stessi e quindi il raggio considerato.

Ma poniamo ora che M_1, M_2, M_3 siano qualunque. Diciamo μ_1, μ_2, μ_3 tre quantità (costanti) tali che $\frac{M_1}{\mu_1}, \frac{M_2}{\mu_2}, \frac{M_3}{\mu_3}$ siano in forma normale: saranno subito calcolate, quando siano dati effettivamente M_1, M_2, M_3 . Allora le distanze di un punto qualunque dai 3 piani coordinati della stella saranno $\frac{M_1}{\mu_1}, \frac{M_2}{\mu_2}, \frac{M_3}{\mu_3}$. Diciamo d_1, d_2, d_3 queste distanze per un punto qualunque del raggio considerato. L'equazione di questo ci darà:

$$\frac{\mu_1 d_1}{\alpha_1} = \frac{\mu_2 d_2}{\alpha_2} = \frac{\mu_3 d_3}{\alpha_3}$$

ossia:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \mu_1 d_1 : \mu_2 d_2 : \mu_3 d_3$$

Dunque le coordinate di un raggio della stella sono proporzionali ai seni degli angoli di quel raggio coi 3 piani coordinate moltiplicati per date costanti (μ_1, μ_2, μ_3). Queste coordinate si diranno proiettive.

Diciamo M_1, M_2, M_3 , e m_1, m_2, m_3 i piani e gli angoli opposti del triedro di riferimento. Diciamo r il raggio considerato, ed ℓ il raggio le cui coordinate sono l'unità. ~~d'esso~~ È chiaro che il piano m_1 e r ha coi due piani coordinate $\frac{m_1}{M_1}, \frac{m_2}{M_2}, \frac{m_3}{M_3}$ angoli i cui seni stanno tra loro come le distanze di un punto qualunque di quel piano, con e quindi di r da quei 2 piani, cioè il rapporto di quei seni è uguale a ~~$\frac{d_1}{d_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$~~ . ~~Quel rapporto di seni~~ Da quel rapporto di seni per raggio è (1.1.1) invece che per r sarà ~~$\frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{M_2}{M_3}$~~ . Il rapporto adunque di quei rapporti, cioè il rapporto anarmonico dei quattro piani $m_1(m_2, m_3, e r) = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$. Analogamente: $m_2(m_1, m_3, e r) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$, $m_3(m_1, m_2, e r) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Dunque i rapporti delle coordinate proiettive di un raggio della stella sono i rapporti anarmonici formati dalle coppie corrispondenti di piani coordinati con quel raggio ed il raggio unito (e).

Veniamo alle cose analoghe riguardanti il piano

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 0$$

della stella. Si è qui indifferente la forma delle equazioni $M_i = 0$, ecc. che

3

possiamo subito utener generale. Vogliamo vedere che cosa sien le coordinate a_1, a_2, a_3 di quel piano che chiameremo P . ~~Consideriamo~~^{Consideriamo} i semi degli angoli che esso fa cogli assi coordinati m_1, m_2, m_3 . Sia p , l'intersezione di P con M_1 , avremo: $\frac{\sin Pm_2}{\sin Pm_3} = \frac{\sin p_1 m_2}{\sin p_1 m_3}$ (dalla considerazione di due tricoli rettangoli aventi P, M_1 per due facie comuni). Ora considerando il tricolo $p_1 m_2 m_3$ e poi il tricolo $p_1 m_3 m_2$ si ha: $\frac{\sin p_1 m_3}{\sin p_1 m_2} = \frac{\sin(M_2, m_1, p_1)}{\sin(M_3, m_1, p_1)} \frac{\sin m_2}{\sin m_3}$. Ora dall'equazione del piano si ha che quella del piano m_1, p , è: $a_2 M_2 + a_3 M_3 = 0$, ossia $\frac{M_2}{M_3} = -\frac{a_3}{a_2}$ ed indicando ancora con M_1, M_2, M_3 le stesse quantità che più sopra: $\frac{M_2}{M_3} : \frac{M_3}{M_2} = -\frac{M_2}{M_3} \frac{a_2}{a_3}$ ossia $\frac{\sin(M_2, m_1, p_1)}{\sin(M_3, m_1, p_1)} = -\frac{M_2}{M_3} \frac{a_2}{a_3}$. Dunque sostituendo: $\frac{\sin Pm_2}{\sin Pm_3} = -\frac{a_2}{a_3} \frac{\sin m_1 m_3}{M_2} : \frac{\sin m_1 m_2}{M_3}$. Ne concludiamo finalmente che: $\frac{a_2}{a_3} = \left(\frac{M_2}{\sin m_1 m_3} \sin Pm_2 \right) : \left(\frac{M_3}{\sin m_1 m_2} \sin Pm_3 \right)$, cioè che le coordinate proiettive di un piano stanno tra loro come i semi moltiplicati per date costanti degli angoli di quel piano coi tre assi coordinati. Significato affatto correttivo a quello delle coordinate di un raggio. Gli è che nella geometria della sfera non esendono a considerare angolo e distanza, ma solo l'angolo, la dualità si estende anche a parecchie proprietà metriche, a differenza del piano.

Ma v'ha di più. Consideriamo il piano E di coordinate 1 e siano e_1, e_2, e_3 le sue intersezioni coi 3 piani coordinati. I piani $M_2 = 0, M_3 = 0, M_2 + M_3 = 0, a_2 M_2 + a_3 M_3 = 0$ hanno rapporto anarmonico uguale a:

$$+1 : \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_2}{a_3}. \text{ Dunque } M_1(M_2, M_3, EP) = \frac{a_2}{a_3} \text{ e analogamente } M_2(M_3, M_1, EP) = \frac{a_3}{a_2}$$

6

$M_3(M_1 M_2 EP) = \frac{a_1}{a_2}$ ossia: i rapporti delle coordinate proiettive di un piano della stessa sono i rapporti anarmonici formati dalla coppia corrispondente di primi raggi coordinati con quel piano ed il piano unito.

E finalmente ricordiamo l'equazione di posizione unita

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = 0$$

del raggio (a_1, a_2, a_3) col piano (a_1, a_2, a_3) .

fine S. 4

Ricerca sul complesso
tetraedroidale

SI 12

1. Quante quadriche passano per un punto? Si avrà un'eq. lineare

$$a_4 = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \text{tutte altre}$$

$$c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_2 a_4 + c_{24} a_1 a_3 = c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 a_4$$

$$c_{12}(m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3) + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_2 (m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3) + c_{24} a_1 a_3 =$$

$$= c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 (m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3)$$

$$\left[(c_{12} m_1) + (c_{34} - c_{13} m_1) a_1 \right] a_2 = c_{13} m_2 a_2^2 + (c_{13} m_3 - c_{12} m_2) a_2 - c_{12} m_3, \quad a_2 = \frac{P_2}{P_1}$$

$$c_{23} m_1 a_2^2 + a_1 (c_{23} (m_2 a_2 + m_3) - c_{12} m_1 - c_{34} a_2) + c_{14} a_2 - c_{12} m_2 - c_{12} m_3 = 0$$

~~$P_2^2 P_1^2 P_3^2$~~ e si avrà un'eq. di 4° grado in a_2 . Dunque per ogni punto passano 4 di quelle quadriche. Correlat. ogni punto è toccato da 4 quadriche del sistema.

~~per a~~ Si hacono nel sistema solo le coni e 4 coniche che sono nelle facce o vertici del tetraedro il che appare geometricamente anche da che il discriminante di $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4$ e s'annulla per $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ cioè di 4 coni dai centri nei vertici. Del cono corrispondente ad $a_4 = 0$ lo egli tiene a danno:

$$(1) \quad a_1 \equiv c_{14}, \quad a_2 \equiv c_{24}, \quad a_3 \equiv c_{34}, \quad a_4 \equiv 0$$

e le eqn. che esprimono le b per le a cioè la quadrica tangente:

$$b_1 \equiv c_{14} (c_{12} c_{34} + c_{13} c_{42} - c_{14} c_{23}), \quad b_2 \equiv c_{24} (c_{12} c_{34} - c_{13} c_{42} + c_{14} c_{23}),$$

$$b_3 \equiv c_{34} (c_{12} c_{34} + c_{13} c_{42} + c_{14} c_{23}), \quad b_4 \equiv 2 c_{14} c_{23},$$

le formule per passare dalle quadriche a altri, β sono:

$$\beta_1 = \frac{a_2 Y_{13} + a_3 Y_{12} - a_1 Y_{23}}{a_2 a_3}, \quad b_1 = \frac{a_1}{a_2 a_3}, \quad b_1 = \frac{a_1}{\frac{1}{a_2} c_{24} + \frac{1}{a_3} c_{34} - \frac{1}{a_1} c_{14}} = \frac{a_1}{a_1 c_{24} + a_2 c_{34} - a_3 c_{14}}$$

Sostituendo dunque le (1) avremo:

$$b_1 = \frac{1}{c_{14} c_{24}}, \quad b_2 = \frac{1}{c_{14} c_{34}}, \quad b_3 = \frac{1}{c_{14} c_{24}}, \quad b_4 = 0$$

$$b_1 \neq b_2 : b_3 : b_4 = c_{14} : c_{24} : c_{34} : 0$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_1 c_{13} + a_3 c_{12} - a_1 c_{23}}{2a_2 a_3} = \frac{a_2 c_{14} + a_4 c_{12} - a_1 c_{24}}{2a_2 a_4} = \frac{a_3 c_{14} + a_4 c_{13} - a_1 c_{34}}{2a_3 a_4} \quad (2) \\
 b_2 &= \frac{a_1(2a_3 c_{12} - a_2 c_{13} - a_3 c_{12} + a_1 c_{23})}{2a_1 a_3 a_2} \\
 b_3 &= \frac{a_1 c_{23} + a_3 c_{12} - a_2 c_{13}}{2a_1 a_3} = \frac{a_1 c_{24} + a_4 c_{12} - a_2 c_{14}}{2a_1 a_4} = \frac{a_3 c_{24} + a_4 c_{23} - a_2 c_{34}}{2a_3 a_4} \\
 b_4 &= \frac{a_1 c_{23} + a_2 c_{13} - a_3 c_{12}}{2a_1 a_2} = \dots = \dots \\
 b_4 &= \frac{a_1 c_{24} + a_2 c_{14} - a_4 c_{13}}{2a_1 a_2} = \frac{a_1 c_{34} + a_3 c_{14} - a_4 c_{13}}{2a_1 a_3} = \frac{a_2 c_{34} + a_3 c_{24} - a_4 c_{23}}{2a_2 a_3}
 \end{aligned}$$

Le coniche e i primi due punti sono date da $\frac{1}{a_4} = 0$ ecc. Sostituendo questi nelle eqn. di condizione si ricava per a_4 si ha:

$$c_{12} a_3 = c_{24} a_2 = c_{23} a_1$$

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \frac{1}{c_{23}} : \frac{1}{c_{31}} : \frac{1}{c_{12}} : \frac{1}{0}$$

Si ha allora anche una dualità dei punti. Sostituendo si hanno le:

$$b_1 = \frac{c_{12}}{\frac{c_{23}}{c_{31}}} = c_{12} c_{13}, \quad b_2 = c_{21} c_{23}, \quad b_3 = c_{32} c_{31}, \quad b_4 = \frac{1}{\cancel{0}} \times \cancel{c_{12} c_{13}}$$

$$b_1 : b_2 : b_3 : b_4 = \frac{1}{c_{23}} : \frac{1}{c_{31}} : \frac{1}{c_{12}} : \frac{1}{0}$$

valori che sono soddisfatti alle eqn. di condizione. Essi b coincide con a . E' cioè è naturale.

Riceviamo se a e b coincidono le eqn. tra a e b danno:

$$a_1 a_2 : a_1 a_3 : a_1 a_4 : a_2 a_3 = a_2 a_4 : a_3 a_4 = c_{12} : c_{13} : c_{14} = c_{13} : c_{23} : c_{34}$$

$$a_2 : a_3 : a_4 = c_{12} : c_{13} : c_{14}$$

$$a_1 : a_2 : a_3 = c_{14} : c_{24} : c_{34}$$

Entro $\frac{a_1}{a_4} = 1$ si avrà $a_2 = \rho c_{12}, a_3 = \rho c_{13}, a_4 = \rho c_{14}$

$$a_1 \rho c_{14} : \rho^2 c_{12} c_{13} : \rho^3 c_{12} c_{14} : \rho^2 c_{13} c_{14} = c_{14} : c_{23} : c_{24} : c_{34}$$

$$a_1 : \rho c_{12} c_{13} = 1 : c_{23} : c_{24} : c_{34}$$

$$\rho c_{12} c_{14} : \rho c_{13} c_{14}$$

$$a_1 = \rho \frac{c_{12} c_{13}}{c_{23}} = \rho \frac{c_{12} c_{14}}{c_{24}} = \rho \frac{c_{13} c_{14}}{c_{34}}$$

Dunque $\rho = 0$ oppure $\rho = \frac{1}{2}$. $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ oppure $a_1 = 0$

$$\begin{aligned}
& a_1 b_k + a_k b_1 = \rho c_{ik} \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \\
& \text{primo polinomio di } x: \quad a_1 x_1 \quad a_2 x_2 \quad a_3 x_3 \quad a_4 x_4 \\
& \quad a_1 y_1 \quad a_2 y_2 \quad a_3 y_3 \quad a_4 y_4 \\
& \text{secondo polinomio di } y: \quad y_{1k} = a_1 a_m y_{km} \\
& \sum c_{ik} y_{ik}^2 = 0 \quad \sum c_{ik} a_1^2 a_m^2 y_{km}^2 = 0 \quad c_{12} a_3 a_4 + c_{14} a_2 a_3 = 0 \\
& c_{12} y_{12}^2 + c_{34} y_{34}^2 + c_{13} y_{13}^2 + c_{24} y_{24}^2 + c_{14} y_{14}^2 + c_{23} y_{23}^2 = 0 \\
& c_{12} a_3^2 a_4^2 y_{34}^2 + c_{34} a_1^2 a_2^2 + \dots \quad \text{circoles delle quadratriche fondamentali} \\
& c_{12} a_3^2 a_4^2 = \rho c_{34} = \pm a_1 a_2 a_3 a_4 \quad c_{12} a_3 a_4 = \pm a_1 a_2 a_3 a_4 \\
& c_{34} a_1^2 a_2^2 = \rho c_{12} \quad c_{13} a_1 a_3 = \pm a_1 a_3 a_2 a_4 \\
& a_1 a_2 a_3 a_4 = \pm \rho \quad c_{13} a_2 a_4 = \pm a_1 a_3 a_2 a_4 \\
& a_1 a_2 a_3 a_4 = \pm \frac{c_{12} a_3 a_4}{c_{34}} \quad a_1 a_2 = \pm \frac{c_{13} a_3 a_4}{c_{24}} \\
& = \frac{\sqrt{c_{12} c_{34} c_{14}}}{\sqrt{c_{12} c_{34} c_{14}}} = \frac{\sqrt{c_{11} c_{33} c_{22}}}{\sqrt{c_{11} c_{33} c_{22}}} = \frac{\sqrt{c_{11} c_{33} c_{22}}}{\sqrt{c_{11} c_{33} c_{22}}} a_1 a_3 = \pm \frac{c_{13} a_1 a_3}{c_{24}} \\
& = \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{12} c_{34} c_{14}}} \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{12} c_{34} c_{14}}} \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{12} c_{34} c_{14}}} \sqrt{\frac{c_{11}}{c_{12} c_{34} c_{14}}} a_2 a_3 = \pm \frac{c_{23} a_1 a_4}{c_{14}} \\
& \cancel{\xi_1 \xi_2 \cancel{\xi_3 \xi_4} \cancel{\sqrt{c_{12} c_{34} c_{14}}}} = \cancel{\xi_1^2} = \cancel{\xi_2 c_{13} c_{14}}, \cancel{\xi_2^2} = \cancel{\xi_3 c_{24} c_{14}}, \cancel{\xi_3^2} = \cancel{\xi_4 c_{12} c_{13}} \\
& = \cancel{\xi_1 \xi_2 c_{12} c_{34} \sqrt{c_{13} c_{14} c_{24}}} \cancel{\sqrt{c_{12} c_{34} c_{14}}} \cancel{\sqrt{c_{13} c_{14} c_{24}}} \cancel{\sqrt{c_{12} c_{13} c_{24}}} \\
& \xi_3 \xi_4 = \pm \xi_1 \xi_2 \quad c_{12} y_{12} \cancel{c_{34} c_{14}} = \pm 1, \text{ regno} \quad \text{if } k_1 = k_2 \\
& \xi_2 \xi_4 = \pm \xi_1 \xi_3 \quad c_{12} c_{34} y_{12} y_{34} + c_{13} c_{42} y_{13} y_{42} + c_{14} c_{23} y_{14} y_{23} = 0 \\
& \xi_1 \xi_6 = \pm \xi_2 \xi_5 \quad \cancel{c_{12} c_{34} y_{12} y_{34} + c_{13} c_{42} y_{13} y_{42} + c_{14} c_{23} y_{14} y_{23}} = 0 \\
& \xi_1 \xi_5 = \pm \xi_3 \xi_4 \quad \xi = \pm \frac{\xi_1 \xi_4}{\xi_2 \xi_3} = \pm \frac{\xi_2 \xi_4}{\xi_1 \xi_3} = \pm \frac{\xi_1 \xi_3}{\xi_2 \xi_4} \\
& \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 = \pm 1 \quad \frac{a_1^2}{a_1^2} \quad \frac{a_2^2}{a_2^2} \quad \frac{a_3^2}{a_3^2} \quad \frac{a_4^2}{a_4^2} \\
& \cancel{y_{12} y_{34} = - y_{13} y_{42} - y_{14} y_{23}} \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \\
& - c_{12} \cancel{c_{34}} \quad - a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \\
& \mathbf{V} = g t \quad \text{zapp. anarr. compl. ethnach.} \\
& S = \frac{1}{2} g t^2 \quad s = \gamma v_0 t = \frac{1}{2} \quad (1234) = \frac{c_{12} c_{34} - c_{14} c_{23}}{c_{13} c_{42} - c_{12} c_{34}} \\
& \cancel{(c_{12} c_{34} - c_{14} c_{23})} \cancel{y_{13} y_{42}} = \cancel{(c_{12} c_{34} - c_{14} c_{23})} \cancel{y_{13} y_{42}} \\
& \cancel{y_{14} y_{32}} \quad \cancel{c_{13} c_{42} - c_{12} c_{34}} \quad 13 \quad 14 \quad 23 \quad 24 \\
& \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4
\end{aligned}$$

$$c_{12}x_{12}^2 + c_{23}x_{13}^2 + c_{14}x_{14}^2 + c_{34}x_{34}^2 + c_{42}x_{42}^2 + c_{23}x_{23}^2 = 0 \quad [4]$$

3 facci di complessi rispetto a cui c'è proprio coniugato. Ora basta ad esempio

$$m x_{12} + n x_{34} = 0$$

da retta coniugata ad y_1 c'è $\rho x_{ik} = \cancel{(c_1 c_2 - c_3 c_4)} \quad ((c_1 c_2 - c_3 c_4) = mn)$

$$\rho x_{12} = mn y_{12} + n(m y_{12} + m y_{34}) = n^2 y_{34} \quad c_{12} = n$$

$$\rho x_{34} = -mn y_{34} + m(m y_{12} + m y_{34}) = m^2 y_{12} \quad c_{34} = m$$

$$\rho x_{13} = \cancel{y_{13}}, \quad \rho x_{14} = \cancel{y_{14}} \quad \text{e} \quad \rho x_{23} = \cancel{y_{23}}, \quad \rho x_{24} = \cancel{y_{24}}$$

$$\rho x_{12} = -\frac{n}{m} y_{34}, \quad \rho x_{34} = -\frac{m}{n} y_{12}, \quad \rho x_{13} = y_{13}, \quad \rho x_{14} = y_{14}$$

$$c_{12} \left(\frac{n}{m}\right)^2 y_{34}^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 y_{12}^2 + c_{13} y_{13}^2 + \dots = 0$$

complesso che coincide col dato ave sia:

$$c_{12} \left(\frac{n}{m}\right)^2 = c_{34}$$

$$c_{34} \left(\frac{m}{n}\right)^2 = c_{12}$$

(complessi fondamentali)

condizioni equivalenti che danno: $\frac{m}{n} = \pm \sqrt{\frac{c_{12}}{c_{34}}}$. Dunque ci sono

6 complessi lineari rispetto a cui il complesso corrisponde a se stesso.

Per trasformare c'è riferire a questi complessi poniamo:

$$\rho x_1 = \sqrt{c_{12}} x_{12} + \sqrt{c_{34}} x_{34}, \quad \rho x_2 = \sqrt{c_{13}} x_{13} + \sqrt{c_{42}} x_{42}, \quad \rho x_3 = \sqrt{c_{14}} x_{14} + \sqrt{c_{23}} x_{23}$$

$$\rho x_4 = \sqrt{c_{12}} x_{12} - \sqrt{c_{34}} x_{34}, \quad \rho x_5 = \sqrt{c_{13}} x_{13} - \sqrt{c_{42}} x_{42}, \quad \rho x_6 = \sqrt{c_{14}} x_{14} - \sqrt{c_{23}} x_{23}$$

$$\sqrt{c_{12}} x_{12} = x_1 + x_2, \quad \lambda \sqrt{c_{13}} x_{13} = x_3 + x_4, \quad \lambda \sqrt{c_{14}} x_{14} = x_5 + x_6 \\ \lambda \sqrt{c_{34}} x_{34} = x_1 - x_2, \quad \lambda \sqrt{c_{42}} x_{42} = x_3 - x_4, \quad \lambda \sqrt{c_{23}} x_{23} = x_5 - x_6$$

Dunque l'eqn. del complesso riferito ai 6 complessi fondamentali.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

c. l'equazione di condizione:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{c_{12} c_{34}}} + \frac{x_3^2 - x_4^2}{\sqrt{c_{13} c_{42}}} + \frac{x_5^2 - x_6^2}{\sqrt{c_{14} c_{23}}} = 0$$

Sono $x_1^2 = \sqrt{c_{12} c_{34}} y_1^2, x_2^2 = -\sqrt{c_{12} c_{34}} y_2^2$ ecc. avendo vicenda:

$$\text{eqn. del complesso: } \sqrt{c_{12} c_{34}} (y_1^2 - y_2^2) + \sqrt{c_{13} c_{42}} (y_3^2 - y_4^2) + \sqrt{c_{14} c_{23}} (y_5^2 - y_6^2) = 0$$

$$\text{eqn. di condizione: } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 0$$

(5) (5)

Equa. della superficie ponendo $c_{12} = x_1$, $c_{24} = x_2$, $c_{34} = x_3$, $c_{13} = x_4$

$$\beta x_1^4 - y_4 x_2^4 + \alpha \beta x_3^4 + x_4^4 +$$

$$+ \left(\frac{c_{13}}{c_{12}} + \frac{c_{23}}{c_{24}} \right) (y_2^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) + \left(\frac{c_{13}}{c_{12}} + \frac{c_{23}}{c_{34}} \right) (\beta x_1^2 x_3^2 + x_3^2 x_4^2) + \left(\frac{c_{12}}{c_{13}} + \frac{c_{34}}{c_{34}} \right) (x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2)$$

per un complesso quadratice l'equazione diventa

Quest'equazione canonica del complesso tetraedroidale ha appunto i termini a due a due uguali e opposti, il che giustifica un'asserzione del Klein (V. pag. 85 del quaderno). V. pag. 7 dove si trova nello stesso tempo la esp.

Supponiamo invece che sia dato il complesso quadratice:

$$a'(y_1^2 - y_2^2) + a''(y_3^2 - y_4^2) + a'''(y_5^2 - y_6^2) = 0 \quad (5)$$

(eqn. di condiz. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 0$)

Ricordiamo le direttive della congruenza $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$ formano gli spigoli opposti di un tetraedro (pag. 59) e

perciò si hanno uguagliando a 0 le quantità:

$$\begin{aligned} p^1 x_{12} &= y_1 + iy_2 & p^2 x_{13} &= y_3 + iy_4 & p^3 x_{14} &= y_5 + iy_6 \\ p^1 x_{34} &= y_1 - iy_2 & p^2 x_{23} &= y_3 - iy_4 & p^3 x_{24} &= y_5 - iy_6 \end{aligned}$$

dove: $y_1 = x_{12} + ix_{34}$, $y_3 = x_{13} + ix_{42}$, $y_5 = x_{14} + ix_{23}$,
 $y_2 = i(x_{12} - x_{34})$, $y_4 = i(x_{13} - x_{42})$, $y_6 = i(x_{14} - x_{23})$

e sostituendo nell'eqn. del complesso essa diventa
 $a'(x_{12}^2 + x_{34}^2) + a''(x_{13}^2 + x_{42}^2) + a'''(x_{14}^2 + x_{23}^2) = 0$

eqn. canonica. Dunque è proprio un compleso tetraedroidale.

Berchiamo le quadriche fondamentali mediante i complessi fondamentali.⁶⁶⁾
Le loro eqn. sono in generale del tipo (V. pag. 65): $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$. Nel nostro caso $y_1^2 = \frac{x_{12}^2}{\sqrt{c_{12} c_{34}}} = \frac{(x_{12} + \sqrt{c_{12} c_{34}} x_{34})^2}{\sqrt{c_{12} c_{34}}} = (\sqrt{\frac{c_{13}}{c_{34}}} x_{12} + \sqrt{\frac{c_{24}}{c_{12}}} x_{34})^2$. Dunque

$$(1) \quad \sqrt{\frac{c_{12}}{c_{34}}} x_{12}^2 + 2x_{12} x_{34} + \sqrt{\frac{c_{24}}{c_{12}}} x_{34}^2 - (\sqrt{\frac{c_{13}}{c_{34}}} x_{12}^2 - 2x_{12} x_{34} + \sqrt{\frac{c_{36}}{c_{12}}} x_{34}^2) + \sqrt{\frac{c_{13}}{c_{42}}} x_{13}^2 + 2x_{13} x_{42} + \sqrt{\frac{c_{23}}{c_{13}}} x_{42}^2 = 0$$

(usando l'eqn.) $2x_{12} x_{34} + \sqrt{\frac{c_{13}}{c_{42}}} x_{13}^2 + \sqrt{\frac{c_{42}}{c_{13}}} x_{42}^2 = 0$

e così di questo tipo se ne hanno 6 prendendo $\bar{12}4$, $\bar{12}5$, $\bar{12}6$,
 $\bar{34}1$, $\bar{34}2$, poi $y_1^2 + y_3^2 + y_5^2 = 0$

$$(\sqrt{\frac{c_{12}}{c_{34}}} x_{12} + \sqrt{\frac{c_{36}}{c_{12}}} x_{34})^2 + (\sqrt{\frac{c_{13}}{c_{42}}} x_{13} + \sqrt{\frac{c_{23}}{c_{13}}} x_{42})^2 + (\sqrt{\frac{c_{14}}{c_{23}}} x_{14} + \sqrt{\frac{c_{24}}{c_{14}}} x_{23})^2 = 0$$

di questo tipo se ne sono 4 cioè 135 , 136 , 145 , 146 .

come intersez. dei compl. fondam. si hanno le quadriche fondam.
Applicando l'eqn. in coord. di punti (V. pag. 2) si trova
per gruppi di 4 quadriche provenienti da 3 diversi fasci le eqns:

$$\sqrt{c_{12}} \sqrt{c_{13}} x_1^2 + \sqrt{c_{14}} \sqrt{c_{24}} x_2^2 + \dots = 0$$

dove è arbitrario il segno di ciascuno dei 3 rapporti $\frac{\sqrt{c_{ik}}}{\sqrt{c_{lm}}}$, sicché dividendo quest'eqn. per $\sqrt{c_{12}} \sqrt{c_{13}} \sqrt{c_{14}}$ si vede che essa rappresenta solo 4 quadriche diverse, giacché diventa:

$$\frac{x_1 \sqrt{c_{12}} \sqrt{c_{13}}}{\sqrt{c_{34}} \sqrt{c_{42}}} x_1^2 + \frac{\sqrt{c_{23}}}{\sqrt{c_{34}} \sqrt{c_{43}}} x_2^2 + \frac{\sqrt{c_{24}}}{\sqrt{c_{34}} \sqrt{c_{42}}} x_3^2 + x_4^2 = 0$$

E si trova poi per le 6 quadriche provenienti da 2 compl. di uno stesso fascio le eqns:

$$\sqrt{c_{12}} x_1 x_2 + \sqrt{c_{34}} x_3 x_4 = 0, \sqrt{c_{13}} x_1 x_3 + \sqrt{c_{24}} x_2 x_4 = 0, \sqrt{c_{14}} x_1 x_4 + \sqrt{c_{23}} x_2 x_3 = 0$$

dove ancora sono arbitrari i 3 rapporti $\frac{\sqrt{c_{ij}}}{\sqrt{c_{kl}}}$ ecc. Tuttavia ad esempio la prima e seconda nello stesso modo che a pag. 3 le coord. della retta polare determinata da r si trova:

$$r'_{12} = -c_{34} r'_{34}, \quad r'_{13} = \sqrt{c_{12} c_{34}} r'_{13}, \quad r'_{14} = \sqrt{c_{12} c_{34}} r'_{14}, \quad r'_{23} = -c_{13} r'_{12}, \quad r'_{24} = -\sqrt{c_{12} c_{34}} r'_{24}, \quad r'_{34} = \sqrt{c_{12} c_{34}} r'_{34}$$

e quindi sostituendo si vede che l'eqn. del compl. è soddisfatta da r se ci è soddisfatta da r' .

Del resto si può girare d'interno a quelle eqns. delle 10 quadriche consideraz. dei 6 compl. fondam. mostra che una quadrica intersezione di 3 compl. di ~~uno~~ 2 delle fasci diversi deve avere il tetraedro per proprio coniugato e quindi si ha la ricerca di celle delle pag. 3. Le cui celle se ne prendono 2 dello stesso fascio dei compl. fondam. questi mostrano che allora la quadrica intersezione deve contenere 4 dei sei singoli del tetraedro e quindi aver l'eqn. p. e delle forme

$$m x_1 x_2 + n x_3 x_4 = 0$$

I primi polari di 2 punti x, y risp. a questi quadriche sono:

$$\begin{array}{cccc} x & m x_2 & m x_3 & n x_4 \\ y & m y_2 & m y_3 & n y_4 \end{array}$$

$$r'_{12} = -n^2 r'_{34}, \quad r'_{13} = m n r'_{34}, \quad r'_{14} = m n r'_{14}, \quad r'_{23} = -m^2 r'_{12}, \quad r'_{24} = -m n r'_{12}, \quad r'_{34} = m n r'_{23}$$

$$\text{e se } c_{12} r'^2_{12} + c_{13} r'^2_{13} + \dots = 0:$$

$$c_{12} n^4 r'^2_{34} + c_{13} m^4 r'^2_{12} + m^2 n^2 c_{34} r'^2_{13} + (r'^2_{14} + \dots) = 0$$

$$c_{12} n^4 = m^2 n^2 c_{34}, \quad c_{13} m^4 = m^2 n^2 c_{12} \quad \text{che si equivalgono}$$

$$c_{12} n^2 = m^2 c_{34}, \quad m : n = \sqrt{c_{12}} : \sqrt{c_{34}} \quad \text{quindi } \sqrt{c_{12}} x_1 x_2 + \sqrt{c_{34}} x_3 x_4 = 0 \quad \text{(dove il segno di } \sqrt{c_{12}} \text{ è arbit.)}$$

7

Sulle rette singolari del complesso

Ricordando a pag. 3 le proprietà del compl. tetraedroidale di avere le rette sing. appartenenti a 1 compl. tetraedrale del tetraedro fondam. Questa proprietà è caratteristica. Si fatti sia una compl. qualunque te una retta singolare appartenente ad una compl. tetraedrale.

$$\begin{aligned} & ax_{12}x_{34} + bx_{13}x_{42} + cx_{14}x_{23} = 0 \\ \text{Il compl. 2'a:} \quad & x_{12}^2 + \dots + 2c_{12,13}x_{12}x_{13} + \dots = 0 \\ & \text{Le tre rette singolari sono determinate dal compl.} \\ & (c_{12,13}x_{12} + c_{12,14}x_{14} + \dots + c_{13,14}x_{13}) (c_{34,12}x_{12} + c_{34,13}x_{13} + \dots + c_{34,14}x_{14}) + \\ & + (c_{12,13}x_{12} + \dots) (c_{12,14}x_{14} + \dots) + (c_{13,14}x_{13} + \dots) (c_{12,13}x_{13} + \dots) \end{aligned}$$

In fatto cerciamo l'equaz. caratteristica in coord. di Klein del complesso tetraedrale. Denumiamo 6 compl. fondam. che abbiano il tetraedro per uno dei fondam. p. c. 12. 34. 56. Per passare a questo si avrà:

$$x_{12} \equiv x_1 + ix_2, \quad x_{34} \equiv x_3 + ix_4, \quad x_{13} \equiv x_3 - ix_4, \quad x_{42} \equiv x_3 - ix_4; \quad x_{14} \equiv x_{12} + x_{34}, \quad x_2 \equiv i(x_{12} - x_{34}), \quad x_3 \equiv x_{13} + x_{42}, \quad x_4 \equiv i(x_{13} - x_{42});$$

Se l'eqn. del compl. è $k_1x_1^2 + \dots = 0$

$$(eqn. di condiz. - k_1x_1^2 + \dots = 0)$$

rispetto a quel tetraedro diventa:

$$k_1(x_{12} + x_{34})^2 - k_1(x_{12} - x_{34})^2 + \dots = 0$$

$$+ (k_1 - k_2)(x_{12}^2 + x_{34}^2) + 2(k_1 + k_2)x_{12}x_{34} + \dots = 0$$

Dunque in tetraedrale bisogna dunque che

$$k_1 - k_2 = 0, \quad k_3 - k_4 = 0, \quad k_5 - k_6 = 0$$

cioè che a due a due i coeff. k_i siano uguali, e viceversa. (Si vede pure da perché il compl. sia tetraedroidale relativo a quel tetraedro deve essere

$$k_1 + k_2 + \lambda = 0, \quad k_3 + k_4 + \lambda = 0, \quad k_5 + k_6 + \lambda = 0$$

ziché l'eqn. $k_1x_1^2 + \dots = 0$ si può ridurre alla forma $k_1x_1^2 - k_2x_2^2 + \dots = 0$ come avviene a Klein.)

Bisogna premesso se il compl. $k_1x_1^2 + \dots = 0$ è tale che le tre rette singolari, date da:

$$k_1x_1^2 + \dots = 0$$

appartengono ad un compl. tetraedrale avente il tetraedro 12. 34. 56 per fondam. si dovrà poter ottenere combinando quelle 2 eqns. un'eqn. della forma detta. (Si vede) dond' potersi prendere λ in modo che:

$$k_1^2 + \lambda k_1 = k_2^2 + \lambda k_2, \quad k_3^2 + \lambda k_3 = k_4^2 + \lambda k_4, \quad k_5^2 + \lambda k_5 = k_6^2 + \lambda k_6$$

dove: $k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = k_5 + k_6 = -\lambda$

e quindi all'eqn. del compl. aggiungendo $\frac{\lambda}{2}(x_1^2 + \dots) = 0$ si avrà un'eqn. della forma

$$k_1x_1^2 - k_2x_2^2 + k_3x_3^2 - k_4x_4^2 + k_5x_5^2 - k_6x_6^2 = 0$$

eqn. di un compl. di Battaglini relativo allo stesso tetraedro.

Piano 2 coincid nel piano $a_2x_1^2 + a_3x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$, $b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0$
la conica involgendo delle rette che le tagliano armonicamente. Si trova identica con
alle quadriche corrispondenti.

$$(a_2b_3 + a_3b_2)u_1^2 + (a_3b_1 + a_1b_3)u_2^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)u_3^2 = 0$$

conica avente lo stesso triangolo proprio - coniugato. E' scio per:
conica avente lo stesso triangolo proprio - coniugato. E' scio per:

$$(a_2b_3 + a_3b_2)(a_3b_1 + a_1b_3)(a_1b_2 + a_2b_1) = 0.$$

Se se $a_2b_3 + a_3b_2 = 0$ significa che i punti in cui le 2 coniche tagliano il lato $x_1 = 0$ del tri coniug. comune e' i punti:

$$a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0 \quad b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0 \text{ si separano armonicamente. E' allora l'eqn diventa: } (a_3b_1 + a_1b_3)u_2^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)u_3^2 = 0$$

e rappresenta 2 punti di quello stesso lato.
(Notiamo ancora che se si suppone che lo schema b sia coppia di rette, cioè $b_3 = 0$ è l'eqn di quella conica involgendo diventa $a_2u_1^2 + a_3u_2^2 + (a_1b_1 + a_2b_2)u_3^2$ ed è soddisfatto da quelle rette. Siccome appena pure s'intetamente non e chiaro che in generale la conica involgendo sia - non

lo stesso triangolo proprio coniugato. Se un lato 1 di questo taglia armonicamente le 2 coniche, appartenenti all'involgendo, cioe' sarà tang., ma siccome il suo polo non sta su esso dovrà quell'involgendo considerarsi in 2 punti posti su quel lato. E' inversa. — E' chiaro sia analiticamente sia sinteticamente che in tal caso si scinde in 2 rette la conica lungo dei punti da cui partono tangenti armoniche o cioè in 2 rette private del polo di quelle.

Consideriamo 2 quadriche corrispondenti del sistema. Ogni piano le taglia in 2 coniche aventi lo stesso proprio - coniugato comune. I lati di questi costituiscono un compl.: se ne consideriamo i vertici apposti, i punti polari di questi rispetto alle 2 quadriche hanno comuni quei lati. Dunque e' un complesso tetradrale relativo al tetraedro fondamentale, e vi jaccia 2 spazi omografici perché polari reciproci di uno stesso spazio rispetto a quelle 2 quadriche. Se una retta appartiene al complesso dato essa taglierà armonicamente le 2 quadriche e quindi nel piano che le congiunge al punto corrisp. lo conica involgendo ..., che e' coniugata del complesso si scinde in 2 punti posti su quelle rette, eschi da questi e singolare e noi vediamo anche come se ne costuisca il piano singolare corrispondente. Inversa una retta singolare del complesso sia tale che in un piano per essa la conica corrisp. del compl. si scinde in 2 punti che essa congiunge, ma avrà lo stesso polo ancora rispetto alle 2 coniche delle quadriche e quindi appartenente ancora al complesso tetradrale. Dunque le rette singolari di un compl. tetradrale sono la congruenza che su questo determina quel complesso tetradrale.

In ogni piano si costuisce immediatamente la conica del compl. tetradrale giacché se ne hanno 4 rette intersecenti col tetraedro, e 3 rette costituenti il triangolo coniugato comune alle 2 coniche... Dunque queste 7 rette tecanno una conica

'Data le 2 quadriche
i "piani" polari di un punto a cercare.
sono:

$$\begin{array}{cccc} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0 \\ b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0 \end{array}$$

si tagliano nelle rette π di coordinate:

$r_{12} = (a_3 b_4 - a_4 b_3) x_3 x_4$, $r_{34} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_1 x_2$; $r_{13} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2 x_3$, $r_{24} = (a_1 b_4 - a_4 b_1) x_1 x_4$

tra queste uguaglianze si eliminano saliti le 2 multipli comuni a 2 e 2 e si ha:

$$\frac{r_{12} r_{34}}{(a_3 b_4 - a_4 b_3)(a_3 b_4 - a_4 b_3)} = \frac{r_{13} r_{42}}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{r_{14} r_{23}}{(a_1 b_4 - a_4 b_1)(a_2 b_3 - a_3 b_2)}$$

completo tetradale, che sarà identico al coni.

$$A = c_2 c_{34} r_{12} r_{34} + c_3 c_{42} r_{13} r_{42} + c_4 c_{23} r_{14} r_{23} = 0$$

quando: $c_2 c_{34} (a_3 b_4 - a_4 b_3) + c_3 c_{42} (a_1 b_2 - a_2 b_1) + c_4 c_{23} (a_1 b_4 - a_4 b_1) = 0$
sicché si ricava una sola condizione perché quelle 2 quadriche già eseguite ad avere il tetradico princip. per ~~forse~~ proprio-coniato generino quel coni.

In un piano qualunque le quadriche determinano 60 coppie di coniche:
per tutte queste coppie la conica inviluppante delle rette che le tagliano armonicamente è unica ed è la conica del compl.-tetraedrale corrisp. I triangoli propri-coniati comuni ad ogni coppia di coniche corrispondente sono tutti propri-coniati rispetto a quella conica ed inviluppano una cert'altra conica che è la conica del compl.-tetraedrale giacente in quel piano. Le tangenti comuni a queste due coniche sono le 4 rette singolari giacenti in quel piano.

Questi fatti risultano dalle considerazioni complessi, ma sarebbe bene dimostrarli direttamente. Tagliando le quadriche $a_1 x_1^2 + \dots + a_4 x_4^2 = 0$, $b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0$ con un piano $x_4 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$ si hanno anche le loro proj. su $x_4 = 0$:
 (1) $(a_1 + m_1^2) x_1^2 + (a_2 + m_2^2) x_2^2 + (a_3 + m_3^2) x_3^2 + 2m_1 m_2 x_1 x_2 + 2m_2 m_3 x_2 x_3 + 2m_3 m_1 x_1 x_3 = 0$
 (2) $(b_1 + m_1^2) x_1^2 + (b_2 + m_2^2) x_2^2 + (b_3 + m_3^2) x_3^2 + 2m_1 m_2 x_1 x_2 + 2m_2 m_3 x_2 x_3 + 2m_3 m_1 x_1 x_3 = 0$
Essere sono legate per ipotesi delle equaz.

(1) $a_1 b_2 + a_2 b_1 = c_{12}$, $a_2 b_3 + a_3 b_2 = c_{23}$, $a_3 b_4 + a_4 b_3 = c_{34}$, $a_1 b_4 + a_4 b_1 = c_{41}$, $a_2 + b_1 = c_{14}$, $a_3 + b_2 = c_{24}$,
dalle quali segue: (1) $c_{12} c_{34} + c_{34} c_{12} = c_3 c_{12} + c_4 c_{23} = c_{13} a_2 + c_{24} a_3$
l'equaz. simbolica della conica che inviluppa ecc. e': $(ab)_4^2 =$ cioè:

$$\begin{aligned} & [u_1 (ab)_{13} + u_2 (ab)_{14} + u_3 (ab)_{23}]^2 = 0 \\ & u_1^2 (ab)_{13}^2 + \dots + 2u_1 u_2 (ab)_{13} (ab)_{14} + \dots = u_1^2 (a_{23} b_{33} - a_{23} b_{23} + a_{33} b_{23}) + \dots + \\ & + 2u_1 u_2 [(a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) - a_{23} b_{13} + a_{13} b_{23} - a_{33} b_{12} - a_{12} b_{33}] + \dots = \\ & = u_1^2 [(a_2 + m_1^2)(b_2 + m_3^2) - 2m_1^2 m_3^2 + (a_3 + m_3^2)(b_3 + m_2^2)] + \dots + 2u_1 u_2 [m_1 m_2 m_3^2 - m_1 m_2 (a_3 + b_3 + 2m_3^2)] \\ & + \dots = u_1^2 [a_1 b_3 + a_3 b_1 + m_1^2 (a_3 + b_3) + m_3^2 (a_1 + b_1)] + \dots - 2u_1 u_2 [m_1 m_2 (a_3 + b_3) + \dots] \end{aligned}$$

ossia per le (2): $= u_1^2 [c_{23} + m_2^2 c_{34} + m_3^2 c_{14}] + \dots - 2m_1 m_2 c_{34} u_1 u_2 - \dots = 0$
conica indipendente dalle due coniche (1). Quest'equaz. rappresenta il cono che proietta dal punto $u_4 = 0$ la conica del completo corrispondente al piano $x_4 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$.

10) Ponendo - in base - $\frac{m_1}{m_4}, - \frac{m_2}{m_4} \dots$ in luogo di $u_1, u_2 \dots$ avremo che la conica corrispondente al piano (m_1, m_2, m_3, m_4) ha per proj. $m_1 u_1^2 + u_1^2 (c_{23} m_4^2 + c_{34} m_1^2 + c_{42} m_3^2) + u_2^2 (\dots) + u_3^2 (\dots) = 2m_1 m_2 c_{34} u_1 u_2 \dots$

Ma questo va d'accordo col fatto che l'eqnz. della conica corrispondente al piano (m_1, m_2, m_3, m_4) è $\alpha - \sum c_{ik} (u_i u_k)_{\text{proj}} = \cancel{\sum c_{ik} u_i^2 m_k^2} = \cancel{\sum c_{ik} u_i u_m m_k m_m} \dots$

$$u_1^2 (c_{23} m_4^2 + c_{34} m_1^2 + c_{42} m_3^2) + \dots = 2m_1 m_2 c_{34} u_1 u_2 \dots = 0$$

$\alpha = \sum c_{ik} u_i u_m m_k m_m$

Cerchiamo ora le coniche del complesso tetraedroidale A. Sia:

$$c_{12} c_{34} (m_1 u_1 - m_2 u_2)(m_3 u_4 - m_4 u_3) + c_{13} c_{42} (m_1 u_3 - m_3 u_1)(m_4 u_2 - m_2 u_4) + c_{14} c_{23} (m_1 u_4 - m_4 u_1)(m_2 u_3 - m_3 u_2) \\ m_1 m_2 u_1 u_4 (c_{14} c_{23} \cancel{- c_{13} c_{42}}) + m_2 m_3 u_2 u_3 (c_{13} c_{42} \cancel{- c_{12} c_{34}}) + m_3 m_4 u_3 u_4 (c_{12} c_{34} \cancel{- c_{14} c_{23}}) + \dots$$

Quest'eqnz. mostra che la conica tocca le 4 facce del tetraedro, il che si vede. Ponendo $u_4 = 0$ si ha la proj. sul piano $x_4 = 0$ del vertice opposto. Si tratta di verificare che questa conica tocca il triangolo proiez. coni. rispetto alle 2 coniche (1) qualunque questo sia perché soddisfà le (2).
se non satisfaesse non potrebbe essere proiezione delle 2 coniche.

$$(a_1 + m_1^2)x_1 + m_1 m_2 x_2 + m_1 m_3 x_3, \quad m_1 m_2 x_1 + (a_2 + m_2^2)x_2 + m_2 m_3 x_3, \quad m_1 m_3 x_1 + m_2 m_3 x_2 + (a_3 + m_3^2)x_3$$

in queste condizioni 2 delle coniche:

V. pag. 8. Dall'osservazione che se di 2 coniche l'una è simmetrica all'altra dell'asse retto bisezante armonico, tocca questo, segna che su ogni piano le 4 copie di generatrici di quadriche del sistema che si stanno toccano la conica del complesso. Le generatrici (di ogni modo di generazione) delle quadriche del sistema formano una congruenza di ordine e classe 8 contenuta nel complesso tetraedroidale.

11

le quaz. di condiz.

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = p c_{12}, \quad a_1 b_3 + a_3 b_1 = p c_{13}$$

in cui si considerino le a e le b come word. di punti nello spazio che hanno una corrispondenza univoca e reciproca tra i punti di una quarta sferica

$$c_{12} a_3 a_2 + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_2 a_3 + c_{24} a_1 a_3 = c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 a_3$$

Ogni p. Ad un punto x del quadrici a corrisponde un piano ξ nel punto a in modo che $\xi_i \equiv x_i^2$. Ogni piano ξ contiene 4 punti della quarta sferica di cui che per ogni punto passano 4 quadriche del sistema.

Il complesso tetraedroidale contiene tutte le rette che toccano una quadrica sulla quarta d'intersezione colla quadrica corrispondente. Tali rette sono comuni col complesso quadratice delle tangenti alla 1^a quadrica. Dunque formano una congruenza di 4° grado. Ciò risulta anche da che per un ogni piano ce ne sono 4 rette: le tangenti alla quadrica nei p. d'inters. colla quarta sferica, e per ogni punto ce passano 4 che le tangenziali nei p. d'inters. della quarta sferica col piano privare del p. risp. alla quadrica). — Il complesso contiene dunque 65 congruenze di 4° grado di tale specie e si può considerare come generato così. Infatti ogni retta è toccata, credo, da 4 quadriche, come mostra la corrispondenza, e quindi se appartiene al complesso per punto di contatto passerà la quadrica corrisp. —

Ad una quadrica del sistema corrisponde la quarta d'intersezione colla quadrica corrispond., e a questa quarta corrispondono le 2 quadriche del complesso delle tang. alle 2 quadriche e il complesso di 4° grado delle rette appoggiate sulla quarta d'intersezione hanno comune due congruenze di 4° grado costituenti una congr. di 8° ordine in cui si toccano i due complessi di 4° grado. Il complesso tetraedroidale è generato da questi due sistemi di congruenze di 4° grado.

continua 11

Se un complesso tetraedroidale si puote ridurre la sua g.
a:

$$k'(x_1^2 - x_2^2) + k''(x_3^2 - x_4^2) + k'''(x_5^2 - x_6^2) = 0$$

il che dunque per tot. di Klein. porta la curva di complesso avente per
sup. singolare quel tetraedroide $\frac{x_1^2}{\lambda+k'} + \frac{x_2^2}{\lambda-k'} + \frac{x_3^2}{\lambda+k''} + \frac{x_4^2}{\lambda-k''} + \dots = 0$

Poche questo complesso sia tetraedroidale deve essere

$$\frac{1}{\lambda+k'} + \frac{1}{\lambda-k'} = \frac{1}{\lambda+k''} + \frac{1}{\lambda-k''} = \frac{1}{\lambda+k'''} + \frac{1}{\lambda-k'''}$$

~~$\frac{\lambda^2-k^2}{\lambda^2-k'^2}$~~

$$\frac{2\lambda}{\lambda^2-k'^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2-k''^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2-k'''^2}$$

O $\lambda = 0$, oppure $\lambda^2 - k'^2 = \lambda^2 - k''^2 = \lambda^2 - k'''^2$, il che i' imposs.
abile poche k', k'', k''' son diversi. Ovvero ancora $\lambda = \infty$, q.
e' d' un complesso che e' tetraedroidale per ipotesi. Dunque vere
sono 2 soli. Quesi e sono

$$k'x_1^2 + \dots = 0$$

$$\frac{x_1^2}{k'} + \dots = 0$$

Ottimando al tetraedro bisogna porre:

$$\mu' x_{12} = x_1 + ix_2 \quad \mu'' x_{13} = x_3 + ix_4$$

$$\nu' x_{34} = x_3 - ix_4 \quad \nu'' x_{34} = x_3 - ix_4$$

$$\mu'^2 x_{12}^2 + \nu'^2 x_{34}^2 = x_1^2 - x_2^2, \dots$$

i 2 complessi $k' \mu' x_{12} + k' \nu' x_{34} + k'' \mu'' x_{13} + k'' \nu'' x_{34} + \dots = 0$

$$\frac{\mu'^2 x_{12}^2}{k'} + \frac{\nu'^2 x_{34}^2}{k'} + \frac{\mu''^2 x_{13}^2}{k''} + \dots = 0$$

dove appare che ponendo $k' \mu' = c_{12}$, $k' \nu' = c_{34}, \dots$

$$\frac{\mu'}{k'} = c_{12}, \quad \frac{\nu'}{k'} = c_{34}, \dots$$

$$\text{avr. } c_{12} c_{34}' = c_{34} c_{12}' = 1, \quad c_{12}' = \frac{1}{c_{34}}, \quad c_{34}' = \frac{1}{c_{12}}, \dots$$

Dunque ad un complesso tetraedroidale:

$$c_{12} x_{12}^2 + c_{34} x_{34}^2 + c_{13} x_{13}^2 + c_{42} x_{42}^2 + \dots = 0$$

si corrisponde solo un altro avente per sup. sing. lo stesso tetraedro
ed e':

$$\frac{x_{12}^2}{c_{34}'} + \frac{x_{34}^2}{c_{12}'} + \frac{x_{13}^2}{c_{42}'} + \dots = 0$$

e realmente per questo l'equazione delle sup. singolari e' la stessa.

Appunti al §3.

111

Verremo: $c' = c_{14}c_{23} - c_{13}c_{24}$, $c'' = c_{12}c_{34} - c_{14}c_{32}$, $c''' = c_{13}c_{42} - c_{12}c_{43}$
dove gli indici superiori 1, 11, 11 corrispondono ai raggrupp. 12.34; 13.42; 14.23.
Allora all'eq. delle sup. singolari si potrà anche dare la forma:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & c_{34}c' & c_{22}c'' & c_{23}c''' \\ x_2^2 & c_{34}c' & 0 & c_{14}c''' & c_{30}c'' \\ x_3^2 & c_{24}c'' & c_{14}c''' & 0 & c_{12}c' \\ x_4^2 & c_{32}c''' & c_{30}c'' & c_{12}c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(1)

Riordinando $c_{23}c_{24}x_2^2 + c_{32}c_{34}x_3^2 + c_{42}c_{43}x_4^2 = f_1(x) \cancel{c_{23}c_{24}x_2^2}$ $\sum_i c_{ik}x_i^2 = X_k$
 $c_{13}c_{44}x_1^2 + c_{31}c_{34}x_3^2 + c_{41}c_{43}x_4^2 = f_2(x) \cancel{c_{13}c_{44}x_1^2}$

$$f_1(x) = \frac{x_2^2}{c_{34}c_{24}} + \frac{x_3^2}{c_{23}} + \frac{x_4^2}{c_{42}}, \quad f_2(x) = \frac{x_1^2}{c_{34}c_{44}} + \frac{x_3^2}{c_{41}} + \frac{x_4^2}{c_{13}},$$

e corrispettivamente $f_1(\xi) = \frac{\xi_2^2}{c_{34}c_{24}} + \frac{\xi_3^2}{c_{23}} + \frac{\xi_4^2}{c_{42}}$, $f_2(\xi) = \frac{\xi_1^2}{c_{34}c_{44}} + \frac{\xi_3^2}{c_{41}} + \frac{\xi_4^2}{c_{13}}$

$$f_1(\xi) = \frac{\xi_2^2}{c_{34}c_{24}} + \frac{\xi_3^2}{c_{23}} + \frac{\xi_4^2}{c_{42}}, \quad f_2(\xi) = \frac{\xi_1^2}{c_{34}c_{44}} + \frac{\xi_3^2}{c_{41}} + \frac{\xi_4^2}{c_{13}},$$

Allora l'eq. del (1) corrispondente al punto ξ sarà $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$.

$$0 = \sum c_{ik}(x_iy_k - x_ky_i)^2 = \sum c_{ik}x_i^2y_k^2 - 2\sum c_{ik}x_iy_ky_i = \sum y_k^2\sum c_{ik}x_i^2 - 2\sum c_{ik}x_iy_ky_i$$

$$= \sum y_k^2 X_k - 2\sum c_{ik}x_iy_ky_i = X_1y_1^2 + X_2y_2^2 + X_3y_3^2 + X_4y_4^2 - 2c_{12}y_1y_2y_3y_4$$

Dunque il discriminante di queste coni sarà: $X_1 = 0$ è il cono compendiario.

Per analizzare ad es. $X_1 = 0$, che rappresenta un piano nello spazio, si ha:

$$\begin{vmatrix} -X_1 & c_{23}x_2x_3 & c_{34}x_3x_4 & c_{14}x_1x_4 \\ c_{23}x_2x_3 & -X_2 & c_{23}x_2x_3 & c_{42}x_2x_4 \\ c_{34}x_3x_4 & c_{23}x_2x_3 & -X_3 & c_{34}x_3x_4 \\ c_{14}x_1x_4 & c_{42}x_2x_4 & c_{34}x_3x_4 & -X_4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} X_1 = c_{12}x_1^2 + c_{32}x_3^2 + c_{42}x_4^2, \\ X_2 = c_{21}x_1^2 + c_{43}x_3^2 + c_{24}x_4^2, \\ X_3 = c_{31}x_1^2 + c_{24}x_2^2 + c_{34}x_4^2, \\ X_4 = c_{41}x_1^2 + c_{13}x_2^2 + c_{43}x_3^2 \end{array}$$

che è nullo identicamente, poiché sommando le righe x risp. per x_1, x_2, x_3, x_4 si ottiene 0. La superficie singolare si avrà annullandone i subdeterminanti di 3° ord.

S.p.a.
$$\begin{vmatrix} c_{23}x_2x_3 & -X_2 & c_{23}x_2x_3 & c_{42}x_2x_4 \\ c_{34}x_3x_4 & -X_3 & c_{23}x_2x_3 & c_{34}x_3x_4 \\ c_{14}x_1x_4 & c_{42}x_2x_4 & c_{34}x_3x_4 & -X_4 \end{vmatrix} = x_1x_4 \begin{vmatrix} c_{23}x_2x_3 & c_{42}x_2x_4 \\ c_{34}x_3x_4 & -X_4 \end{vmatrix} = x_1x_4 \begin{vmatrix} c_{23}x_2x_3 & -(c_{23}x_2^2 + c_{32}x_3^2 + c_{42}x_4^2) \\ c_{34}x_3x_4 & c_{42}x_2x_4 \end{vmatrix} = x_1x_4(c_{23}x_2^2x_3 + c_{34}x_3^2x_4 - c_{23}x_2^2x_3 - c_{34}x_3^2x_4)$$

$$= x_1x_4 \left[c_{23}x_2^2 \left(c_{23}c_{34}x_2x_3^2 + c_{24}x_2(c_{31}x_1^2 + c_{32}x_3^2 + c_{34}x_4^2) \right) + c_{34}x_3^2 \left(c_{23}c_{42}x_2^2x_3 + c_{34}x_3(c_{12}x_1^2 + c_{23}x_3^2 + c_{42}x_4^2) \right) + c_{14} \left(c_{21}x_1^2 + c_{23}x_3^2 + c_{24}x_4^2 \right) (c_{31}x_1^2 + c_{32}x_3^2 + c_{34}x_4^2) - c_{14}c_{23}x_2^2x_3 \right]$$

Dunque superficie singolare:

$$x_1^4c_{23}c_{34} + x_2^4c_{21}c_{23}c_{42} + x_3^4c_{13}c_{32}c_{44} + x_4^4c_{14}c_{41}c_{43} + (c_{23}c_{44} + c_{14}c_{33})(c_{23}x_2^2x_3^2 + c_{34}x_3^2x_4^2) + (c_{12}c_{34} + c_{14}c_{32})(c_{13}x_1^2x_3^2 + c_{24}x_2^2x_4^2) + (c_{12}c_{43} + c_{13}c_{42})(c_{14}x_1^2x_4^2 + c_{23}x_2^2x_3^2) = 0$$

che si può anche scrivere come segue con un determinante. Osservi anche:

$$0 = X_1 f_1(x) + x_1^2 [c_{12}c_{34}x_1^2 + c_{13}(c_{12}c_{44} + c_{14}c_{32})x_1^2 + c_{14}(c_{12}c_{34} + c_{14}c_{32})x_1^2 + c_{24}(c_{12}c_{34} + c_{14}c_{32})]$$

$$0 = X_2 f_2(x) + x_2^2 [f_2(x)], \quad \text{dunque } 0 = X_2 f_2(x) + x_2^2 F_2(x), \dots$$

equazioni che mostrano che ogni faccia del tetraedro principale taglia la superficie in 2 coniche, p.e. $x_1 = 0$ taglia la superficie nelle 2 coniche $X_1 = 0$, $f_1(x) = 0$, di cui l'una $X_1 = 0$ è la conica del complesso corrispondente a quel piano.

Annullando i determinanti di 2^o ordine si avranno poi i punti singolari per quali i 2 piani corrispondenti, e si vede che così sono le 4 quaterni di punti d'inters. di 2 di quelle coniche poste su ogni faccia. Così i punti singolari su $x_1 = 0$ saranno dati da:

$$\begin{aligned} c_{23}c_{24}x_2^2 + c_{32}c_{34}x_3^2 + c_{42}c_{43}x_4^2 &= 0 \\ c_{12}x_2^2 + c_{13}x_3^2 + c_{14}x_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{e quindi anche } \begin{vmatrix} c_{32}c_{34} & c_{42}c_{43} \\ c_{13} & c_{14} \end{vmatrix} = c_{34}(c_{31}c_{44} - c_{34}c_{41}) = c_{34}C'$$

$$\text{Se } x_1 = 0, \quad \frac{x_2^2}{c_{34}C'} = \frac{x_3^2}{c_{42}C''} = \frac{x_4^2}{c_{23}C'''}$$

$$\text{Se } x_2 = 0, \quad \frac{x_1^2}{c_{34}C'} = \frac{x_3^2}{c_{41}C''} = \frac{x_4^2}{c_{13}C'''}$$

$$\text{Se } x_3 = 0, \quad \frac{x_1^2}{c_{42}C''} = \frac{x_2^2}{c_{14}C'''} = \frac{x_4^2}{c_{21}C''}$$

$$\text{Se } x_4 = 0, \quad \frac{x_1^2}{c_{23}C'''} = \frac{x_2^2}{c_{12}C''} = \frac{x_3^2}{c_{32}C''}$$

Analogamente i punti singolari formano 4 quaterni passanti per vertici del tetraedro; così quelli passanti per $\xi_1 = 0$ sono i piani tangenti comuni ai 2 coni quadrici $\Xi_1 = 0$ che corrispondono al quel punto, e $\varphi_1(\xi) = 0$, cioè:

$$c_{13}c_{14}\xi_2^2 + c_{14}c_{12}\xi_3^2 + c_{12}c_{13}\xi_4^2 = 0$$

$$c_{34}\xi_2^2 + c_{42}\xi_3^2 + c_{23}\xi_4^2 = 0$$

e quindi sono:

$$\text{per } \xi_1 = 0 \quad \frac{\xi_2^2}{c_{12}C'} = \frac{\xi_3^2}{c_{13}C''} = \frac{\xi_4^2}{c_{14}C'''}$$

L'equazione di uno di questi piani è (ai radici si suppone un ragionamento) $\sqrt{c_{12}C'}x_2 + \sqrt{c_{13}C''}x_3 + \sqrt{c_{14}C'''}x_4 = 0$ che è soddisfatta dai 6 punti singolari:

$$x_2 = 0 \quad \pm \frac{x_1}{\sqrt{c_{12}C'}} = \frac{x_3}{\sqrt{c_{13}C''}} = \frac{x_4}{-\sqrt{c_{14}C'''}}$$

$$x_3 = 0 \quad \pm \frac{x_1}{\sqrt{c_{13}C''}} = \frac{x_2}{\sqrt{c_{14}C'''}} = \frac{x_4}{-\sqrt{c_{12}C'}}$$

$$x_4 = 0 \quad \pm \frac{x_1}{\sqrt{c_{14}C'''}} = \frac{x_2}{\sqrt{c_{12}C'}} = \frac{x_3}{-\sqrt{c_{13}C''}}$$

Dunque uno piano singolare passante nel punto 1 contiene due punti singolari di ciascuna delle 3 facce adiacenti ad 1. Da' nell'eqaz. di quel piano se lasciamo indeterminato il segno del termine in x_2 si avranno due piani passanti per i primi 2 punti singolari su $x_2 = 0$. Dunque:

I 4 punti singolari uscenti da una dei vertici del tetraedro principale costituiscono un ~~tetraedro singolare~~ angolo tetradri composto i cui 6 spigoli sono a 2 a 2 opposti sono le 3 coppie di congiungenti di punti singolari posti nelle 3 facce adiacenti, concorrenti in quel vertice e quindi queste 3 facce ne sono i punti diagonali.

Correlativamente i 4 punti singolari posti su una faccia del tetraedro principale costituiscono un quadrangolo composto i cui 6 lati a 2 a 2 opposti sono le 3 coppie di rette d'intersezione dei punti singolari presenti sui 3 vertici di quella faccia e quindi questi 3 vertici ne sono i punti diagonali.

L'essere il triangolo 234 l'angolo d'ironia del quadrangolo formato dai 4 punti singolari posti sulla faccia 1 risulta pure dalla forma delle ep - scritte qui davanti delle 2 coniche che si tagliano in quei 4 punti.

fine S1 12

$$2) \frac{a_4}{4} (a_2 c_{13} + a_3 c_{12} - a_1 c_{23}) = a_3 (a_2 c_{14} + a_4 c_{12} - a_1 c_{24})$$

$$a_2 a_4 c_{13} + a_1 a_3 c_{24} = a_2 a_3 c_{14} + a_1 a_4 c_{23}$$

$$a_6 (a_2 c_{13} + a_3 c_{12} - a_1 c_{23}) = a_2 (a_3 c_{14} + a_4 c_{13} - a_1 c_{34})$$

$$a_3 a_4 c_{12} + a_1 a_2 c_{34} = a_2 a_3 c_{14} + a_1 a_4 c_{23}$$

$$c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_2 a_4 + c_{24} a_1 a_3 = c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 a_4$$

$$c_{12} x_3 + c_{34} x_1 x_2 = c_{13} x_2 + c_{24} x_1 x_3 = c_{14} x_2 x_3 + c_{23} x_1 = 0$$

~~$$x_3 (c_{12} - c_{24} x_1) = x_2 (c_{13} - c_{23} x_1)$$~~

~~$$c_{14} x_2 (c_{12} - c_{24} x_1)$$~~

$$x_3 = \frac{1}{c_{12}} (\rho - c_{34} x_1 x_2)$$

$$c_{12} c_{13} x_2 + c_{24} x_1 (\rho - c_{34} x_1 x_2) = \rho c_{12}$$

$$(c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2) x_2 = \rho (c_{12} - c_{24} x_1)$$

$$x_2 = \rho \frac{c_{24} x_1}{c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2}$$

$$x_3 = \rho \frac{c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2}{c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2} - c_2 c_{34} x_1 = \rho \frac{c_{31} - c_{34} x_1}{c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2}$$

$$c_{14} \rho^2 (c_{21} - c_{24} x_1) (c_{11} - c_{34} x_1) = (\rho - c_{23} x_1) (c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_1^2)^2$$

$$x_1 = \frac{c_{12} x_3 - c_{13} x_2}{c_{24} x_3 - c_{34} x_2}$$

$$c_{14} x_2 x_3 (c_{12} c_{13} - c_{24} c_{34} x_2) + c_{23} (c_{12} x_3 - c_{13} x_2) =$$

$$c_{12} c_{13} x_2 + c_{24} c_{34} x_3 = c_{13} c_{24} x_2 + c_{23} c_{12} x_3$$

$$2a_2 a_3 = 2a_3 a_2$$

$$a_2 c_{11} a_3 a_2 + a_{34} a_1 a_2^2 = c_3 a_2^2 a_4 + c_{24} a_1 a_3 a_2$$

a matrice

	0	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2
x_1^2	0				c_{42}
x_2^2		0			c_{14}
x_3^2			c_{43}		c_{31}
x_4^2				c_{14}	c_{12}

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 &= 0 \\ b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 &= 0 \\ (a_1 x_1^2 + \dots)(b_1 y_1^2 + \dots) + (b_1 x_1^2 + \dots)(a_1 y_1^2 + \dots) - \\ - 2(a_1 x_1 y_1 + \dots)(b_1 x_1 y_1 + \dots) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min termine in } x_i^2 y_i^2. \quad \text{In } x_i^2 y_k^2, (a_i b_k + a_k b_i) \\ \text{In } x_i^2 x_k y_i y_k, -2(a_i b_k + a_k b_i) \\ 0 = \sum_{i,k} (a_i b_k + a_k b_i) (x_i^2 y_k^2 + x_k^2 y_i^2 - 2 x_i x_k y_i y_k) = \\ \text{contrary} \quad = \sum_{i,k} (a_i b_k + a_k b_i) \Omega_{ik}^2 \end{aligned}$$

Il complesso delle rette tangenti le quattro a_i^2/b_k^2 armoniche.

$$\sum (a_i b_k + a_k b_i) x_{ik}^2 = 0 \quad (\text{F. Salmon I, 261})$$

$$a_i b_k + a_k b_i = \rho^2 k_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 b_2 + a_2 b_1 = \rho c_{12} \\ a_1 b_3 + a_3 b_1 = c_{13} \\ a_1 b_4 + a_4 b_1 = c_{14} \\ a_2 b_3 + a_3 b_2 = c_{23} \\ a_2 b_4 + a_4 b_2 = c_{24} \\ a_3 b_4 + a_4 b_3 = c_{34} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_2 = \rho c_{12} - a_2 b_1 \\ b_3 = \rho c_{13} - a_3 b_1 \\ b_4 = \rho c_{14} - a_4 b_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 (c_{12} - a_2 b_1) + a_3 (c_{12} - a_2 b_1) = c_{23} a_2 \\ a_2 c_{13} + a_3 c_{12} - a_1 c_{23} = 2 a_2 a_3 b_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 b_4 + a_4 b_2 = c_{24} \\ a_3 b_4 + a_4 b_3 = c_{34} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{a_2 c_{13} + a_3 c_{12} - a_1 c_{23}}{2 a_2 a_3} = \frac{a_2 c_{14} + a_4 c_{12} - a_1 c_{24}}{2 a_2 a_4} = \\ = \frac{a_3 c_{14} + a_4 c_{13} - a_1 c_{34}}{2 a_3 a_4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 a_3 a_2 + a_{34} a_1 a_2^2 = a_3 a_2^2 a_4 + a_{24} a_1 a_3 a_2 \\ + a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_3 b_1 \end{array} \right.$$

Rappresentare in funzione di un parametro le incognite a_1 , a_2 , a_3

$$c_{12}a_3a_4 + c_{34}a_2a_3 = c_{13}a_2a_4 + c_{24}a_3a_2 = c_{14}a_2a_3 + c_{23}a_2a_4 = \rho$$

$$a_2 = \rho \frac{c_{24}a_3 - c_{12}a_4}{c_{24}c_{34}a_1^2 - c_{12}c_{13}a_4^2}, \quad a_3 = \rho \frac{c_{34}a_1 - c_{13}a_4}{c_{24}c_{34}a_1^2 - c_{12}c_{13}a_4^2}$$

$$c_{12}c_{13}a_2a_4 + c_{13}a_2c_{34}a_1a_2 = \rho c_{13}a_2 \left| \begin{array}{l} c_{12}a_3a_4c_4a_3 + \\ -c_{34}a_2c_{13}a_2a_4 \end{array} \right.$$

$$c_{13}c_{12}a_3a_4 + c_{12}a_3c_{24}a_1a_3 = \rho c_{12}a_3 \left| \begin{array}{l} c_{24}a_3 \\ -c_{34}a_2c_{13}a_2a_4 \end{array} \right.$$

$$a_1(c_{13}c_{34}a_2^2 - c_{12}c_{24}a_3^2) = \rho(c_{13}a_2 - c_{12}a_3)$$

$$a_4(c_{13}c_{34}a_2^2 - c_{12}c_{24}a_3^2) = \rho(c_{34}a_2 - c_{24}a_3)$$

$$\begin{aligned} & a_1 \left[c_{13}c_{34}(c_{24}a_1 - c_{12}a_4)^2 - c_{12}c_{24}(c_{34}a_1 - c_{13}a_4)^2 \right] = \\ & = [c_{13}(c_{24}a_1 - c_{12}a_4) - c_{12}(c_{34}a_1 - c_{13}a_4)](c_{24}c_{34}a_1^2 - c_{12}c_{13}a_4^2) \end{aligned}$$

$$c_{12}\alpha_3\alpha_4 + c_{34}\alpha_1\alpha_2 = c_{13}\alpha_2\alpha_4 + c_{24}\alpha_1\alpha_3 = c_{14}\alpha_2\alpha_3 + c_{23}\alpha_1\alpha_4$$

$$\frac{c_{12}a_3a_4 + c_{34}a_2a_3}{c_{12}a_3a_4 + c_{34}a_1a_2} = \frac{c_{13}a_2a_4 + c_{24}a_1a_3}{c_{13}a_2a_4 + c_{24}a_1a_3} = \frac{c_{14}a_2a_3 + c_{23}a_1a_4}{c_{14}a_2a_3 + c_{23}a_1a_4} =$$

$$c_{12}c_{13}a_4(a_3\alpha_2 - a_2\alpha_3) + c_{13}c_{34}a_2(a_1\alpha_4 - a_4\alpha_1) + c_{12}c_{24}a_3a_4$$

Se le α rappresentano coordinate di punto quall'eqn. a i membri rappresentano una quadrica intera di 2 gradini (quadratice) e quindi non di genere 0, le quali non si possono esprimere le α razionalmente in funzione di un parametro.

$$\text{Scommettendo } a_2 \text{ si ha: } a_4 = a_1 \frac{c_{24}a_3 - c_{34}a_2}{c_{12}a_3 - c_{13}a_2}$$

$$a_1(c_{13}a_2 - c_{23}a_1)(c_{24}a_3 - c_{34}a_2) = a_3(c_{14}a_2 - c_{24}a_1)(c_{12}a_3 - c_{13}a_2)$$

~~$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{2} \\ \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{matrix}$$~~

$$\left(\frac{a_1}{a_3} \right)^2 c_{23}(c_{24} + c_{34} \frac{a_2}{a_3}) + \frac{a_1}{a_3} [c_{13}a_2(c_{24} - c_{34} \frac{a_2}{a_3}) + c_{24}(c_{12} - c_{13} \frac{a_2}{a_3})] =$$

~~$$c_{14} \frac{a_2}{a_3} (c_{12} - c_{13} \frac{a_2}{a_3}) = 0$$~~

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$

$$(x_1^2 a_1 + x_2^2 a_2 + x_3^2 a_3)(c_{12}a_3 - c_{13}a_2) + a_1x_4^2 (c_{24}a_3 - c_{34}a_2) = 0$$

equazione 2° grado in a_1 e in

~~$$\frac{a_1}{a_3} \left[x_1^2 (c_{12} - c_{13} \frac{a_2}{a_3}) + x_4^2 (c_{24} - c_{34} \frac{a_2}{a_3}) \right] =$$~~

~~$$-c_{13}x_2^2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^2 + \frac{a_2}{a_3} (c_{12}x_2^2 - c_{13}x_3^2) + c_{12}x_3^2 = 0$$~~

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_2}{a_3} \frac{f}{F}$$

$$f^2(1^\circ) + f F(1^\circ) - f^2(2^\circ)$$

Paro dunque che per ogni punto della griglia passa 2 piani di quelle quadriche.

Il confl. dato ~~è~~ $\gamma_{ik} = c_{lm}$ (dove ik lin sono 1234)

una quadrica $\alpha_1\alpha_i^2 + \dots = 0 \quad \alpha_i = \frac{x_i}{a_i}$ per

$$\alpha_i(\beta_k + \alpha_k\beta_i) = \gamma_{ki}$$

~~$$\frac{1}{a_1 b_2} + \frac{1}{a_2 b_1} = c_{lm} \quad a_1 b_2 + a_2 b_1$$~~

$$\gamma_{12}\alpha_3\alpha_4 + \gamma_{34}\alpha_1\alpha_2 = \gamma_{13}\alpha_2\alpha_4 + \gamma_{24}\alpha_1\alpha_3 = -$$

$$\frac{c_{34}}{a_3a_4} + \frac{c_{12}}{a_1a_2} = \frac{c_{13}}{a_1a_3} + \frac{c_{24}}{a_2a_4} = -\frac{c_{14}}{a_3a_4} + \frac{c_{23}}{a_2a_3}$$

$$\gamma_{12}a_3a_4 + \gamma_{34}a_1a_2 = c_{13}a_2a_4 + c_{24}a_1a_3 = c_{14}a_2a_3 + c_{23}a_1a_4$$

stare intanto a quadrati

Sulle serie di complessi.

Diremo serie n upla ovvero gruppo $(n+1)$ nomio di complessi del grado m l'insieme di tutti i complessi di tal grado che si ottengono dando tutti i valori possibili agli $n+1$ coefficienti $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dell'equazione:

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = 0$$

dove A, A_1, \dots, A_n sono funzioni intre delle coordinate di rette e di grado m .

Obliamo due serie n upla di complessi di grado qualunque e rappresentate dalle equazioni:

$$(1) \quad \lambda A + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = 0$$

$$(2) \quad \mu B + \mu_1 B_1 + \dots + \mu_n B_n = 0$$

e vediamo di giungere a definirlo in modo esatto quando esse si debbano dire progettive. A tal fine notiamo anzitutto che nella serie n upla (1) sono contenute infinite serie p upla, essendo $p < n$; e precisamente se nella serie (1) prendiamo ad arbitrario $p+1$ complessi i quali si ottengano dall'equazione (1) dandovi in genere a λ_k i valori $\lambda'_k, \lambda''_k, \dots, \lambda^{(p+1)}_k$, essi determineranno una serie p upla contenuta nella serie n upla considerata e di cui tutti gli altri complessi si avranno dando valori arbitrari ad $\alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha^{(p+1)}_1$ nelle equazioni:

$$\lambda_k = \alpha'_1 \lambda'_k + \alpha''_1 \lambda''_k + \dots + \alpha^{(p+1)}_1 \lambda^{(p+1)}_k \quad (k=1, \dots, n)$$

Queste equazioni mostrano che le condizioni perché il complesso (1) appartenga alla serie p upla determinata dai $p+1$ complessi considerati sono così:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda' & \lambda'_1 & \dots & \lambda'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{(p+1)} & \lambda^{(p+1)}_1 & \dots & \lambda^{(p+1)}_n \end{vmatrix} = 0$$

Questa è la condizione, o meglio le condizioni perché quei $p+2$ complessi della serie n upla (1) appartengono ad una stessa serie p upla.

Però premesso consideriamo anche la serie n upla (2) e poniamo che i complessi di quelle due serie n upla si facciano corrispondere tra loro (senza trascendenze) ad una ad una sicché nelle equazioni (1) e (2), supposte rappresentare complessi corrispondenti, le μ, μ_1, \dots, μ_n siano funzioni algebriche ad un sol valore (ovvero siano proporzionali a tali funzioni) di $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - funzioni necessariamente omogenee -, e viceversa queste siano funzioni algebriche omogenee ad un sol valore di quelle. Poniamo che $p+2$ complessi della serie (1), e precisamente i complessi $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n), (\lambda', \lambda'_1, \dots, \lambda'_n), \dots, (\lambda^{(p+1)}, \lambda^{(p+1)}_1, \dots, \lambda^{(p+1)}_n)$ appartengano ad una stessa serie p upla contenuta nella serie (2); allora si verificherà la (3). Se supponiamo che i complessi corrispondenti $(\mu, \mu_1, \dots, \mu_n), (\mu', \mu'_1, \dots, \mu'_n), \dots, (\mu^{(p+1)}, \mu^{(p+1)}_1, \dots, \mu^{(p+1)}_n)$ appartengano pure ad una serie p upla della serie (2), sarà:

2)

$$(4) \quad \begin{vmatrix} M & M_1 & \cdots & M_n \\ M' & M'_1 & \cdots & M'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{(p+1)} & M_1^{(p+1)} & \cdots & M_n^{(p+1)} \end{vmatrix} = 0$$

Se ora poniamo che le condizioni (3) e (4) siano tali che dal verificarsi delle une segua il verificarsi delle altre, e cioè poniamo che le due serie (1) e (2) di complessi corrispondenti siano pur tali che ad ogni serie p uplo di complessi ~~nell'ordine~~ contenuti corrisponda una serie p uplo di complessi nell'altra, allora i determinanti della matrice (3) e quelli corrispondenti della matrice (4) ~~saranno differenti che per una fattore costante~~, donde concluderemo che se μ, μ_1, \dots, μ_n sono funzioni lineari (omogenee) di $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, e così queste di quelle.

Viceversa poniamo che M, M_1, \dots, M_n siano funzioni lineari omogenee di $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ (e quindi queste di quelle), cioè:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = a_{00}\lambda + a_{01}\lambda_1 + \cdots + a_{0n}\lambda_n \\ M_1 = a_{10}\lambda + a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ M_n = a_{n0}\lambda + a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nn}\lambda_n \end{array} \right.$$

Allora i determinanti formati dalla matrice (4) saranno prodotti della matrice (3) per una matrice ottenuta dai coefficienti delle ~~equazioni~~ precedenti prendendone solo $p+2$ orizzontali. Quindi allorché tutti i determinanti della matrice (3) saranno nulli, cioè quando si verificherà la (3) si verificherà pure la (4), e cioè, badiò, si verificherà ora per tutti i valori di $p (< n)$. Siamo così condotti alla conclusione che se nelle due serie (1), (2) di complessi si stabilisce una corrispondenza univoca tale che ai complessi formanti una serie p uplo nell'una corrispondono i complessi formanti una serie p uplo nell'altra, dove p ha un valore determinato minore di n , cioè accadrà pure per qualsiasi valore di $p < n$ e la corrispondenza tra i complessi delle due serie (1), (2) si potrà rappresentare per mezzo delle equazioni (5).

Due serie di complessi così corrispondentisi si diranno proiettive.

Ora le considerazioni che dovremo svolgere potrebbero servireci le equazioni (5) in tutta la loro generalità; ma siccome esso ci contrariebbe alquanto i ragionamenti, così preferiamo particolarizzarle. A tal fine supponiamo che nelle due serie n uplo proiettive (1), (2) i complessi $A, B; A_1, B_1; \dots, A_n, B_n$ si corrispondano. E' chiaro che le equazioni (5) diverranno allora:

$$\mu = a_{00}\lambda, \quad M_1 = a_{11}\lambda_1, \quad \dots, \quad M_n = a_{nn}\lambda_n$$

ricche immaginando B, B_1, \dots, B_n già moltiplicati rispettivamente per $a_{00}, a_{11}, \dots, a_{nn}$. Le due equazioni (1), (2) prenderanno la forma:

$$\lambda A + \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = 0$$

$$\lambda B + \lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_n B_n = 0$$

Sotto questa forma ~~qualsiasi~~ si potranno sempre porre, senza perdita di generalità, le equazioni di due

seie nuple progettive di complessi. Così noi lo considereremo sempre d'ora innanzi.

Queste cose premesse noi passeremo a considerare ciò che forma il vero scopo di questo studio: che cosa generano due o più serie progettive di complessi colle intersezioni dei complessi corrispondenti. Il Fiedler nell'ultima edizione tedesca della geometria analitica dello spazio del Salmon ha mostrato come si possano generare nuovi complessi mediante serie di complessi, ma queste non sono progettive, ma reciproche, cioè ad un complesso dell'una corrisponde nell'altra non già un altro complesso, ma una serie di complessi, ovvero, se si vuole, il sostegno di questa serie. Quindi le ricerche del Fiedler sono diverse da quelle che seguono, salvo che per due serie semplici progettive. Avvertiro ancora che, stante l'uso costante che si farà della notazione abbreviata, tutte le nostre ricerche si potranno applicare con legerissime modificazioni allo studio delle serie progettive di superficie, di curve, di sviluppatili, ecc..

Gruppi binomi

Due gruppi binomi progettivi di complessi rispettivamente di grado n_1 ed n_2 si ponono rappresentati con:

$$\alpha A_1 + \beta B_1 = 0$$

$$\alpha A_2 + \beta B_2 = 0$$

Due complessi corrispondenti si togliano secondo una congruenza di grado $n_1 n_2$ ed il luogo di tutte queste congruenze si avrà eliminando α e β da queste due equazioni, cioè avrà per equazione:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Essendo dunque un complesso di grado $n_1 + n_2$, il quale passerà per le congruenze di grado n_1^2, n_2^2 che costituiscono i sostegni dei due gruppi progettivi, giacché quell'equazione è soddisfatta tanto da $A_1 = 0, B_1 = 0$ quanto da $A_2 = 0, B_2 = 0$.

Consideriamo tre gruppi binomi progettivi dei gradi n_1, n_2, n_3 :

$$\alpha A_1 + \beta B_1 = 0$$

$$\alpha A_2 + \beta B_2 = 0$$

$$\alpha A_3 + \beta B_3 = 0$$

Tre complessi corrispondenti si toglieranno secondo una rigata di grado $2n_1 n_2 n_3$ ed il luogo di queste rigate, che sono in numero semplicemente infinito, sarà un numero doppiamente infinito di rette, cioè una congruenza. Le rette di questa soddisferanno alle equazioni:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè apparterranno ai complessi rappresentati da questo. Quindi si può anche dire che l'equazione della congruenza è:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

Quale è il grado di questa congruenza? La congruenza comune ai due complessi

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ \end{vmatrix} = 0$$

i quali sono di gradi $n_1 + n_2$, $n_2 + n_3$ sarà di grado $(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)$. Ma la nostra congruenza è solo parte di questa, giacché questa comprende pure la congruenza $A_2 = 0 \cdot B_2 = 0$ di grado n_2^2 . La quale non fa parte della congruenza prima considerata. Il grado di questa sarà dunque:

$$(n_1 + n_2)(n_2 + n_3) - n_2^2 = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3$$

Aggiungiamo ai tre gruppi binomi considerati un quarto ad esso proiettivo e del grado n_4 :

$$\alpha A_4 + \beta B_4 = 0.$$

Quattro complessi corrispondenti si troveranno in generale in un gruppo di $2n_1 n_2 n_3 n_4$ rette: il luogo di tali rette è semplicemente infinito, cioè una rigata, che si potrà considerare come avendo per equazione:

$$\begin{array}{|c c c c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline \end{array} = 0$$

Ciò riguarda appartenente ai 3 complessi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \\ \end{vmatrix} = 0$$

di grado $n_1 + n_2 \cdot n_2 + n_3 \cdot n_3 + n_4$, ma non c'è l'insieme di tutte le rette comuni a questi. Soltanto a questi appartengono pure la rigata $A_2 = 0 \cdot B_2 = 0$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \\ \end{vmatrix} = 0$ e la rigata $A_3 = 0 \cdot B_3 = 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \end{vmatrix} = 0$, le quali non sono evidentemente parte della nostra rigata. Il grado di questa sarà dunque il doppio di:

$$(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)(n_3 + n_4) - n_2^2(n_3 + n_4) - n_3^2(n_1 + n_2) = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4$$

cioè la rigata generata dalle quattro rette proiettive di complessi di grado $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$ sarà di grado

$$2(n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4)$$

Consideriamo finalmente cinque gruppi binomi proiettivi, due in più oltre ai 4 già considerati:

$$\alpha A_5 + \beta B_5 = 0$$

di grado n_5 . Cinque complessi corrispondenti non si troveranno in generale: ma tra gli infiniti sistemi di cinque complessi corrispondenti ce ne saranno alcuni i cui complessi avranno una retta comune. Le rette comuni così ottenute saranno in numero finito e dovranno soddisfare alle equazioni:

$$\begin{array}{|c c c c c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \hline \end{array} = 0$$

Quindi si potranno considerare come comuni al complesso ed alla rigata seguenti:

(*) Per averne il grado si può anche considerarla come intersezione del complesso e della congruenza seguenti:

$\begin{vmatrix} A_1 & A_4 \\ B_1 & B_4 \\ \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ \end{vmatrix} = 0$ rispettivamente dei gradi $n_1 + n_4$ e $n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3$. Ma in quell'intersezione va fatta la rigata $A_1 = 0 \cdot B_1 = 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \\ \end{vmatrix} = 0$ che ne fa parte. Dunque il grado della rigata considerata è il doppio di:
 $(n_1 + n_4)(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) - n_1^2(n_2 + n_3) = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4$.

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} = 0$$

fra le rette comuni a questi insiemini di rette bisogna però che escludiamo quelle che soddisfano alle equazioni:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Dunque quelle rette sono in numero doppio di:}$$

$$(n_1 + n_3)(n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4) - n_1^2(n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4)$$

ossia in numero di:

$$2(n_1 n_2 n_3 n_4 + n_1 n_2 n_3 n_5 + n_1 n_2 n_4 n_5 + n_1 n_3 n_4 n_5 + n_2 n_3 n_4 n_5)$$

* Gruppi binomii

Consideriamo due gruppi binomi proiettivi di grado n_1, n_2 di complessi:

$$(1) \quad \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = 0$$

$$(2) \quad \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 = 0$$

In ciascuno dei due gruppi stanno ∞^2 gruppi binomi e questi si corrispondono pure proietivamente nei due gruppi binomi, insieme delle congruenze che ne costituiscono i sostegni. Consideriamo nel primo gruppo binomio il gruppo binomio determinato dai complessi (1) e dal complesso:

$$(1') \quad \alpha' A_1 + \beta' B_1 + \gamma' C_1 = 0$$

e nel secondo gruppo binomio il gruppo binomio determinato dai complessi corrispondenti a quelli, cioè (2) e:

$$(2') \quad \alpha' A_2 + \beta' B_2 + \gamma' C_2 = 0$$

I 2 gruppi binomi determineremo come luogo delle rette comuni ai complessi corrispondenti un complesso la cui equazione sarà, per quanto sopra vedemmo:

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 & \alpha' A_1 + \beta' B_1 + \gamma' C_1 \\ \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 & \alpha' A_2 + \beta' B_2 + \gamma' C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha \beta') \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} + (\beta \gamma') \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + (\gamma \alpha') \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

di qui si vede che tutti quei complessi, di grado $n_1 + n_2$, formano un gruppo binomio, ma hanno però tutti comune la congruenza

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

il cui grado^(*) è $(n_1 + n_2)^2 - n_1 n_2 = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$. Questa congruenza è il luogo delle rette comuni alle congruenze che costituiscono i gruppi binomi corrispondenti nei due gruppi binomi considerati, come risulta pure dalla considerazione delle equazioni (1), (2), (1'), (2').

Consideriamo tre gruppi binomii proiettivi di grado n_1, n_2, n_3 rappresentati dalle equazioni (1)-(2) e da:

$$(3) \quad \alpha A_3 + \beta B_3 + \gamma C_3 = 0$$

(*) Giacché essa è la congruenza dei complessi $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ da cui si esclude la congruenza $B_1 = 0, B_2 = 0$.

6)

6

Il luogo delle rette che stanno su complessi corrispondenti dei due gruppi sarà il complesso di grado $n_1 + n_2 + n_3$ avente per equazione:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Questo complesso passa per le tre congruenze:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

rispettivamente di grado $n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2$, $n_2^2 + n_2 n_3 + n_3^2$, $n_3^2 + n_3 n_1 + n_1^2$. E ciò è pure evidente sinteticamente, poiché queste congruenze sono, per quanto vedremo tutt', i luoghi delle rette comuni alle congruenze corrispondenti dei gruppi binomi (1) e (2), (2) e (3), (3) e (1). Come poi queste congruenze passano rispettivamente per sostegni di questi gruppi essendo le loro equazioni soddisfatte da quelle di quei sostegni, cioè:

$$A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0; A_2 = 0, B_2 = 0, C_2 = 0; A_3 = 0, B_3 = 0, C_3 = 0$$

così passerà per queste rigate quel complesso di grado $n_1 + n_2 + n_3$. Del resto ciò appare pure direttamente dall'essere la sua equazione soddisfatta da quelle ora scritte di quelle rigate.

Consideriamo quattro gruppi binomi: (1), (2), (3) e:

$$(4) \quad \alpha A_4 + \beta B_4 + \gamma C_4 = 0$$

tutti proiettivi e di gradi n_1, n_2, n_3, n_4 . Quattro complessi corrispondenti si toglieranno in generale in un numero finito ($2n_1 n_2 n_3 n_4$) di rette ed il luogo di questo sarà quindi un insieme di oo^2 rette, cioè una congruenza. Tutte le rette di questa, e solo esse, soddisferanno alle equazioni:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

In quella congruenza c'è dunque la congruenza dei complessi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero può da questa si togli la congruenza, che ne c'è parte:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque il grado della congruenza considerata è:

$$(n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + n_2 + n_4) - (n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2) = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4$$

Consideriamo cinque gruppi binomi di grado n_1, n_2, \dots, n_5 rappresentati da (1) ... (4) e:

$$(5) \quad \alpha A_5 + \beta B_5 + \gamma C_5 = 0$$

e corrispondentemente quindi proiettivamente. Cinque complessi corrispondenti in generale non si togliano, ma

avrà un numero semplicemente infinito di volte che essi si taglino: il luogo di tutte le rette così ottenute sarà una rigata, le cui generatrici soddisfanno evidentemente alle equazioni:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{vmatrix} = 0$$

Per avere il grado di questa rigata^(x) notiamo che essa è intersezione di 3 complessi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_5 \\ B_3 & B_4 & B_5 \\ C_3 & C_4 & C_5 \end{vmatrix} = 0$$

Dato da questa intersezione bisogna escludere l'intersezione del primo complesso colla congruenza $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0$ che appartiene agli altri due, e l'intersezione del terzo complesso colla congruenza $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$ che fa parte degli altri due. Si noti però che in tal modo si sarà esclusa per due volte la rigata $A_3 = 0 \cdot B_3 = 0 \cdot C_3 = 0$. Tenuto conto di tutte queste osservazioni, il grado della rigata generata sarà il doppio di:

$$(n_1 + n_2 + n_3)(n_2 + n_3 + n_4)(n_3 + n_4 + n_5) - (n_3^2 + n_3 n_4 + n_4^2)(n_1 + n_2 + n_3) - (n_2^2 + n_2 n_3 + n_3^2)(n_3 + n_4 + n_5) + n_3^3$$

cioè il grado di quella rigata è $2 \sum n_i n_j n_k$ estendendo la somma ai 5 numeri n_1, n_2, \dots, n_5

Consideriamo ai grappi trinomi proiettivi di gradi n_1, \dots, n_6 e siamo (1) ... (5) e:

$$(6) \quad \alpha A_6 + \beta B_6 + \gamma C_6 = 0$$

Il numero delle rette le quali giaceranno sopra 6 complessi corrispondenti di quei grappi è limitato, e non ci proponiamo di trovarlo. A tal fine notiamo che quelle rette dovranno soddisfare le equazioni:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{vmatrix} = 0$$

Si potranno quindi considerare come intersezione dei 6 complessi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_5 \\ B_3 & B_4 & B_5 \\ C_3 & C_4 & C_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ C_4 & C_5 & C_6 \end{vmatrix} = 0$$

Ma dato da questa intersezione bisogna evidentemente togliere le intersezioni (che ne sono parte) delle congruenze:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_4 & B_4 & C_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 \end{vmatrix} = 0$$

(x) Si può anche procedere in quest'altro modo: quella rigata si può considerare come intersezione della congruenza e del complesso:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_5 \end{vmatrix} = 0$$

Ma dato questi intersezioni bisogna togliere l'intersezione di quella congruenza con quest'altra: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$ e per avere quest'altra intersezione basta cercare quella dell'ultima congruenza col complesso $\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$ ad esempio (complesso che passa per la prima congruenza) escludendone però la rigata $A_2 = 0 \cdot B_2 = 0 \cdot C_2 = 0$. Si trova così

8)

rispettivamente col 3° e 4°, col 4° e 1°, col 1° e 2° di quei 4 complessi. Si tratti però che così facendo si viene a togliere due volte l'intersezione della prima coll'ultima di quelle 3 congruenze, come pure si tolgono due volte le intersezioni del 1° complesso colla rigata $A_4 = 0$, $B_3 = 0$, $C_3 = 0$ (appartenente agli altri 3) e del 4° complesso colla rigata $A_3 = 0$, $B_3 = 0$, $C_3 = 0$. Dunque il numero delle rette cercate sarà doppio:

$$(n_1 + n_2 + n_3)(n_2 + n_3 + n_4)(n_3 + n_4 + n_5)(n_4 + n_5 + n_6) - (n_1^2 + n_2 n_3 + n_3^2)(n_2 + n_4 + n_5)(n_4 + n_5 + n_6) - \\ - (n_3^2 + n_3 n_4 + n_4^2)(n_4 + n_5 + n_6)(n_1 + n_2 + n_3) - (n_4^2 + n_4 n_5 + n_5^2)(n_1 + n_2 + n_3)(n_2 + n_3 + n_4) + \\ + (n_2^2 + n_2 n_3 + n_3^2)(n_3^2 + n_4 n_5 + n_5^2) + n_4^3(n_1 + n_2 + n_3) + n_3^3(n_4 + n_5 + n_6) = \sum n_1 n_2 n_3 n_4$$

Vi sono quindi $2 \sum n_1 n_2 n_3 n_4$ (estendendo la somma a n_1, n_2, \dots, n_6) rette che stanno sopra 6 complessi corrispondenti dai 6 gruppi.

Gruppi quadrinomii.

Ottiamo 4 gruppi quadrinomii proiettivi di complessi di grado n_1, n_2, n_3, n_4 rispettivamente:

$$\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 = 0$$

$$\alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 + \delta D_2 = 0$$

$$\alpha A_3 + \beta B_3 + \gamma C_3 + \delta D_3 = 0$$

$$\alpha A_4 + \beta B_4 + \gamma C_4 + \delta D_4 = 0$$

Ogni quaterna di complessi corrispondenti darà $2n_1 n_2 n_3 n_4$ rette comuni a questi, sicché in tal modo è generato un insieme finito di rette, cioè un complesso. L'equazione di questo si avrà eliminando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tra quelle quattro equazioni, cioè sarà:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

dove si vede che quel complesso è di grado $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ e pesa per le rette costituenti i sostegni di 4 gruppi.

Consideriamo ancora un quinto gruppo quadrinomio proiettivo ai precedenti e del grado n_5 :

$$\alpha A_5 + \beta B_5 + \gamma C_5 + \delta D_5 = 0$$

Il luogo delle intersezioni dei complessi corrispondenti di 5 gruppi (quando esiste una tale intersezione, perché in generale i complessi corrispondenti non avranno rette comuni) sarà una congruenza, le cui rette dovranno soddisfare le quazioni seguenti:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \end{vmatrix} = 0$$

che il grado di quella rigata è doppio di:

$$(n_1 + n_2 + n_3)(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4) - (n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2)(n_2 + n_3 + n_4) + n_2^3 = \sum n_1 n_2 n_3$$

Per trovare il grado di questa congruenza vediamo quale sia il grado di quest' altra:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0;$$

questa si può considerare come l'intersezione dei complessi $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$, dalla quale però si toglie la congruenza $\begin{vmatrix} B_2 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix} = 0$ di grado $n_1 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4$. Dunque il grado di quella congruenza sarà $(n_1 + n_2 + n_3)^2 - (n_1 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1$. — E' più semplice e ritornando alla congruenza generata dai 5 gruppi quadrimoni proiettivi di complessi, è chiaro che essa è l'intersezione dei complessi:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \end{vmatrix} = 0$$

dalla quale però si toglie precisamente la congruenza $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0$ di cui testé determinammo il grado. Dunque il grado della congruenza generata è:

$$(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)(n_1 + n_2 + n_3 + n_5) - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1)$$

ossia $\sum n_i n_j$.

Ora mai possiamo prevedere per induzione (e si può anche dimostrare in modo simile a quello finora usato) che cosa si otterà considerando un numero maggiore di serie quattrople proiettive. Sei di queste serie genereranno una rigata di grado $2 \sum n_i n_j n_k$ (la somma andando da n_1 ad n_6), e tutte di quelle serie daranno $2 \sum n_i n_j n_k$ (estendendo la somma ad n_1, \dots, n_6) rette.

Confrontando finalmente i risultati avuti nei gruppi binomii, trinomii e quadrimoni si giungerà per induzione alle conclusioni generali seguenti:

m gruppi monomi proiettivi di complessi di gradi n_1, n_2, \dots	generano un complesso di grado $\sum n_i$
$m+1$ gruppi " "	" una congruenza di grado $\sum n_i n_j$
$m+2$ gruppi " "	" una rigata di grado $2 \sum n_i n_j n_k$
$m+3$ gruppi " "	" un numero $2 \sum n_i n_j n_k n_l$ di rette

dove bisogna notare che i segni \sum implicano che si facciano combinazioni (senza ripetizioni) di gradi 1°, 2°, 3° o 4° dei numeri n_1, n_2, \dots che indicano i gradi dei gruppi di complessi generativi.

S114 (1)

Il teorema di Carnot
quando invece di un trilatero si hanno
tre rette concorrenti.

Prendendo due di queste come assi cartesiani,
sia l'equazione della curva:

$$a + bx + cy + \dots = 0$$

Onde per $y=0$ (1) $\sum \frac{1}{\partial X_i} = -\frac{b}{a}$

e per $x=0$ (2) $\sum \frac{1}{\partial Y_i} = -\frac{c}{a}$

da 3^a retta, z , tagli nei punti Z_i , di raggi
vettori p_i . E $x : p = \sin yz : \sin yx$
 $y : p = \sin xz : \sin xy$. Onde sostituendo
 $a \sin xy + (-b \sin yz - c \sin zx) p + \dots$
e quindi da quest'equazione in p

$$\text{che dalle (1) e (2) dà: } \sum \frac{1}{\partial Z_i} = \frac{b \sin yz}{a \sin xy} + \frac{c \sin zx}{a \sin xy}$$

$$(4) \quad \sin yz \cdot \sum \frac{1}{\partial X_i} + \sin zx \cdot \sum \frac{1}{\partial Y_i} + \sin xy \cdot \sum \frac{1}{\partial Z_i} = 0$$

Questa è la relaz. che sostituisce il teor. di
Carnot

Si costruiscano M, N, P sulle 3 rette xyz ,
si che $\frac{n}{\partial M} = \sum \frac{1}{\partial X_i}$, $\frac{n}{\partial N} = \sum \frac{1}{\partial Y_i}$, $\frac{n}{\partial P} = \sum \frac{1}{\partial Z_i}$.
Sostituendo risulta che M, N, P saranno allineati.
teor. della retta polare. Viceversa da questo segue la (4)

S114 (1)

(Anf)

Sugli inviluppi

Inviluppi di superf., ad esempio, ∞' . Avvenga che una superf. e quella infin' vicina abbiano comune una parte superficiale: anzi, questa parte supporremo poi che stia doppia nella prima superf. Allora la parte stessa è nell'inviluppo, ma non è toccata da tutte le ∞' superf. Così, sia il sistema

$$f(\lambda) = \alpha A^2 + \lambda AB + \lambda^2 \varphi + \lambda^3 \psi + \dots$$

ordinato secondo le potenze del parametro λ ; essendo $\alpha, A, B, \varphi, \psi \dots$ superficie. Dnde

$$f'(\lambda) = AB + 2\lambda \varphi + 3\lambda^2 \psi + \dots$$

e per $\lambda = 0$ abbiam le superf. αA^2 e AB che han comune la parte A . La $A=0$ è nell'inviluppo, è luogo di punto per cui due dei valori di λ coincidono in $\lambda=0$.

In questo caso speciale la $A=0$ fa parte dell'inviluppo contata doppia. L'inviluppo, in fatti, risulta eliminando λ da $f=0$, $f'=0$:

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha A^2 & AB & \varphi & \dots \\ 0 & \alpha A^2 & AB & \dots \\ 0 & 0 & \alpha A^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ AB & 2\varphi & 3\psi & \dots \\ 0 & AB & 2\varphi & \dots \\ 0 & 0 & AB & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = 0 \quad \begin{aligned} & (\text{moltiplicando la } 1^{\text{a}} \\ & \text{riga del } 2^{\text{o}} \text{ gruppo per} \\ & A, \text{ riescon divisibili la} \\ & 1^{\text{a}} \text{ colonna per } A^2 \text{ e la} \\ & 2^{\text{a}} \text{ per } A. \text{ Dunqu' il} \\ & \text{determinante qui accanto} \\ & \text{è divisibile per } A^2) \end{aligned}$$

su altro foglio

(da separare)

15
14
(2)

SI 14

Su certe proprietà di polarità
relative a talune configurazioni.

Abbiasi in S_{n+1} un gruppo di $N (> n+2)$ punti ed in S_n : questi taglierà la configurazione determinata da quelli e dalle loro rette congiungenti in una nuova configurazione di $\frac{N(N-1)}{2}$ punti e $\binom{N}{n+1} S_{n-1}$, tale che per ogni punto passano $\binom{N-2}{n-1} S_{n-1}$ e che ogni S_{n-1} contiene $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti. Consideriamo le $\infty^{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)-N-1}$ quadriche F_n^2 di S_{n+1} , soggette a passare per gli N punti: formano un sistema lineare tagliato da S_n secondo un sistema lineare ugualmente infinito di F_{n-1}^2 . A quest'ultimo è armonico un sistema lineare ∞^{N-n-3} di Φ_{n-1}^2 . Fra nel sistema di F_n^2 vi sono le coppie di S_n costituite da un S_n per $n+1$ degli N punti ed uno qualunque degli S_n nei rimanenti $N-n-1$ (e in genere da un S_n per k punti ed uno per i rimanenti $N-k$); quindi nel sistema di F_{n-1}^2 vi saranno le coppie costituite da uno degli S_{n-1} della configurazione di S_n e da un qualunque S_{n-1} passante per l' ^{S_{N-n-2}} complementare di quel primo S_{n-1} . Un S_{n-1} e un S_{N-n-2} complementari (e in generale due spari complementari qualunque) della configurazione considerata di S_n sono coniugati rispetto a tutto un sistema lineare di $\infty^{N-n-3} \Phi_{n-1}^2$.

nel caso particolare di $N = n+3$ si ha una proposizione dovuta al Veronese (Behandl. d. proj. Verh. etc. pag. 172 e 194), che però la dimostra in altro modo.

In particolare 5 punti di R_3 determinano sul piano una configurazione $(10 p., 10 r.)_3$ polare di se stessa rispetto ad una conica e 6 punti determinano una configurazione $(15 p., 20 r.)_{4,3}$ tale che le 20 rette formano 10 copie di rette conjugate rispetto ad una schiera di coniche.

I 20 punti di Steiner e le 15 rette di (Steiner-) Flücke formano una configurazione correttiva alla precedente (Hec. myst. pag. 24). Si ha così:

I 20 punti di Steiner sono a due a due coniugati rispetto ad un fascio di coniche. Essi si possono rappresentare con tre dei sei indici 12...6: diremo che appartengono alla figura i quelli che hanno l'indice i. In questo sono coniugati due punti di Steiner appartenenti a figure tutte diverse. Se poi si considerano quei 10 punti di Steiner e quelle 10 rette di Flücke che non appartengono alla figura i, essi formano una configurazione 10_3 polare - reciproca di se stessa rispetto ad una determinata conica i del fascio suddetto.

Sur un système de surfaces de Kummer

des propositions de M. Bochni qui se trouvent dans le ^{1/2} chapitre de votre travail peuvent être démontrées synthétiquement par les méthodes de ma dissertation d'une façon qui conduit aussi à d'autres résultats.

Soit R la quadrique M_3^2 de droites dans \mathbb{P}_5 et soit une autre M_4^2 que je nommerai f et un R_4 que je nommerai π , les deux quadriques R, f considérées comme enveloppes déterminent un système linéaire simplement infini de quadriques-enveloppes (ou, comme je dirai plus brièvement, un système de quadriques) et de même R et la quadrique πf déterminent comme enveloppes un nouveau système. Ces deux systèmes appartiennent à la série (linéaire doublement infini de quadriques-enveloppes) déterminée par R, f ; et la quadrique (singulière comme enveloppe) πf ; cette série est très particulière car elle comporte la variété \sum^8 de S_4 tangents communs se réduisant ponctuellement à la variété $\sum^{\frac{21}{2}}$ (comptée deux fois) des espaces tangents à f le long de πf et qui touchent aussi R (cette variété touche R suivant une $M_2^{2,2}$ de l'espace P polaire par rapport à R du pôle P de π par rapport à f), et chacun de ces espaces touche les quadriques de la série non plus ^{comme en} général dans les points d'un plan, mais bien dans ceux d'une droite. Sur un tel ~~plan~~ espace étant choisi sur la droite le point de contact il y a encore un système de quadriques de la série qui ont ce point de contact

Et dans cette série ce système spécial particulier se compose toujours de quadratiques M_3^2 qui se touchent le long d'une M^2 avec un même rôle de contact P ; ~~réapparaissent~~ chaque M_3^2 quadratique singulière de la série, c'est à-dire chaque quadratique qui se réduit à une M^2 déterminée ~~et~~ ~~des quadratiques communes comme~~ ~~éveloppées de ces deux systèmes~~ formant ~~dans~~ ~~un tel système~~ avec P un tel système de la série.

de M_3^2 de cones quadratiques qui projettent toutes ces M_3^2 de la ~~série~~.

~~qui~~ du point P forment un système ayant commun le $\Sigma_2^{2,2}$ d'espaces tangents.

La série peut être représentée projectivement par les points d'un plan; à $P \in R$ correspondent alors deux points P^1, R^1 ; aux quadratiques singulières (M_3^2) de la série les points d'un cercle du 6^e ordre l'ayant en P^1 un point quintuple; aux ∞^1 systèmes de passant par R les ∞^1 droites passant par R^1 .
 Dans ~~chaque~~ ^{un quelconque} de ces systèmes il y a toujours une quadratique passant par une M_3^2 donnée de la série; ~~car~~ elle est représentée par le point d'intersection de la droite correspondant au système avec celle qui joint P^1 au point de C^6 qui est l'image.

SI 16(2)

En traduisant dans le langage ordinaire nous avons :

Si α deux surfaces de Kummer $\frac{\text{une congruence}}{\text{l'autre est singulière pour}}$
~~les complexes quadratiques contenant une congruence quadratique~~ sont telles qu'une congruence quadratique de l'une appartient à un complexe quadratique de l'autre, chaque des 6 congruences quadratiques qui appartiennent à chacune est contenue dans un complexe de l'autre. On peut construire un système de 6 surfaces de Kummer tel que deux quelconques d'entre elles se trouvent dans cette relation réciproque. Le groupe des 6 complexes de l'une d'elles qui passent par les 6 congruences ~~de l'autre~~ d'une autre est projectif sur groupe de celles-ci. Toutes ces 6 surfaces se touchent ~~l'une à l'autre~~ le long, d'une même courbe du 8^e ordre et passe ~~et elles passent toutes par les mêmes 16 points où elles ont même plans tangents~~. ~~Les 16 points et 16 plans sont singuliers pour l'une de ces surfaces~~ appartenant à un certain complexe linéaire. Chacun des 6² complexes quadratiques appartenant à ce système de surfaces contient une seule des 6¹ congruences quadratiques, tandis que chacune de celles-ci appartient à un complexe de chacune des surfaces.

Un cas particulier connu est celui où la courbe du 8^e degré serait une courbe asymptotique (de tangentes quadriportuées) pour les surfaces, de sorte que celles-ci ont un même complexe linéaire fondamental.

S1 16 (3)

Su una classe di complessi di grado qualunque.

Era i punti di un piano π e le rette di un altro piano π' si sia
una corrispondenza ^{univoca} di grado n : diremo coniugati un punto di π e un
punto della retta corrispondente in π' . Allora ad un punto di π , saranno
coniugati in π tutti i punti di una curva d'ordine n di una certa retta.
Non siamo studiato il completo delle coniuganti punti coniugati dei
due piani facciamo una trasformazione razionale dei punti di π , nei
punti di un altro piano π' : allora le rette di π , si trasformeranno
nelle curve d'ordine $n!$ di π' . E tra i due piani π , π' si avrà
questa corrispondenza che ai punti di π corrispondono univocamente le
curve d'ordine $n!$ di una certa retta ^(omaloidica) in π' , sicché ~~se sono~~ alle curve di
questa retta passanti per un punto e quindi formanti un fascio corrispondo-
no in π : punti di una curva d'ordine n di una certa retta omaloidica.

Ad un punto di π sono coniugati in π' i punti di una C^n ,
e ad un punto di π' sono coniugati in π i punti di una C^n . Non
ghiamo studiare il completo delle coniuganti dei punti coniugati.

Un piano qualunque taglia π , π' in due rette r , r' : ad un
punto di r sono coniugati n punti di r' e ad un punto di r' n punti
di r , sicché tra le due rette vi è una corrisp. (n , n'): le coniuganti
punti coniugati formano in quel piano una ~~curva~~ ^{$n+n'$} curva di classe
 $n+n'$ avente. r per retta n^* upla, r' per retta n' upla. Dunque

Il complesso è di grado $n+n'$ e contiene i piani rigati π, π' risp. n volte ed n' volte, sicché le curve piane del complesso hanno su quei due piani rette n -uple ed n' -uple.

Il principio di corrispondenza mostra che sulla retta $\pi\pi'$ vi sono $n+n'$ punti che coincidono con loro coniugati: le rette passanti per essi appartengono al complesso, cioè quei punti sono centri di stelle di rette (semplici) del complesso, punti notevoli di questi. Ogni piano passante per la retta $\pi\pi'$ ha la curva del complesso risolta in $n+n'$ fasci aventi quei punti notevoli per centri.

Consideriamo un gli elementi eccezionali di π e π' , vale a dire i punti fondamentali delle due reti omologiche. Sia P_i un punto i-uplo comune alle curve C^n di π : in π , gli corrispondono ∞ (invece che uno solo) le rette ~~che~~ incidenze formanti una curva di classe ~~i~~ e ad esse corrispondono in π' ∞ $(^n)$ della nostra retta ~~incidenze~~ formanti una serie di ordine i . Quindi la stella P_i appartiene al complesso i volte, cioè colle sue rette i -uple. Lo stesso si dice per ciascun punto fondamentale di ciascuno dei due piani.

Le correlazioni nel piano.

Allora nel piano una correlazione tra i due piani corrispondenti π e π' .

Al punto P corrispondono in π' e π risp. le rette r' e r , le quali si corrispondono in un'omografia. Sia P su r' : considerando in π gli corrispondenti r , passanti per P . Gli punti di una retta corrispondono proietivamente le rette di due fasci: vi sono sempre su quelle rette due punti che stanno sulle rette corrispondenti. Il luogo di tali punti è l'asse. L'asse di tali rette sono però due coniche Q, Γ . Ad un punto di Q corrispondono le 2 tangenti condotte da esso a Γ ; se il punto appartiene pure a Γ esso coincide in una retta che corrisponde a quel punto in entrambi i modi e che quindi è tangente comune alle 2 coniche in quel punto, sicché le 2 coniche hanno doppio contatto in punti A, B compresi d'~~l'asse~~.

All punto P corrispondono r' e r : dice che lo polare di P rispetto a Q passa per $r'P$, cioè che i punti P ed $r'P$ sono conjugati rispetto a Q .

In fatti alla retta p che li congiunge corrisponde il punto R' in π' il quale sta in r' : il fascio R' e la retta p si corrispondono proietivamente. Al punto P rispetto a $r'P$ corrisponde la retta $R'P$, ed allo stesso $S'P$ corrisponde ~~la retta r' ed al punto $r'P$~~ un punto ~~quale~~ S . Dunque la corrispondenza è involutiva e quindi gli elementi uniti che sono i punti d'intersezione di p con Q saranno armonici coi due elementi conjugati P ed $r'P$. (V. dopo)

Diciamo ~~P' l'opposto~~ s lo polare di P rispetto a Q , e diciamo ~~I'~~ il punto $r'P$. Si dice che nell'inversione determinata nel fascio I dalle coppie $r'P$, e IA, IB , i raggi S e SM sono gli elementi doppi.

Consideriamo ancora quell'involuzione sulla retta p determinata dalla corrispondenza tra i punti di questa e le rette passanti per R' le loro corrispondono in π' . Inizialmente si ha un'involuzione tra i punti di p e quelli in cui p è tagliato R' , le quali passeranno per punto R_2 corrispondente a p in π . Queste due involuzioni hanno comuni i punti doppi sulla conica Q e quindi coincidono. Dunque come il punto P della retta p ha le due rette corrispondenti taglienti su p , lo stesso accade per tutti i punti di p , cioè ponendosi P su p , le sue rette corrispondenti r', r_2 rotieranno intorno ad $R'_2 R_2$, sempre tagliandosi su p . In particolare se il punto P viene in quel punto che, nell'involuzione, corrisponde al punto d'intersezione di P colla retta $R'_2 R_2$, le sue rette corrispondenti π', π_2 consideriamo con questi. Dunque la retta p passa per quel punto fondamentale fisso X che non sta sulle due coniche Q, π' ; almeno nel caso generale. I due punti $R'_2 R_2$ poi stanno sulla retta x che corrisponde doppiamente ad X . — Diciamo R_2 il polo di p rispetto a Q , polo che stia su x ; e diciamo S il punto d'intersezione di p con x , uccelli anzitutto R_2 ed S saranno coniugati rispetto a Q . Vogliamo provare che inoltre R_2 ed S saranno coniugati armonici rispetto ad $R'_2 R_2$. Per questo notiamo che dicendo M, N i due punti d'intersezione di x colla conica fondamentale Q e considerando su x le corrispondenze tra i suoi punti e quelli d'intersezione delle rette corrispondenti in π' si ha che: al punto M corrisponde M , ad N corrisponde N , ad S corrisponde R'_2 , ad R_2 corrisponde S ; ne segue che $MN S R_2$ è proiettiva a $MNR'_2 S$, ossia ad $NMR'_2 S$, il che prova che nell'involuzione determinata dalle coppie MN ed $R'_2 R_2$, il punto S è un punto doppio: l'altro punto doppio sarà R_2 coniugato armonico di S rispetto ad MN . — Dunque tutto è dimostrato, anche l'enunciato della fine della pag. preced. poiché il fascio I era tagliato dalla retta x nei punti considerati.

Aggiungo ora che tutti quei fasci sono proiettivi fra loro, cioè che se due rette r', r_2 corrispondono ad uno stesso punto P , il gruppo formato da

esse e dalle coniuganti del loro punto comune ai due punti fissi M, N si mantiene proiettivo a se stesso col muoversi di P . In fatto i due punti $R'_2 R_2$ sulla retta x corrispondono ad uno stesso retta passante per X e si corrispondono quindi tra loro in un'omografia: i due punti doppi sono M, N , cosicché il gruppo $MNR'_2 R_2$ rimane proiettivo a se stesso. Sia, data la conica Q ed il punto X e quindi i punti M, N di Q posti sulla polare x di X . Sarà determinata la corrispondenza tra il punto P ed i punti I d'intersezione delle r', r_2 . poiché in ogni retta PX basterà prendere il punto coniugato di P rispetto a Q . Ma le rette r', r_2 non saranno determinate; affinché lo siano basta dare un gruppo proiettivo all'gruppo delle π, π' , I ed r' ed allora determinati r' saranno pur determinati r_2 : vale a dire nello' involuzione che ha per elementi doppi π, π' e la polare di P , dato un elemento r' sarà determinato il coniugato r_2 . Vi sono dunque infinite correlazioni relative a questi dati e noi vediamo che esse godono delle proprietà che ad ogni punto (o retta) del piano corrispondono rispetto ad esse coppie di elementi di un'involuzione. Tra queste relazioni va a' c'è una specializzata in cui le rette corrispondenti a un punto qualunque del piano convergono nell'uno o nell'altro dei due punti M, N ; vi è una polarità rispetto alla conica fissa Q , e finalmente vi è un'altra correlazione specializzata in cui i due punti singolari coincidono in X . Così la l'involuzione che compariva dianzi è perfettamente spiegata.

Sui complessi che comparendo in una correlazione.

Dato una correlazione, ad ogni elemento corrispondono altri due che si corrispondono in una determinata omografia e che hanno comune una retta di un determinato complesso tetraedrale T , che è appunto il complesso generato da quella omografia. Se poi consideriamo una retta qualunque r la quale considerato in S abbia r' per corrispondente in S' , mentre considerato in S' abbia in S per corrispondente r'' , allora supponiamo che r tagli r' , al punto r'' considerato in S' corrisponderà in S un piano comune ad r' ed r'' , vale a dire se r taglia r' , taglia pure r'' . Quindi le rette che tagliano le loro corrispondenti nella correlazione formano uno stesso complesso C . Alle rette r di un fascio qualunque corrispondono in S' le rette r' di un altro fascio proiettivo a quello, sicché vi saranno nel primo due rette del complesso, taglienti cioè le corrispondenti. Il complesso C è dunque quadratico. Ad uno punto P corrisponde in S' un piano π' cui corrispondono proietivamente a quelle uscenti da P , e similmente in S un piano π , proiettivo a quella stessa: questi due piani tagliano questa seconda un piano punteggiato correttivo ad essi, sicché in ciascuno vi è una conica lungo dei punti che stanno sulle rette corrispondenti e queste due coniche stanno nel cono del complesso C uscente da P . Sia r una retta di questi coni, sicché essa taglierà le due rette corrispondenti r' e r'' , giacenti sop. in π' e π'' . Al punto r'' corrisponde (V. sopra) in S il piano $\overline{rr'}$, passante per esso, e così al punto r' corrisponde in S' il piano $\overline{r'r''}$ per esso.

Dunque le due coniche considerate, luoghi dei punti r' , r'' , appartenenti al luogo dei punti che stanno nel piano corrispondente della correlazione, sicché questo luogo è una quadrica Q tagliata dai piani π' , π , secondo quelle coniche. I piani corrispondenti passano per il punto P . Da il piano ~~$r' r''$~~ $\in S$ ha ~~corrispondente~~ in S' il punto $r' r''$, ed in S' un punto della retta r' e insiupperano un cono quadrico circoscritto dal punto P alle quadriche Γ insiupperate dai piani che contengono i punti corrispondenti: questi cono taglia π' e π , nelle due coniche insiupperate dalle rette r' e r'' (che contengono i loro punti corrispondenti), e queste sono le coniche del complesso C ~~insiupperate dalle rette corrispondenti al cono~~ appartenenti ai piani π' , π , del complesso appartenente al punto P . Questo cono ha doppio contatto col cono circoscritti a Γ : ognuna delle due generatrici di contatto r' gode ~~dei~~ di proprietà notevoli. Osserviamo che nel piano π' si aveva una correlazione tra i punti d'intersezione delle r' (1° piano) e le r'' corrispondenti (2° piano); se una r' rotta intorno ad un punto, la r'' rotta nel piano corrispondente per P coincide ad un punto (sempre di π') corrisponde nel 2° piano la intersez. retta r' corrispondente; alla sua congiungente con P , e nel 1° piano la intersez. col piano che corrisponde a quel punto in S . E ora quel punto P ha una stessa retta per corrispondente, vuol dire che la retta r' corrispondente in S' alla r' nel piano corrispondente in S al punto P' : a q

S 1 19 (2)

Quando c' è che il cono del complesso C uscente dal punto P si svincola?
~~Si accade o quando il punto~~ Ricordando che quel cono proietta le due coniche d'intersezione dei piani π', π_1 , con Q , è chiaro che ciò accadrà: 1° quando senza che quelle coniche si svincolano il punto P sta ~~sulla retta~~ $\pi' \cap \pi_1$, ossia e quindi sull'altro dei due piani corrispondenti π', π_1 ; 2° quando ~~quelle coniche si svincolano~~ il punto P non sta su questi piani, l'una e quindi l'altra delle 2 coniche si svincolano. In tal caso sul piano π' ad esempio la correlazione deve essere ~~non~~ specializzata, cioè avere le 2 coniche fondamentali assise. — Nel 1° caso il punto P appartenente a Q e le rette che per P vanno nei 2 piani corrispondenti π', π_1 hanno appartengono a C poiché una retta r che in π' vada per P ha per retta corrispondente in S una retta che per P vada in π_1 e quindi la figlia e viceversa. Quanto alla retta che corrisponde in S' alla stessa retta r , poiché questo passa per P , essa sarà in π' , cioè nello stesso piano di r , e poiché r sta in π' , essa passerà per il punto P che corrisponde a questo in S' . Alla retta $\pi' \cap \pi_1$ una retta r corrisponderà la retta $P''P$: dunque il luogo dei punti d'intersezione delle rette rr' , cioè la unica d'intersezione di π' con Q passa per P e P'' e tocca in P la retta π'_1 .

S/ 19 (3)

Sulla serie omofocale di correlazioni

La correlazione data da

$$(1) \quad \xi'_1 = a_{14} x_4, \quad \xi'_2 = a_{23} x_3, \quad \xi'_3 = a_{12} x_2, \quad \xi'_4 = a_{41} x_1$$

$$\text{ossia: } (1') \quad \xi'_1 = a_{41} x'_4, \quad \xi'_2 = a_{32} x'_3, \quad \xi'_3 = a_{23} x'_2, \quad \xi'_4 = a_{12} x'_1$$

ha ~~per~~ per quadriche fondamentali:

$$(a) \quad (a_{14} + a_{41}) x_1 x_4 + (a_{23} + a_{32}) x_2 x_3 = 0$$

$$(b) \quad \left(\frac{1}{a_{14}} + \frac{1}{a_{41}}\right) \xi'_1 \xi'_4 + \left(\frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}}\right) \xi'_2 \xi'_3 = 0$$

ossia:

$$(2) \quad \lambda_{14} x_1 x_4 + \lambda_{23} x_2 x_3 = 0$$

$$(3) \quad \lambda_{14} \xi'_1 \xi'_4 + \lambda_{23} \xi'_2 \xi'_3 = 0,$$

dove:

$$(4) \quad a_{14} + a_{41} = r \ell_{14}, \quad a_{23} + a_{32} = r \ell_{23}$$

$$(5) \quad \frac{1}{a_{14}} + \frac{1}{a_{41}} = \rho \lambda_{14}, \quad \frac{1}{a_{23}} + \frac{1}{a_{32}} = \rho \lambda_{23}$$

Da queste equazioni si ha: $a_{14} a_{41} = \frac{r \ell_{14}}{\rho \lambda_{14}}$, $a_{14} + a_{41} = r \ell_{14}$

$$2a_{14} = r \ell_{14} \pm \sqrt{r^2 \ell_{14}^2 - \frac{4r^2 \ell_{14}^2}{\rho^2 \lambda_{14}^2}} = r \ell_{14} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\rho^2 \ell_{14}^2 \lambda_{14}^2}}\right)$$

ossia, assoggettando r, ρ alla condizione $r\rho = k$:

$$a_{14} = r \ell_{14} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{14}^2 \lambda_{14}^2}}\right), \quad a_{41} = r \ell_{14} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{14}^2 \lambda_{14}^2}}\right)$$

$$a_{23} = r \ell_{23} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{23}^2 \lambda_{23}^2}}\right), \quad a_{32} = r \ell_{23} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{23}^2 \lambda_{23}^2}}\right)$$

Supponiamo date le due quadriche (2), (3), ~~con i coefficienti~~ ~~con i coefficienti~~ $\lambda_{14}, \lambda_{23}$

~~si determinano~~ ~~si determinano~~ dei due valori di $\sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{14}^2 \lambda_{14}^2}}$ e risp. $\sqrt{1 - \frac{4}{k \ell_{23}^2 \lambda_{23}^2}}$. Allora corrispondentemente ai diversi valori di k le equazioni (1), (1') rappresentano ∞

2

correlazioni aventi comuni le quadriche fondamentali (2), (3) e rappresentabili dalle equazioni (1), (1'), in cui sia:

$$(6) \quad a_{14} = l_{14} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_{14}}{k}} \right), \quad a_{41} = l_{14} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_{14}}{k}} \right)$$

$$(7) \quad a_{23} = l_{23} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_{23}}{k}} \right), \quad a_{32} = l_{23} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m_{23}}{k}} \right)$$

dove k è il parametro variabile e si è posta:

$$(8) \quad m_{14} = -\frac{4}{l_{14} \lambda_{14}}, \quad m_{23} = -\frac{4}{l_{23} \lambda_{23}}$$

Considerando un punto qualsiasi x gli es' punti corrispondenti ξ' in quelle correlazioni sono tali che per le (1) sarà: $a_{14} = \frac{\xi'_1}{x_4}$, $a_{41} = \frac{\xi'_4}{x_1}$, ecc. e sostituendo nelle (4) e (5):

$$(9) \quad \frac{1}{l_{14}} \left(\frac{\xi'_1}{x_4} + \frac{\xi'_4}{x_1} \right) = \frac{1}{l_{23}} \left(\frac{\xi'_2}{x_3} + \frac{\xi'_3}{x_2} \right)$$

$$(10) \quad \frac{1}{l_{14}} \left(\frac{x_1}{\xi'_4} + \frac{x_4}{\xi'_1} \right) = \frac{1}{l_{23}} \left(\frac{x_2}{\xi'_3} + \frac{x_3}{\xi'_2} \right)$$

Le stesse equazioni si avrebbero usando le (2) invece che le (1). Quindi queste equazioni (9) e (10) sono quelle che legano un punto qualsiasi x ed un piano qualsiasi ξ' quando essi si corrispondono in una correlazione della serie omofocale.

I punti ξ' che corrispondono al punto x passano in virtù delle (9) per un punto fisso y legato ad x dalle relazioni:

$$(11) \quad y_1 = \frac{1}{l_{14} x_4}, \quad y_4 = \frac{1}{l_{14} x_1}, \quad y_2 = -\frac{1}{l_{23} x_3}, \quad y_3 = -\frac{1}{l_{23} x_2}$$

Notiamo anzitutto che la corrispondenza tra i due punti x, y è invertibile. Inoltre da queste equazioni (11) si ha:

S1 20

$$x_1 : x_4 = y_1 : y_4 \rightarrow x_2 : x_3 = y_2 : y_3,$$

equazione che mostra essere i due punti x, y congiunti da una retta che
taglia i due spigoli 14, 23. Inoltre dalla (11) si ha:

$$\ell_{14}(x_1 y_4 + x_4 y_1) + \ell_{23}(x_2 y_3 + x_3 y_2) = 0,$$

riche' confrontando colle (2) si vede inoltre che i due punti x, y sono
coniugati rispetto a questo quadriaco - lungo fondamentale. — Dato questo
quadriaco fondamentale e le equazioni di quelle rette 14, 23, ad ogni punto
x sarà coniugato quel punto y in tutte le correlazioni (∞^2) corrispondenti
a questi enti fondamentali. E' questo un fatto, poiche'

La (10) si può scrivere:

$$\frac{1}{\lambda_{14}} \frac{x_1 x_4}{\xi'_1 \xi'_4} \left(\frac{\xi'_1}{x_4} + \frac{\xi'_4}{x_1} \right) = \frac{1}{\lambda_{23}} \frac{x_2 x_3}{\xi'_2 \xi'_3} \left(\frac{\xi'_2}{x_3} + \frac{\xi'_3}{x_2} \right)$$

ora, in virtù della (9):

$$\frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}} \frac{x_1 x_4}{\xi'_1 \xi'_4} = \frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}} \frac{x_2 x_3}{\xi'_2 \xi'_3}$$

o, se si vuole:

$$(12) \quad \frac{\lambda_{14}}{\ell_{14}} \frac{\xi'_1 \xi'_4}{x_1 x_4} = \frac{\lambda_{23}}{\ell_{23}} \frac{\xi'_2 \xi'_3}{x_2 x_3}.$$

Si vede dunque che i punti ξ' corrispondenti al punto x nella serie omologa
di correlazioni ℓ formano un cono quadriaco avente per vertice il punto
 y determinato dalle (11). Questo cono tocca le 4 spigoli 12, 13, 24, 34.

(Continua)

4

La sua equazione in coordinate di punti X_i si trova essere:

$$0 = \left\{ \frac{1}{\lambda_{14}} (x_4 X_1 + x_1 X_4) - \frac{1}{\lambda_{23}} (x_2 X_3 + x_3 X_2) \right\}^2 - 4 \left(\frac{1}{\lambda_{14} \lambda_{14}} - \frac{1}{\lambda_{23} \lambda_{23}} \right) \left(\frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}} x_1 x_4 X_1 X_4 - \frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}} x_2 x_3 X_2 X_3 \right)$$

Bose analoghe si hanno considerando i punti che nella serie di correlazioni corrispondono ad un piano fisso ξ : tutti quegli os' punti formeranno una conica posta in un piano η determinato dall'oservare coniugato di ξ rispetto alla quadrica - involuppo fondamentale (3) e dal tagliare ξ in una retta che sia gli spigoli 14, 23. Questa conica si appoggia poi sugli altri 4 spigoli del tetraedro fondamentale. Il suo piano η è dato da:

$$\eta_1 = \frac{1}{\lambda_{14} \xi_4}, \quad \eta_4 = \frac{1}{\lambda_{14} \xi_1}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{\lambda_{23} \xi_3}, \quad \eta_3 = -\frac{1}{\lambda_{23} \xi_2}$$

e in questo caso è determinato come intersezione delle quadriche

$$\frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}} \frac{x_1 x_4}{\xi_1 \xi_4} = \frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}} \frac{x_2 x_3}{\xi_2 \xi_3},$$

la quale non muta finché $\xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3$ rimane costante. Dunque per tutti i piani ξ , che toccano ~~una quadrica del~~ piano-schier (cui appartengono le 2 quadriche fondamentali) la conica corrispondente sta in un'altra quadrica determinata da questi fasci. Se rappresentiamo con $k \xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3$ cioè $x_1 x_4 = k x_2 x_3$ la prima quadrica, involuppati da ξ , la seconda, luogo delle coniche, sarà $x_1 x_4 = k' x_2 x_3$ dove $k' = \frac{1}{k} \frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}} : \frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}}$, cioè tra le due quadriche ci sarà corrispondenza involutiva. Gli elementi doppi corrispondono a $k = \pm \sqrt{\frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}}} : \frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}}$, cioè sono

$$\sqrt{\frac{\ell_{14}}{\lambda_{14}}} x_1 x_4 = \sqrt{\frac{\ell_{23}}{\lambda_{23}}} x_2 x_3$$

ma le coppie di quadriche coniugate vi sono le due opposte di piani (o di

punti) appartenenti al fascio-schiera; poi per $k = -\frac{\ell_{23}}{\lambda_{14}}$ si ha:
 $k' = -\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{23}}$, vale a dire si corrispondono le due quadriche
 $\lambda_{14}x_1x_4 + \ell_{23}x_2x_3 = 0, \quad \lambda_{23}x_1x_4 + \lambda_{14}x_2x_3 = 0$,
essere le due quadriche fondamentali (2). (3). Dunque l'involtuzione
considerata nel fascio di quadriche è determinata da questa coppia di qua-
driche coniugate e dalla coppia costituita dalle due coppie di piani di quel fascio.
Essa corrisponde a se stessa per dualità. Ad un punto qualunque x dello
spazio corrispondono nelle correlazioni i punti di un cono quadrico determinato
dall'avere per vertice il punto coniugato y e dell'essere circoscritto alle quadriche
di quell'involtuzione che è coniugata alla quadrica passante per x . —
Corrispondendo ad un piano qualunque ξ corrispondono i punti della conica d'in-
tersezione del piano coniugato η colla quadrica coniugata a quella che trae
 ξ .

Le equazioni (1), (1') mostrano, oltre (4) e (5) che nella serie omo-
focale vi è insieme alla coniugazione la sua inversa. Al piano
 ξ corrispondono in due correlazioni inverse qualunque i punti x, x' :
 $x_1 = \frac{1}{a_{14}}\xi_4, \quad x_4 = \frac{1}{a_{41}}\xi_1, \quad x_2 = \frac{1}{a_{23}}\xi_3, \quad x_3 = \frac{1}{a_{32}}\xi_2$
 $x'_1 = \frac{1}{a_{41}}\xi_4, \quad x'_4 = \frac{1}{a_{14}}\xi_1, \quad x'_2 = \frac{1}{a_{32}}\xi_3, \quad x'_3 = \frac{1}{a_{23}}\xi_2$
nella cui coniugazione sta il punto $x_i + x'_i = z_i$, uod in vista delle (5):
 $z_1 = \lambda_{14}\xi_4, \quad z_4 = \lambda_{41}\xi_1, \quad z_2 = \lambda_{23}\xi_3, \quad z_3 = \lambda_{32}\xi_2$
che è il polo del piano ξ rispetto alla quadrica fondamentale (3). Si segna

S120(6)

del resto che la congruente $x \cdot x'$ contiene questo polo, anzi in essa $x \cdot x'$ sono divisi armonicamente da ξ e da questo polo. Sul piano η la conica luogo delle opposte $x \cdot x'$ di punti corrispondenti a ξ e' puntozzata secondo un'involtuzione il cui polo e' z . Tra i suoi punti vi sono le intersezioni degli spiziali $12 \cdot 34$, $13 \cdot 42$: le congruenti dei 2 punti $12 \cdot 34$ e dei 2 punti $13 \cdot 42$ si tagliano in z ; la congruente i punti $14 \cdot 23$ e' invece (la polare di z rispetto alla conica e nello stesso tempo) l'intersezione del piano η con ξ .

Nella correlazione rappresentata da (1) la retta p' corrispondente ad una retta data p ha per coordinate:

$$p'_{12} = a_{41} a_{32} p_{12}, \quad p'_{13} = -a_{41} a_{23} p_{13}, \quad p'_{14} = a_{23} a_{32} p_{23}$$

$$p'_{34} = a_{14} a_{23} p_{34}, \quad p'_{42} = -a_{14} a_{32} p_{42}, \quad p'_{23} = a_{14} a_{31} p_{14}$$

Affinché esso tagli p dovrà dunque essere:

$$(a_{41} a_{32} + a_{14} a_{23}) p_{12} p_{34} + (-a_{41} a_{23} - a_{14} a_{32}) p_{13} p_{42} + a_{23} a_{32} p_{23}^2 + a_{14} a_{41} p_{14}^2 = 0$$

Questo complesso quadratico ha, ponendo:

$$a_{41} a_{32} + a_{14} a_{23} = \alpha', \quad -a_{41} a_{23} - a_{14} a_{32} = \alpha'', \quad a_{23} a_{32} = \beta, \quad a_{14} a_{41} = \gamma,$$

per serie omofocali:

$$\frac{\gamma p_{14}^2 + \beta p_{23}^2 - \lambda p_{14} p_{23}}{\lambda^2 - 4\beta\gamma} - \frac{p_{12} p_{34}}{\lambda + \alpha'} - \frac{p_{13} p_{42}}{\lambda + \alpha''} = 0$$

Ora se nelle espressioni di α' , α'' , β , γ si pongono i valori (6) e (7):

S120 (7)

$$\begin{aligned} a_{14} &= l_{14}(1 + \sqrt{1 + \frac{m_{14}}{k}}) , \quad a_{41} = l_{14}(1 - \sqrt{1 + \frac{m_{14}}{k}}) \\ a_{14} &= r l_{14} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{k l_{14}^2 m_{14}}} \right) , \quad a_{41} = -l_{14} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{k l_{14}^2 m_{14}}} \right) \\ a_{34} &= l_{14} \left(1 + \sqrt{1 + k m_{14}} \right) , \quad a_{41} = l_{14} \left(1 - \sqrt{1 + k m_{14}} \right) \\ a_{23} &= l_{23} \left(1 + \sqrt{1 + k m_{23}} \right) , \quad a_{32} = l_{23} \left(1 - \sqrt{1 + k m_{23}} \right) \end{aligned}$$

si ottiene:

$$a' = 2l_{14}l_{23} \left(1 + \sqrt{(1 + km_{14})(1 + km_{23})} \right), \quad a'' = 2l_{14}l_{23} \left(1 + \sqrt{(1 + km_{14})(1 + km_{23})} \right)$$

$$\beta = -k l_{23}^2 m_{23}^2, \quad \gamma = -k l_{14}^2 m_{14}^2$$

Il determ. di quel compl. è

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & \rho + a' & 0 \\ \rho + a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho + a'' \\ 0 & \rho + a'' & 0 \\ \hline & & 2\beta & \rho \\ & & \rho & 2\gamma \end{array} \right|$$

$$= -(\rho + a')^2 (\rho + a'')^2 (\rho^2 - \beta\gamma)$$

Il compl. è dunque H quando $a' + a'' = 0$, $(a_{14} - a_{41})(a_{23} - a_{32}) = 0$. Ma

term. della correz. $\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & s a_{14} + a_{41} \\ 0 & s a_{23} + a_{32} & 0 \\ s a_{32} + a_{23} & 0 & s a_{14} + a_{41} \end{array} \right|$ diventa allora $\left[\begin{smallmatrix} (11) & 11 \end{smallmatrix} \right]$. Dunque

Se invece $a' + a'' = 0$, $a_{14} = -a_{41}$, diventa

$$\begin{aligned} a_{14} (a_{23} - a_{32}) + a_{14} (a_{23} - a_{32}) p_{13} p_{42} + a_{23} a_{32} p_{23}^2 + a_{14} a_{41} p_{14}^2 &= 0 \\ -a_{14} (a_{23} - a_{32}) p_{14} p_{23} + a_{23} a_{32} p_{23}^2 - a_{14}^2 p_{14}^2 &= 0, \end{aligned}$$

cioè il complesso degenera in due complessi lineari

$$a_{14} p_{14} + a_{23} p_{23} = 0, \quad a_{14} p_{14} - a_{32} p_{23} = 0$$