C. Segre

Ricerche sui sistemi proiettivi
di complessi di enti geometrici

e sul numero di soluzioni di
un sistema di equazioni
a più variabili od a più sistemi di variabili.

(Gennajo e Febbrajo 1882)

Teorema e dimostrazioni che contribuiscono le ricerche precedenti

Numero di soluzioni di un sistema di equazioni simultanee

Teorema

Abbiasi un sistema determinato di n equazioni tra più gruppi di variabili: $x_1 . x_2 \dots x_\alpha$; $y_1 . y_2 \dots y_\beta$; $z_1 . z_2 \dots z_\gamma$; ....; $u_1 . u_2 \dots u_\delta$ in numero rispettivamente di $\alpha . \beta . \gamma \dots \delta$ essendo $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \delta = n$. Siano poi rispettivamente $a_1 . a_2 \dots a_n$ i gradi di quelle equazioni rispetto alle α variabili x, considerate complessivamente, $b_1 . b_2 \dots b_n$ i gradi rispetto alle y, $c_1 . c_2 \dots c_n$ i gradi rispetto alle z, ..., $d_1 . d_2 \dots d_n$ i gradi rispetto alle u; cioè le equazioni siano:

$$f_1(\overbrace{x_1 . x_2 \dots}^{a_1}; \overbrace{y_1 . y_2 \dots}^{b_1}; \dots; \overbrace{u_1 . u_2 \dots}^{d_1}) = 0$$

$$f_2(\overbrace{x_1 . x_2 \dots}^{a_2}; \overbrace{y_1 . y_2 \dots}^{b_2}; \dots; \overbrace{u_1 . u_2 \dots}^{d_2}) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(\overbrace{x_1 . x_2 \dots}^{a_n}; \overbrace{y_1 . y_2 \dots}^{b_n}; \dots; \overbrace{u_1 . u_2 \dots}^{d_n}) = 0$$

Il numero delle soluzioni comuni a questo sistema d'equazioni sarà:

$$N = \sum a_{\alpha'} a_{\alpha''} \dots b_{\beta'} b_{\beta''} \dots\dots d_{\delta'} d_{\delta''} \dots$$

dove $\alpha'\alpha''\dots$, $\beta'\beta''\dots$, ..., $\delta'\delta''\dots$ sono combinazioni dei numeri $1.2 \dots n$ rispettivamente degli ordini $\alpha . \beta \dots \delta$ prese sempre in modo che non abbiano alcun elemento comune (sicché il numero dei termini di quella somma sarà $\frac{n!}{\alpha!\beta!\dots\delta!}$)

Dimostrazione.

Ammetto come evidente che il numero cercato N delle soluzioni di quel sistema d'equazioni non dipende che dai gradi di queste nei vari gruppi di

variabili, e quindi è una funzione di $a_1 . a_2 \ldots, b_1 . b_2, \ldots, \ldots, d_1 . d_2 \ldots$ Noi ci proponiamo di trovare quale sia questa funzione mediante alcune proprietà che dimostreremo appartenerle mediante la considerazione delle equazioni date. Notiamo anzitutto che il numero N essendo per sua natura intero, la funzione cercata deve essere razionale ed intera. L'essere intera del resto risulta pure dal fatto che se essa non fosse tale si potrebbero sempre dare alle a . b, ... d tali valori interi e finiti da rendere infinita quella funzione, mentre il numero N deve sempre essere finito, finché le equazioni si suppongono affatto generali di quei dati gradi. Ciò posto la funzione N sarà un certo polinomio che dico essere tale che in ogni suo termine ~~cioè~~ è per fattore almeno una delle a, almeno una delle b, ... almeno una delle d; ed anche almeno una delle $a_1 . b_1 \ldots d_1$, almeno una delle $a_2 . b_2 \ldots d_2$, ..., almeno una delle $a_n . b_n \ldots d_n$. Notiamo infatti che se tutte le a ad esempio, si suppongono nulle, il sistema dato d'equazioni non conterrà le variabili x, cioè conterrà meno variabili che equazioni e quindi il numero di soluzioni N dovrà annullarsi. Dunque ogni termine del polinomio N deve veramente contenere almeno una delle a, ed analogamente almeno una delle b, ... almeno una delle d. Se invece supponiamo che si annullino tutte le $a_1 . b_1 \ldots d_1$ siano nulle, la prima equazione prenderà la forma di una costante uguagliata a 0, sicché il sistema dato diverrà impossibile in generale e quindi il numero N dovrà annullarsi. Dunque veramente ogni suo termine conterrà una delle $a_1 . b_1 \ldots d_1$

almeno, ed analogamente una almeno delle $a_2 . b_2 \ldots d_2$, ..., una almeno delle $a_n . b_n \ldots d_n$. Ora noi ci proponiamo di provare che precisamente ogni termine contiene <u>uno solo</u> dei numeri $a_1 . b_1 \ldots d_1$, <u>uno solo</u> degli $a_2 . b_2 \ldots d_2$, ecc., ed allora noi troveremo subito quale sia il numero N.

Il ragionamento che ora faremo non suppone punto che si siano già trovate proprietà della funzione N sicché i ragionamenti che precedono sono, benché utili, non necessarii alla dimostrazione del nostro teorema. Supponiamo di considerare non uno solo, ma t sistemi di equazioni simultanee, tutti composti delle stesse equazioni già considerate, all'infuori della prima, la quale varii dall'uno all'altro sistema, pur rimanendo affatto generale e dei gradi $a_1 . b_1 \ldots d_1$ nei sistemi di variabili $x . y \ldots u$. Il numero delle soluzioni di ciascun sistema sarà lo stesso cioè N. Tutte le soluzioni dei t sistemi è chiaro poi che si otterranno ove, lasciando immutate le ultime $n-1$ equazioni date si sostituisca alla prima l'equazione ottenuta moltiplicando le t prime equazioni dei vari sistemi, equazione i cui gradi saranno evidentemente $ta_1 . tb_1 \ldots td_1$. Dunque N è tale funzione di $a_1 . b_1 \ldots d_1$ che moltiplicandovi queste, ciascuna per t si viene a moltiplicare N per t. Dunque N è funzione omogenea lineare di quelle quantità $a_1 . b_1 \ldots$ (e analogamente di $a_2 . b_2 \ldots d_2$, ... $a_n . b_n \ldots d_n$) come si voleva dimostrare.

Ciò posto se noi vogliamo quella parte di N che contiene una data delle $a . b \ldots d$, per esempio a_1 potremo scrivere:

$$N = a_1 A_1 + N'$$

essendo N' indipendente da a_1, ma funzione lineare omogenea di $b_1 . c_1 \dots d_1$, ed essendo A_1 indipendente da $a_1 . b_1 . c_1 \dots d_1$. Noi non muteremo dunque A_1 se faremo $b_1 = c_1 = \dots = d_1 = 0$, ed $a_1 = 1$, sicché diventerà N uguale ad A_1 in virtù di quell' uguaglianza. Ma in tal caso la prima equazione è lineare nelle x, e non contiene le altre variabili, e quindi per mezzo di essa si può eliminare dalle ultime $n-1$ equazioni, rimaste immutate, una qualunque delle variabili x, senza punto alterarne i gradi: il numero N in tale caso è il numero delle soluzioni del sistema di $n-1$ equazioni così ottenuto. Benchè diamo adunque che nell' espressione generale di N il coefficiente A_1 di a_1 è il numero delle soluzioni che avrebbero comuni le ultime $n-1$ equazioni, ove senza mutarne i gradi si supponesse che le variabili x invece di essere in numero di α fossero in numero di $\alpha - 1$.

Analogamente dunque se in A_1 vogliamo il coefficiente di a_2, cioè se in N vogliamo il coefficiente di $a_1 a_2$, esso esprimerà il numero delle soluzioni comuni alle ultime $n-2$ equazioni ove in queste le variabili x si supponessero solo in numero di $\alpha - 2$. E così via dicendo. E infine si vorrà in N il coefficiente di $a_1 a_2 \dots a_\alpha$ esso esprimerà il numero delle soluzioni comuni alle ultime $n-\alpha$ equazioni, supposte che queste non contengano le x. In questo numero si troverà nello stesso modo il coefficiente di $b_{\alpha+1} b_{\alpha+2} \dots b_{\alpha+\beta}$, e così via, finchè volendo avere in N il coefficiente di $a_1 a_2 \dots a_\alpha b_{\alpha+1} b_{\alpha+2} \dots b_{\alpha+\beta} c_{\alpha+\beta+1} \dots c_{\alpha+\beta+\gamma} \dots$

si sarà ridotto a trovare il numero di soluzioni delle ultime δ equazioni, supposte contenere soltanto le δ variabili u. Ora questo numero sarà pel teorema di Bézout (che qui si può perfettamente applicare poiché le equazioni si suppongono affatto generali) il prodotto dei gradi di quelle equazioni nelle u, cioè $d_{n-\delta+1}\, d_{n-\delta+2} \cdots d_n$.

Ora si noti che nel sistema dato d'equazioni queste si possono scambiare tra loro di posto, e che in esse si può anche scambiare l'ordine secondo cui si considerano i sistemi di variabili $x, y \ldots u$. Ne risulterà immediatamente che il numero cercato N è la somma di termini della forma $a_{\alpha'} a_{\alpha''} \cdots b_{\beta'} b_{\beta''} \cdots\cdots d_{\delta'} d_{\delta''} \cdots$ essendo $\alpha' \alpha'' \ldots$ una combinazione α upla dei numeri $1, 2 \ldots n$, e poi $\beta' \beta'' \ldots$ una combinazione β upla dei rimanenti $n-\alpha$ numeri, ... e finalmente $\delta' \delta'' \ldots$ i δ numeri rimanenti. Così è dimostrato il nostro teorema.

Corollario 1°

Supponiamo $\alpha = \beta = \cdots = \delta = 1$, cioè che i gruppi considerati di variabili si compongano ciascuno di una sola variabile ed indichiamo queste con $x, y, z \ldots u$. Il teorema ci darà in questo caso che se si hanno n equazioni tra n incognite $x, y \ldots u$

$$f_1(x^{a_1}, y^{b_1}, \ldots u^{d_1}) = 0$$
$$f_2(x^{a_2}, y^{b_2}, \ldots u^{d_2}) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x^{a_n}, y^{b_n} \ldots\ldots u^{d_n}) = 0$$

dei gradi indicati rispetto a ciascuna di esse, il numero delle soluzioni di questo sistema

sarà $\Sigma a_\alpha b_\beta \dots d_\delta$ dove $\alpha\beta\dots\delta$ è una qualunque delle permutazioni dei numeri $1, 2, \dots n$.

Corollario 2°

Supponiamo ora soltanto $\beta = \gamma = \dots = \delta = 1$ cioè che i sistemi di variabili $y, z, \dots u$ si compongano ciascuno di una sola variabile, che indicheremo rispettivamente $\lambda, \mu \dots \nu$. Il teorema ci dice che se si hanno n equazioni tra α variabili x ed $n-\alpha$ parametri $\lambda, \mu \dots \nu$:

$$
\begin{aligned}
&f_1(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{a_1};\ \overset{l_1}{\lambda}, \overset{m_1}{\mu}, \dots \overset{n_1}{\nu}) = 0\\
&f_2(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{a_2};\ \overset{l_2}{\lambda}, \overset{m_2}{\mu}, \dots \overset{n_2}{\nu}) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_n(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{a_n};\ \overset{l_n}{\lambda}, \overset{m_n}{\mu}, \dots \overset{n_n}{\nu}) = 0
\end{aligned}
$$

il numero delle soluzioni comuni a questo sistema d'equazioni è $\Sigma a_{\alpha'} a_{\alpha''} \dots l_p m_q \dots n_r$ essendo $\alpha'\alpha'' \dots$ una combinazione qualunque α upla di $1, 2 \dots n$ ed essendo $pq \dots r$ una permutazione qualunque degli $n-\alpha$ numeri rimanenti.

Corollario 3°

Consideriamo un sistema qualunque di n equazioni dei gradi $m_1, m_2 \dots m_n$ in un gruppo di variabili x e lineari (non omogenee) in un gruppo di l parametri $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_l$, cioè:

$$
\begin{aligned}
&f_1(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{m_1};\ \overbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_l}^{1}) = 0\\
&f_2(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{m_2};\ \overbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_l}^{1}) = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_n(\overbrace{x_1 \cdot x_2 \dots}^{m_n};\ \overbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_l}^{1}) = 0
\end{aligned}
$$

Il numero delle variabili x non importa determinarlo. Qualunque esso sia noi

diciamo <u>ordine</u> di quel sistema d'equazioni il numero di soluzioni che esso ha comune con un numero ~~determinato~~ di equazioni lineari nelle x sufficiente per render determinato il sistema. Se dalle equazioni date si eliminano per mezzo di queste aggiunte tante variabili x quante è possibile, si vede che l'ordine del sistema dato è uguale al numero delle soluzioni che esso dà ove le x siano in numero di $n-l$. Ora questo numero di soluzioni si può avere applicando il nostro teorema (e non lo si avrebbe applicando il corollario 2° ponendovi tutte le $l_i, m_i \dots n_i$ uguali ad 1, giacché le equazioni considerate non devono solo essere lineari rispetto a ciascuna delle λ ma anche rispetto al loro gruppo). Esso ci darà immediatamente

$$\sum m_a m_b \dots m_c$$

essendo $a\,b \dots c$ una combinazione d'ordine $n-l$ degli n numeri $1.2 \dots n$. Questo numero è adunque l'<u>ordine</u> del sistema considerato d'equazioni.

Questo risultato si può esprimere geometricamente, come del resto tutti quelli che precedono. Le x si possono riguardare come coordinate di un <u>ente</u> geometrico, sicché un'equazione tra esse rappresenta un <u>complesso</u> più volte infinito di tali enti(*) (se le x sono m, cioè se si considera uno spazio ad m dimensioni, il <u>complesso</u> conterrà un numero $m-1$ volte infinito di tali enti). Una tale equazione la quale contenga inoltre l parametri arbitrari $\lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_l$ linearmente rappresenterà un <u>gruppo</u> <u>l uplo</u> (l volte infinito) <u>lineare</u> di tali complessi. Le n date equazioni rappresentano adunque n gruppi l upli lineari e <u>proiettivi</u> (poiché contengono gli stessi parametri λ)

(*) complesso che dicesi <u>d'ordine a</u> se l'equazione è d'ordine a

di complessi. Ove il numero m delle variabili x non sia inferiore ad $n-l$ vi saranno degli enti le cui coordinate x soddisferanno a quelle date equazioni, cioè degli enti che staranno contemporaneamente su n complessi corrispondenti degli n gruppi lineari projettivi dati. Tutti questi enti possono costituire un sistema finito, ma anche un insieme continuo più volte infinito (sarà $m+l-n$ volte infinito). Comunque sia dicasi <u>ordine</u> di quell'insieme, quello che noi già definimmo come <u>ordine</u> del sistema dato d'equazioni. Potremo dunque interpretare geometricamente quanto trovammo nel modo seguente:

L'insieme di enti geometrici generato da n gruppi l upli projettivi di complessi di tali enti è dell'ordine:

$$\sum m_a m_b \dots m_c$$

indicando con $m_1, m_2 \dots m_n$ gli ordini di quei gruppi di complessi rispettivamente, e con $a.b\dots c$ una qualunque combinazione d'ordine $n-l$ degli n numeri $1.2\dots n$.

Teorema

Quando è dato un sistema (affatto generale) di n equazioni nelle n incognite $x, y, z \ldots u$, rispettivamente dei gradi $a_1, a_2 \ldots a_n$ in x, $b_1, b_2 \ldots b_n$ in y, $c_1, c_2 \ldots c_n$ in z, ..., $g_1, g_2 \ldots g_n$ in u, le quali siano:

$$\begin{cases} (1) & f_1(x^{a_1}, y^{b_1}, z^{c_1} \ldots u^{g_1}) = 0 \\ (2) & f_2(x^{a_2}, y^{b_2}, z^{c_2} \ldots u^{g_2}) = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1) & f_{n-1}(x^{a_{n-1}}, y^{b_{n-1}}, z^{c_{n-1}} \ldots u^{g_{n-1}}) = 0 \\ (n) & f_n(x^{a_n}, y^{b_n}, z^{c_n} \ldots u^{g_n}) = 0 \end{cases}$$

il numero delle soluzioni comuni a tutte sarà: $\sum a_\alpha b_\beta c_\gamma \ldots g_\chi$ essendo $\alpha\, \beta\, \gamma \ldots \chi$ una qualunque delle $n!$ permutazioni degli indici $1, 2, 3 \ldots n$.

Notiamo anzitutto che il teorema è vero per $n = 1$, ed anche (come risulta immediatamente dalla teoria dell'eliminazione) per $n = 2$. Potremo dunque supporlo vero pel caso di $n-1$ equazioni ad $n-1$ incognite e dimostrare che in tale ipotesi esso è vero pel sistema dato. Del resto come si vedrà, per la nostra dimostrazione non è indispensabile tale ipotesi.

Indichiamo con N il numero cercato. Imaginiamo poi una punteggiata (od una curva razionale qualunque) i cui punti abbiano x per coordinata. Se nelle prime $n-1$ equazioni date noi diamo ad x un valore qualunque (lo stesso però in tutte), che sia x'' avremo $n-1$ equazioni ad

$n-1$ incognite $y, z \ldots u$ e di gradi $b_1 \ldots b_{n-1}$, $c_1 \ldots c_{n-1}$, ... in questo. Il numero di soluzioni comuni a questo sistema[1] l'indicheremo con $N^{(a)}_{n-1}$. Se ognuno di questi $N^{(a)}_{n-1}$ sistemi di valori si sostituisce nell'equazione (n), questa diverrà un'equazione di grado a_n nella sola x e quindi ci darà a_n valori x' di questa. In tal modo si ottengono $a_n N^{(a)}_{n-1}$ valori di x' corrispondenti al valore arbitrariamente scelto di x'', ed è chiaro che se uno di quei valori di x' coincidesse con x'' si darebbe un valore di x appartenente ad una soluzione del sistema dato. Se invece nell'equazione (n) fissiamo un valore x' per x avremo un'equazione

$$(n), \qquad f_n(x', y^{b_n}, z^{c_n} \ldots u^{g_n}) = 0$$

che unita alle prime $n-1$ dato determina un certo numero A di sistemi di valori x'' per x (e di valori per $y, z \ldots$). Applicando dunque il principio di corrispondenza della punteggiata di punti x il numero di volte che x' ed x'' coincidono, cioè il numero di soluzioni cercato sarà:

$$(x) \qquad N = a_n N^{(a)}_{n-1} + A$$

Ripetiamo che ~~Lasciamo~~ A è il numero delle soluzioni in $x, y \ldots u$ delle equazioni $(1), (2) \ldots (n-1), (n)$, ~~(**) Di questo fine supponiamo che nelle prime n-1 si dia ad y un valore particolare~~, equazioni i cui gradi nelle diverse variabili sono ancora gli stessi (e la generalità è ancora la stessa) che nel-

---

(1) il quale, giova notarlo, è affatto generale, come è il sistema dato. ~~(**) Questo sistema di n equazioni non ha più la generalità del dato, poiché ne~~

~~la~~ sistema dato; soltanto a_n è nel nuovo sistema uguale a zero. Dunque A è indipendente da a_n, benché d'altra parte dipenda da b_n, c_n, ... Invece $N^{(a)}_{n-1}$, numero delle soluzioni comuni alle $n-1$ equazioni (1) ... $(n-1)$ in cui ad x si supponga dato un valore qualunque, non dipende da alcuno dei numeri a_n, b_n, c_n .... Da queste osservazioni segue immediatamente (se si nota che a formare il numero N devono concorrere le lettere $a, b, c \ldots g$ nello stesso modo) che:

$$(x)' \qquad N = a_n N^{(a)}_{n-1} + b_n N^{(b)}_{n-1} + \ldots + g_n N^{(g)}_{n-1}$$

dove le $N^{(a)}_{n-1}$, $N^{(b)}_{n-1}$ ... $N^{(g)}_{n-1}$ non contengono più alcuna delle quantità $a_n, b_n \ldots g_n$. In realtà dal ragionamento fatto risulta solo che N vale il 2° membro aumentato di una quantità indipendente da $a_n, b_n \ldots g_n$; ma che questa sia nulla risulta immediatamente notando che per $b_n = c_n = \ldots = g_n = 0$ deve essere $N = a_n N^{(a)}_{n-1}$, il che si vede immediatamente.

La formula $(x)'$ si poteva anche dedurre dalla (x) cercando A collo stesso ragionamento prima usato per N cioè facendo anzitutto y uguale ad una quantità qualunque y'' nelle prime $n-1$ equazioni che quindi daranno $N^{(b)}_{n-1}$ ~~sistemi~~ soluzioni in (x ed in) $z, \ldots u$, le quali sostituite in $(n)_1$ danno ciascuna b_n valori y' corrispondenti di y, cosicché si hanno in tutto $b_n N^{(b)}_{n-1}$ valori di y' corrispondenti a quello prescelto di y''; mentre d'altra parte se nella (n_1) si dà ~~dell'incognita che x non è contenuta in essa~~

ad y il valore particolare y', si avrà un'equazione:

$$(n)_2 \qquad f_n(x'.\, y',\, z^{c_n}, \ldots u^{g_n}) = 0$$

che unita alle prime $n-1$ date costituisce un sistema di n equazioni nelle n incognite $x.\, y.\, z \ldots u$ avente quindi un certo numero B di soluzioni, sicché ad un valore di y' ne corrisponderanno B di y''. Quindi sarà:

$$A = b_n N_{n-1}^{(b)} + B$$

e poi si cercherebbe B nello stesso modo. Così continuando si finirebbe per aver da considerare le soluzioni comuni alle prime $n-1$ equazioni date ed alla

$$f_n(x'.\, y',\, z' \ldots t',\, u^{g_n}) = 0$$

Ora questa avrebbe solo più un'incognita u, rispetto a cui ~~sarà~~ darebbe ~~[illegible]~~ g_n valori per u da sostituirsi ~~nelle~~ nelle prime $n-1$ equazioni date. Il numero di soluzioni sarebbe:

$$G = g_n N_{n-1}^{(g)}$$

In tal modo si otterrebbe pure l'equazione $(x)'$.

Ora da questa scaturisce immediatamente il teorema. Se lo si suppone vero per $n-1$, ~~[illegible]~~ equazioni ad $n-1$ incognite, i numeri N_{n-1} saranno tutti noti ed il teorema sarà dimostrato. Se non si fa tale ipotesi basterà ~~applicare~~ un breve ragionamento sulla formula $(x)'$ applicata nello stesso tempo a trovare i numeri N_{n-1} per mezzo degli N_{n-2} e questi per mezzo degli N_{n-3} ecc. ecc.

Sui sistemi di equazioni.

Abbiansi un sistema di n equazioni le quali siano rispettivamente dei gradi $m_1, m_2, \dots m_n$ in un certo sistema di k variabili $x, y, \dots z$ considerato complessivamente e siano poi di diversi gradi rispetto ad ognuno di l diversi parametri $\alpha, \beta, \dots \gamma$ che vi entrano pure, come appare dal quadro seguente:

$$f_1(\overbrace{x, y \dots z}^{m_1} \; ; \; \overset{a_1}{\alpha}, \overset{b_1}{\beta}, \dots \overset{c_1}{\gamma}) = 0$$
$$f_2(\overbrace{x, y \dots z}^{m_2} \; ; \; \overset{a_2}{\alpha}, \overset{b_2}{\beta}, \dots \overset{c_2}{\gamma}) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(\overbrace{x, y \dots z}^{m_n} \; ; \; \overset{a_n}{\alpha}, \overset{b_n}{\beta}, \dots \overset{c_n}{\gamma}) = 0$$

Volendo considerare le soluzioni comuni a queste equazioni, le quali si suppongono le più generali possibili della loro specie, bisogna supporre $n \leqq k+l$. Se le $x, y \dots z$ sono coordinate (non omogenee) di un ente geometrico, ognuna di quelle equazioni rappresenta una serie l volte infinita di complessi di tali enti (complessi k volte infiniti), rispettivamente dei gradi $m_1, m_2 \dots m_n$. I complessi corrispondenti agli stessi sistemi di valori dei parametri nelle n serie possono aver comuni alcuni di quegli enti. Se $n = k + l$ il numero di tali enti così ottenuti è finito ed equivale al numero di soluzioni comuni a quelle n equazioni, che sono in tal caso ad n incognite. Ove invece sia $n < k + l$ il numero degli enti ottenuti è infinito ($k + l - n$ volte) ed essi costituiranno un certo complesso di tali enti,

complesso che si potrà intendere rappresentato dalle equazioni date da cui si suppongano eliminati gli l parametri $\alpha . \beta \ldots \gamma$. Un complesso a volte infinito di enti geometrici $(x . y \ldots z)$ suolsi in geometria chiamare del grado g quando siano g quelli tra i suoi enti i quali soddisfano pure ad a equazioni lineari generali tra le coordinate $x . y \ldots z$. — Perciò noi chiameremo **grado** del sistema dato di equazioni lineari il numero delle soluzioni comuni a quel sistema ed a $k + l - n$ equazioni generali lineari nelle $x . y \ldots z$ (naturalmente non contenenti le altre incognite $\alpha . \beta \ldots \gamma$). Ed è precisamente questo grado che noi ci proponiamo di trovare.

A questo fine notiamo anzitutto che dalle $k + l - n$ equazioni aggiunte lineari nelle k incognite $x . y \ldots z$ noi possiamo esprimere $k + l - n$ di queste in funzione lineare intere delle rimanenti $n - l$ [1]. Se allora noi sostituiamo tali espressioni nelle equazioni date, in queste le variabili $x . y \ldots z$ saranno solo più $n - l$. Concludiamo adunque che il grado del ~~complesso~~ sistema dato non dipende da k, potendosi supporre che il numero k delle variabili $x . y \ldots z$ sia uguale ad $n - l$. Laonde noi d'ora innanzi supporremo appunto

$$k = n - l \quad \text{ossia} \quad k + l = n$$

(1) Con ciò supponiamo $n \geqq l$, cioè che il numero delle equazioni date non sia inferiore al numero dei parametri $\alpha . \beta \ldots \gamma$ che vi entrano. Ora quest'ipotesi è appunto indispensabile perchè da quelle equazioni questi si possano tutti eliminare, cioè perchè si ottenga, geometricamente parlando, un complesso di enti geometrici indipendente da quei parametri.

Così siamo ridotti a cercare il numero di soluzioni comuni delle n equazioni date ad altrettante incognite, ma contenenti k di queste, cioè $x . y \ldots z$, in un modo e le altre l, cioè $\alpha . \beta \ldots \gamma$ in altro modo. Orbene indichiamo con N_n il numero cercato, e ad esempio con $N_{n-1}^{(\alpha)}$ il numero analogo ma pel sistema delle sole prime $n-1$ equazioni in cui α si supponga una costante data, e analogamente con $N_{n-2}^{(\alpha . \beta)}$ il numero analogo pel sistema delle prime $n-2$ equazioni in cui ad $\alpha . \beta$ si suppongano dati valori fissi, e così via ~~cioè il numero~~ Diamo ad α un valore qualunque nelle prime $n-1$ equazioni date: esse daranno allora $N_{n-1}^{(\alpha)}$ soluzioni, cioè sistemi di valori per $x . y \ldots z$; $\beta \ldots \gamma$ e ciascuno di questi sostituito nella equazione n esima di grado a_n in α ci darà a_n valori di questo: in tutto si otterranno così $a_n N_{n-1}^{(\alpha)}$ valori per α. Se invece nell'ultima equazione diamo un valore determinato ad α, le n equazioni date così modificate (solo nell'ultima) avranno comuni un certo numero A di soluzioni (e quindi di valori di α soddisfacenti alle prime $n-1$) essendo A indipendente da a_n. Avremo dunque

$$N = a_n N_{n-1}^{(\alpha)} + A$$

Ora $N_{n-1}^{(\alpha)}$ è indipendente da tutti i numeri a ed anche da $m_n . a_n . b_n \ldots c_n$. Nell'espressione di N sarà $a_n N_{n-1}^{(\alpha)}$ la sola parte in cui entri a_n, ed in essa a_n entra linearmente e non entrano né altre a, né altre quantità aventi l'indice n. Parimenti in $N_{n-1}^{(\alpha)}$ la sola parte contenente b_{n-1} è $N_{n-1}^{(\alpha . \beta)}$, e così

via. ~~Dunq~~ In conclusione nell'espressione di N è contenuto il termine in $a_n b_{n-1} \dots c_{k+1}$ col coefficiente $N_k^{(\alpha.\beta\dots\gamma)}$, che esprime il numero di soluzioni delle prime k equazioni in cui le $\alpha.\beta\dots\gamma$ si suppongano date. Ora queste equazioni in tal caso sono dei gradi $m_1 . m_2 \dots m_k$ nelle k incognite $x.y\dots z$ e sono affatto generali in questa specie. Dunque, applicando il teorema di Bézout sarà $N_k^{(\alpha.\beta\dots\gamma)} = m_1 m_2 \dots m_k$. Quindi nell'espressione di N il coefficiente di $a_n b_{n-1} \dots c_{k+1}$ è $m_1 m_2 \dots m_k$. Si noti ora che nel ragionamento fatto gli indici $n . n-1, \dots k+1$ costituiscono una qualunque delle disposizioni ~~di~~ $\underline{l}$ uple di $1.2\dots n$, giacché le equazioni date si possono disporre comunque, come pure si possono ordinare comunque i parametri $\alpha.\beta\dots\gamma$. Quindi possiamo conchiudere (1):

$$N = \sum m_e m_f \dots m_g . a_p b_q \dots c_s$$

dove: o $p.q\dots s$ è una <u>disposizione</u> qualunque di $1.2\dots n$ ~~ad~~ ad l ad l, ed $e.f\dots g$ sono i k rimanenti di quegli n numeri (non più permutati questi rimanenti), ovvero anche si può dire che $e f \dots g$ è una <u>combinazione</u> qualunque k uple degli stessi primi n numeri, e $p.q\dots s$ è una permutazione qualunque degli l numeri rimanenti. (sicché il numero dei termini di quella somma è $\frac{n!}{k!}$)

(1) Dai ragionamenti fatti appare solo che N vale il 2° membro di quest' uguaglianza aumentato ~~solo~~ di una quantità dipendente solo dalle m. Ma ~~questo~~ si osservi che N deve annullarsi quando tutte le ~~a~~ a, oppure tutte le b, o, ecc. sono nulle (avendosi allora n equazioni ad $n-1$ incognite) e quindi si conchiude che N deve contenere in ogni suo termine una delle a, una delle b, o ... una delle c.

Teorema

Abbiasi un sistema determinato di n equazioni tra più gruppi di variabili, $x_1 . x_2 \ldots ; y_1 . y_2 \ldots ; z_1 . z_2 \ldots ; \ldots$ in numero rispettivamente di $\alpha . \beta . \gamma \ldots$ e siano rispettivamente $a_1 . a_2 \ldots a_n ; b_1 . b_2 \ldots b_n ; c_1 . c_2 \ldots c_n ; \ldots$ i gradi di quelle equazioni rispetto alle α variabili x, alle β variabili y, ..., come segue:

$$f_1(\overbrace{x_1 . x_2 \ldots}^{a_1} ; \overbrace{y_1 . y_2 \ldots}^{b_1} ; \ldots) = 0$$
$$f_2(\overbrace{x_1 . x_2 \ldots}^{a_2} ; \overbrace{y_1 . y_2 \ldots}^{b_2} ; \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(\overbrace{x_1 . x_2 \ldots}^{a_n} ; \overbrace{y_1 . y_2 \ldots}^{b_n} ; \ldots) = 0$$

(si suppone $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$). Il numero delle soluzioni comuni a quel sistema d'equazioni sarà: $N = \Sigma a_{\alpha'} a_{\alpha''} \ldots b_{\beta'} b_{\beta''} \ldots c_{\gamma'} c_{\gamma''} \ldots\ldots$ indicando con $\alpha' \alpha'' \ldots, \beta' \beta'' \ldots, \gamma' \gamma'' \ldots, \ldots\ldots$ delle combinazioni risp. degli ordini $\alpha . \beta . \gamma \ldots$ degli n primi numeri $1 . 2 \ldots n$, essendo però queste combinazioni prese in modo che non abbiano alcun elemento comune (sicché il numero dei termini contenuti in N viene ad essere $\frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \ldots}$).

Dimostrazione

Il numero N cercato è una funzione dei numeri $a . b . c \ldots$ e poniamo

$$N = \varphi(a_1 . b_1 \ldots ; a_2 . b_2 \ldots ; \ldots ; a_n . b_n \ldots)$$

Noteremo anzitutto che questa funzione non può essere che intera; ed invero se fosse fratta essa diventerebbe infinita quando uno dei gradi delle date equazioni

si annullasse: ora è chiaro che in tal caso il numero delle soluzioni del sistema dato potrà diminuire [1] ma non già diventare infinito. Ciò posto la funzione φ, (la quale a cagione del suo significato non può essere irazionale) sarà un polinomio funzione delle $a, b, \ldots$.

Se nelle equazioni date supponiamo che i gradi a cui vi entra uno stesso gruppo di variabili si annullino tutti, p. e se si suppongono tutte le a uguali a 0, il sistema dato di equazioni non conterrà più il gruppo corrispondente x di variabili e quindi il numero delle equazioni supererà il numero delle variabili realmente contenute, sicché il numero delle soluzioni comuni sarà 0. Dunque:

$$\varphi(0, b_1 \ldots ; 0, b_2, \ldots ; \ldots ; 0, b_n \ldots) = 0$$

Se invece supponiamo che tutti i gradi di una stessa equazione, p. e i gradi $a_1, b_1, c_1, \ldots$ della prima siano nulli, quell'equazione prenderà la forma di una costante uguagliata a 0, equazione impossibile per valori finiti delle variabili; dunque il numero N deve anche in tal caso ridursi a 0, cioè:

$$\varphi(0, 0, \ldots ; a_2, b_2 \ldots ; \ldots ; a_n, b_n \ldots) = 0$$

Da queste due osservazioni segue immediatamente che il polinomio φ ossia N contiene in ciascuno dei suoi termini una almeno delle a e per analogia una almeno delle b, una delle $c, \ldots$, ed in ciascuno dei suoi termini contiene

(1) Bisogna avvertire che non consideriamo le soluzioni infinite, altrimenti il numero delle soluzioni del dato sistema si potrebbe far dipendere come caso particolare dal teorema in cui nelle equazioni si considerano le variabili separatamente, non a gruppi.

Alla prima equ. sostituendone la sua potenza t^{esima} si dovrà avere $\varphi(ta_1, tb_1, \ldots) = t\varphi(a_1, b_1, \ldots)$
Dunque φ è omogenea di 1° grado nelle $a_1, b_1, \ldots$ una delle $a_1, b_1, \ldots$ p una delle $a_2, b_2, \ldots$, ..., ossia contiene uno dei gradi di ciascuna equazione. Noi vedremo ora che di questi gradi di una delle equazioni ciascun termine non ne contiene che uno, ed alla prima potenza.

A tal fine mi gioverà considerare dinche l'ultimo dei sistemi di variabili $x, y, z \ldots$ e sia $u_1, u_2, \ldots$ e diciamo poi $e_1, e_2 \ldots e_n$ i gradi a cui esse entra nelle successive equazioni. Ciò posto il numero N si compone di 2 parti, l'una dipendente da a_n e l'altra indipendente da a_n. È chiaro che quest'ultima parte si avrà dalla funzione φ ponendovi $a_n = 0$, sicché sarà:

$$\varphi(a_1, b_1 \ldots; a_2, b_2 \ldots; \ldots; a_n, b_n \ldots) = a_n\psi + \varphi(a_1, b_1 \ldots; a_2, b_2 \ldots; \ldots; 0, b_n, c_n \ldots)$$

dove con ψ indichiamo per brevità una funzione delle $a, b \ldots$[1] Ponendo per brevità $\varphi(a_1, b_1 \ldots; a_2, b_2 \ldots; \ldots; 0, b_n \ldots) = N'$ quantità indipendente da a_n avremo dunque:

$$N = a_n\psi + N'$$

Basterebbe a determinare che cosa sia ψ. A tal fine ~~[illegible]~~ faremo uso del principio di corrispondenza. Nelle prime $n-1$ equazioni diamo ad x_1 un valore arbitrario e risolviamo quelle equazioni: ne ricaveremo $N_{\alpha-1}$ valori per $x_2, x_3 \ldots; y, z$, essendo $N_{\alpha-1}$ il numero che si ottiene da N supponendo di avere solo le prime $n-1$ equazioni e che le x siano $\alpha-1$ invece che α. Sostituiamo ciascuno dei sistemi così ottenuti per le $y, z, \ldots$ nell'ultima equazione: in questa rimarranno dunque per sole incognite le x rispetto a cui essa è del grado a_n sicché unendola alle prime $n-1$ equazioni tra le $x, y, z \ldots$ si avranno $a_n N_{\alpha-1}$ soluzioni

per ciascuna delle $N_{\alpha-1}$ che prima si sostituirono nell'ultima equazione: in tutto adunque si hanno $N_{\alpha-1} \cdot a_n N_{\alpha-1}$ valori di x_1 che corrispondono in certo modo a quello da cui si è partito e che se coincidessero con questo darebbero una soluzione del sistema dato di equazioni. Partiamo invece da uno degli ultimi valori di x_1: sostituiamolo nelle prime $n-1$ equazioni e ne avremo $N_{\alpha-1}$ sistemi di valori per le x (e per le $y, z \ldots$) i quali sostituiti successivamente nell'ultima equazione, questa avrà solo più per incognite le $y, z \ldots$ ed unita alle prime $n-1$ tra le $x, y, z \ldots$ ci darà N' soluzioni per ciascuna di quelle sostituite (dal significato dato sopra al numero N'), sicché a quel valore di x_1 ne corrispondono $N_{\alpha-1} \cdot N'$ dei primi. Si ha così una corrispondenza $(N_{\alpha-1}; a_n N_{\alpha-1}; N_{\alpha-1} \cdot N')$, sicché il numero di valori coincidenti per x_1 sarà:

$$N_{\alpha-1}(a_n N_{\alpha-1} + N')$$

Questo dunque parrebbe essere il numero N delle soluzioni del sistema dato. Ma confrontando quest'espressione con quella $a_n \psi + N'$ prima trovata si vede che mentre in questa la parte indipendente da a_n è N', in quella essa è $N_{\alpha-1} \cdot N'$. Ciò vuol dire che quei valori di x_1 trovati col principio di corrispondenza coincidono ad $N_{\alpha-1}$ ad $N_{\alpha-1}$, e quindi che i valori distinti, cioè le soluzioni distinte del sistema dato sono:

$$N = a_n N_{\alpha-1} + N'$$

sicché la quantità che cercavamo, ψ, non è altro che $N_{\alpha-1}$.

Estensione del principio di corrispondenza a qualsiasi forma di 1ª specie.

Abbiansi $n-1$ equazioni tra n variabili $x . y, \ldots$:

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x . y \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(x . y, \ldots) = 0 \end{cases}$$

Sappiamo che ad un dato sistema di valori di $x . y \ldots$ che le soddisfano corrispondano α sistemi di $\xi . \eta \ldots$ che pure le soddisfano, cioè tali che:

$$(2) \quad \begin{cases} f_1(\xi . \eta \ldots) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(\xi . \eta \ldots) = 0 \end{cases}$$

e che viceversa ad un sistema di valori per $\xi . \eta \ldots$ soddisfacienti alle (2) corrispondano a sistemi di valori per $x . y \ldots$ soddisfacienti alle (1). Dico che il numero di sistemi coincidenti coi corrispondenti, cioè tali che soddisfacendo alle (1) o (2) sia $x = \xi . y = \eta, \ldots$, è uguale ad $a + \alpha$ in generale.

Infatti le $x . y \ldots$, e le $\xi . \eta \ldots$ saranno legate da un'equazione algebrica (3), che supporremo essere quella generale di grado b nelle prime e di grado β nelle seconde. Diciamo M l'ordine del sistema dato di equazioni, (1) oppure (2) (cioè il prodotto dei gradi di ciascuna di quelle equazioni). Date le $x . y \ldots$ l'equazione (3) unita alle (2) darà in generale $M\beta$ sistemi di valori per le $\xi . \eta \ldots$; quindi per le nostre ipotesi sarà:

$$M\beta = \alpha \quad , \text{ e analogamente } \quad Mb = a$$

Poniamo ora nella (3): $\xi = x$, $\eta = y$, ... avremo un' equazione di grado $b + \beta$ nelle $x, y, \ldots$ la quale unita alle (1) darà adunque $M(b+\beta)$ sistemi di valori per $x, y \ldots$ coincidenti coi corrispondenti $\xi, \eta \ldots$ Ora per quanto dicemmo or ora si ha: $M(b+\beta) = a + \alpha$. Dunque il teorema è dimostrato.

La stessa dimostrazione si applica perfettamente al caso in cui non si avessero $n-1$ equazioni tra le sole $x, y \ldots$, ma un numero qualunque n' di equazioni tra le n variabili $x, y \ldots$, ed altre $n' - n + 1$ variabili ovvero parametri che vi entrassero in modo qualunque, purchè algebricamente.

Teorema

Indichino in genere le $A_m^{(r)}$ delle funzioni di grado n_m di un certo numero di variabili. Allora le equazioni simbolizzate con:

$$\begin{Vmatrix} A_1' & A_2' & \cdot & A_s' \\ A_1'' & A_2'' & \cdot & A_s'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(k)} & A_2^{(k)} & \cdot & A_s^{(k)} \end{Vmatrix} = 0$$

dove $k < s$, costituiranno un sistema il cui grado è la somma dei prodotti dei numeri $n_1, n_2, \dots n_s$ <u>combinati</u> tra loro (senza ripetizione) per $s-k+1$.