

Bernardo Segre

1880 - Considerazioni sulle rivoluzioni finirese

Sui concetti nuovi della Geometria moderna

(Estate 1880)

SI 22

Rifugione

Sul principio di continuità.

Primo d'intero o principio questo importantissimo principio

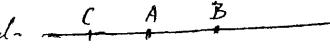
positivo e negativo, l'infinito e l'
immaginario.

S.1 - Una delle idee, che fecerono vantaggi immensi alla geometria pura (?) fu quella d'introdurvi la distinzione tra le grandezze positive e le negative, distinzione che già dai secoli era stata introdotta nell'Algebra, probabilmente prima ancora di Viète (1540 - 1603), o che fu avuta valde tutto a generalizzare i risultati e ad affilare scemane le lunghezze del calcolo. In Geometria si cominciava ancora quel concetto i matematici si trovavano in trappisti dovendo agire solo
che in ~~tutte~~ ^{per ogni} particolare ~~posizione~~ degli elementi della figura immutare una nuova dimostrazione delle relazioni metriche in cui ^{questo} si trovavano. Le
quei punti in questo risulta nella prima metà del nostro secolo l'idea di
L'Hospital già nel principio del secolo XVII però si era introdotto l'uso dei
numeri negativi, che furono usati, ad esempio, dal Descartes nell' in quel
suo libro sulla geometria, che contiene ~~in questo~~ doveva ~~far vedere~~ un nuovo
potentissimo strumento ai geometri: l'analisi, il metodo delle coordinate

che appunto col raccorci della geometria analitica, ed oggi che quelle cose in diritto che per ando prendendo la Geometria. Il Möbius nel Bas. Calc. in-
derogabile dei segmenti negativi che recò certo vantaggi alla geometria analitica, tranneva l'idea del due segni contrari ai segmenti AB e BA . Nella «analytische
noue» recò molti altri punti di difficoltà rimanerà sempre: quando si faceva «Sphärik» e nella «Kreisverschwindung» poi ~~intendeva~~^{estendeva} il segno contrario agli
per citare un esempio, più punto su una retta soggetto a certe condizioni e' angoli $a b$ e $b a$ e se ne valuta a generalizzare i concetti geometrici, come per
dimostrare relazioni metriche dei segmenti da così determinati, a nulla valer - li delle linee trigonometriche. I geometri adottarono presto queste idee, ed
il concetto del segmento negativo se non si excepta in quel caso applicarlo: quindi oramai si non da tutti in generale quella convinzione sui segni in geo-
li necessita di dimostrare le relazioni per ogni punto diverso ordinamento dei punti. - metrica.

la soluzione, che a noi pare ~~compiacente~~ naturale, perché ci siamo avvezzati. non si tratta. Ancora in sul principio del questo nostro secolo la difficoltà rimaneva e doveva molto ad ostacolare ai pochi geometri che non si occupavano esclusivamente della geometria analitica. ~~Era~~ ^{era} Carnot che studiò la questione nella Géométrie de position (?), ma non giunse a risultati importanti. Il Boulelet, ~~che~~ negli anni 1848, 1849, 1850, 1851, redisse della prigione in Russia, si occupò pure in un suo scritto "sur la loi des signes de position et le principe de continuità" (1), che però non pubblicò che in questa seconda metà del secolo (2). Ma in gran copia di pagine permis egli conclude ben poco riguardo ai segni di posizione: dopo aver tracciato un grande quaderno uno trovò che quella questione non si poteva risolvere, al contrario

(1) V. Poletti, *Applications d'analyse et de géométrie*, II vol. 1864

Essa ci appare ormai semplicissima. Sono sopra una retta segnati più
 punti A, B, C, Quando parleremo di un segmento AB di quella retta, lo
 intendremo sempre misurato dal punto indicato dal  simbolo, cioè dal punto A verso il punto B. Le i segmenti
 della retta misurati in un certo senso convenzionale si considereranno come po-
 sitivi; quelli misurati nel senso opposto si considereranno come negativi.
 No seguiremo immediatamente che i segmenti AB e BA andranno considerati
 come uguali e di segno contrario, onde

$$AB + BA = 0.$$

(1) V. Brault, *Applications d'analyse et de géométrie*, II vol. 188

tutto il sistema di punti in un modo unico, mentre senza quella convenzione si segni potrebbe divenire assai grande il numero delle possibili posizioni reciproche di quei distanze per ogni posizione possibile dei 4 punti, sarebbero 1.2.3.4 cioè punti. Se poi si trattava di dimostrare semplicemente di ricercare le relazioni che passano tra le varie distanze di quei punti, non occorrerà più di stabilire ogni singola cas di posizione reciproca di essi, ma basterà trasformare algebricamente in quelle relazioni altre più semplici che contengono quei segmenti ~~punti~~ di segno qualunque e che si suppongono già provati in generale, e considerando altri punti A_1, A_2, \dots, A_n : ovvero combinando algebricamente più relazioni metriche, che si suppongono già note si potranno dimostrare nuove relazioni che rimarranno generali se eran tutte quelle.

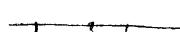
Si parte generalmente (V. Charles. Geom. Sup. page) dalla uguaglianza sicché nel risulta:

$$AB + BC = AC;$$

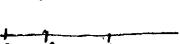
~~questo è evidente se i punti A, B, C sono in ordine successivo;~~



~~per vedere la verità basta considerare le 3 casi, secondo~~



~~che C è da una parte o dall'altra o intimo al segmento AB.~~



~~ma in cui~~ che si osserva cosa vero in qualche

caso. Ma da essa combinata colla prima ipotesi $AB + BA = 0$ si deducono per CD ricordando che:

$$CD = CA + AD = CB + BD$$

tutte le altre relazioni senza bisogno di star a distinguere le varie posizioni:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0 \quad \text{ossia}$$

~~che~~ $AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$

~~di cui potremo esser certi, mentre altrettanto bisognerà dimostrarlo per 1.2.3.4. cioè~~
12 casi.

$$\overline{AB} + \overline{BC} =$$

$$\text{Bosi' della } AA_2 + AA_3 = A_2 A_3 \circ A_3 A_2 = -1, A_3 \text{ si deduce}$$

$$AA_2 + AA_3 + AA_1 = 0$$

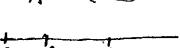
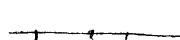
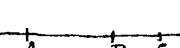
$$AA_1 = A_3 A_4 + A_4 A_1,$$

$$AA_1 = A_4 A_3 + A_3 A_1,$$

.....

XI

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_1 = 0$$



~~per citarne un'altra, se si moltiplicano~~

$$AB + BC + CA = 0$$



$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$$

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$$

Se nello segmento si considerassero i segmenti posti su varie rette, tra' ad eguali, mentre ancora sul principio del secolo si dava una stessa relazione per ciascuna di queste fissare un numero positivo, ed allora applicando -zione metrica per entrambi i teoremi, ~~e poi quando era d'icche'~~ e poi in conseguenza relazioni che si sarebbero avverate per ogni caso, si sarebbe dato di giungere ~~che~~ che $\frac{Ac}{Bc} \frac{Ba}{Ca} \frac{Cb}{Ab} = 1$, si concludeva che o i punti a, b, c erano in linea retta, oppure $Aa \cdot BB$. Le passavano per uno stesso punto.

Per esempio ricordiamo il teorema notissimo di Menelao. Se si ha un triangolo ABC tagliato da una transversale p nei punti a, b, c, si avrà:

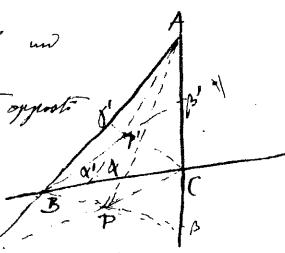
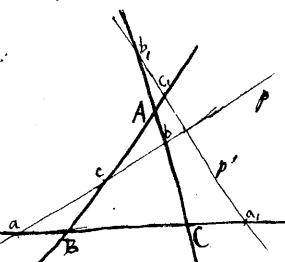
$$\frac{Ac}{Bc} \frac{Ba}{Ca} \frac{Cb}{Ab} = 1$$

e questa relazione è vera anche nel segno, quando sui 3 lati del triangolo si fissino le direzioni positive in modo che si possa percorrere il perimetro del triangolo sempre in direzioni positive. Basta inverd dimostrare l'uguaglianza in valori assoluti, il che si fa con metodi elementarissimi e poi ricorda osservare che una retta non può tagliare di un triangolo che i prolungamenti dei 3 lati, ovvero il prolungamento dell'uno degli altri 2 lati. Allora la relazione si osserva vera anche nel segno. —

Sarimenti facendo le stesse convenzioni, se si ha poi un punto P le cui congiungenti ad $A B C$ tagliano i lati opposti del triangolo in $A \beta Y$, c'è noto il teorema di Brianchon

$$\frac{AY}{BY} \frac{BA}{CA} \frac{CB}{AB} = -1,$$

che in modo simile si vede essere vero anche nel segno. E conseguentemente questi teoremi sono pur veri gl' inversi, questi non daranno più luogo a menti di rette, sia nel piano sia nello spazio, gioverà considerare anche



7

Si consideriamo una nuova transversale $a' b' c'$, ed uno nuovo punto P' le cui congiungenti coi vertici $A B C$ del tri. taglino i lati opposti in $A' B' C'$; avremo ancora in virtù di quei 2 teoremi:

$$\frac{Aa'}{Bc'} \frac{Ba'}{Ca'} \frac{Cb'}{Ab'} = 1$$

$$\frac{AY'}{BY'} \frac{BA'}{CA'} \frac{CB'}{AB'} = -1$$

e moltiplicando queste rispettivamente per le precedenti:

$$\frac{Ac \cdot Aa'}{Bc \cdot Bc'} \frac{Ba \cdot Ba'}{Ca \cdot Ca'} \frac{Cb \cdot Cb'}{Ab \cdot Ab'} = 1$$

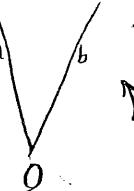
$$\frac{AY \cdot AY'}{BY \cdot BY'} \frac{BA \cdot BA'}{CA \cdot CA'} \frac{CB \cdot CB'}{AB \cdot AB'} = 1$$

La prima di cui potremo esser certi anche nel segno. ~~Esempio~~ ~~non sono altro~~, non quindi vedere, che certo particolare del teorema di Carnot sul triangolo tagliato da una conica, il cui cui' in cui la conica c' è ridotta al 2 rette P .

Tono poi si considerano i segni dei segmenti sul piano, così si potranno considerare nello spazio e con vantaggi altrettanto ed anche più grandi

forse. In generale ogni qual volta si avranno a considerare relazioni tra segni

i segni dei segmenti. Se così è, — dopo quanto si è detto, troppo evidente, perché occorre ancora mistero.

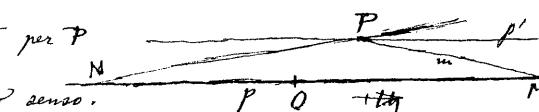
E' ciò che si è detto per segmenti va esteso agli angoli. Ogni qual volta è un certo punto α vertice di alcuni angoli, ^{che devono entrare in certa} ~~che non~~ relazioni, che si cercano, gioverà spesso ~~far~~ supporre quegli angoli generati da una retta che si muove ^{nel piano} rimanendo ^{in linea} fissa in quel punto. Se O è quel punto ed ab un angolo, si fissi una certa direzione secondo cui si muove la retta gene- 

retica negli angoli positivi e si supponga che a descrive l'angolo ab la retta generatrice parta da a e roti portandosi in b . Allora ab sarà un angolo positivo o negativo secondo che il senso secondo cui rotata quella retta generatrice è quello convenuto negli angoli positivi od il contrario.

La trigonometria, in cui si è anzitutto introdotto questo concetto ~~dell'~~ del segno dell' angolo, ne fa uso ad ogni passo e ne utilizza molto giovalemente. Ed in generale nella ~~teoria~~ si domanda poi condiscendo qui vantaggi colla Geometria tutta, imperiose in questa, specialmente nelle moderne teorie, gli angoli figurano generalmente non per se stessi, ma per le loro ~~linee~~ linee trigonometriche. Evidentemente per zero. Esempi dell' unità del segno degli angoli s' incontrano adunque in ogni passo nella trigonometria e poi del resto in vari punti importanti della moderna geometria, come nello studio dei fasci di

ette.

È più evidente per che si potrà pure introdurre il segno negli angoli dici-
-di, che del resto tratti del piano perpendicolari allo spigolo danno angoli pianici di ugual misura, e a cui quindi si possono ridurre. Farci quindi intito di insistere maggiormente su questo concetto, e lasciando in di-
-sparto la convenzione sui segni in geometria, passeremo piuttosto ad un'al-
-gebra di idee, quelle sull'infinito.

S 2 — Siamo dati un punto P ed una retta p che non passa per P e sia fissa su quella retta una retta origine O ed un senso positivo. Si faccia muovere sul piano una retta m passante per P in modo che roti sempre in uno stesso senso. 

Capisca' le p in un punto vicino M mobile sulla p , e tali che ad ogni punto M corrisponda una sola retta m e viceversa ad ogni retta m corrisponda un solo punto M . Alla PO come retta m corrisponderà O come punto M e viceversa, ma immediatamente dopo il segmento OM non sarà più nullo, ma andrà invece crescendo in valore numerico, imperiose M andrà sempre più allontanandosi dal punto fisso O , ed anche, notiamo, dal punto fisso P . Ed il punto M andrà continuamente, ma sarà sempre unico corrispondente ad m , ^{OM grandissimo in valore numerico, cioè} finché la retta m non ^{si} ~~si~~ toccherà il punto P ed allora il punto M non causerà più, ma oltrepassato di proposito qualche posizione delle parallele p' alla p , la retta m toccherà di nuovo la p , ma in un

punto M posto ad una grandissima distanza dai punti fissi O, P da parte op
- posta rispetto ad O alla posizione che aveva M poco prima, in modo ciò che
 OM avrà cambiato segno
 ~~OM e OP saranno di segno contrario.~~ continuando poi il movimento della retta m , il
punto M si avvicinerà ad O fino a passarlo di nuovo.

Consideriamo quelle paragonate p' delle se parallele alla p. Quindi dicono che
abbra le se non taglia pi' in nessun punto la p.

Secondo il punto M all'arco α sempre nella stessa direzione ed giunto ad un
~~istante~~ ~~che~~ ~~ha~~ ~~il~~ ~~tagliato~~ la retta in p in un punto M immensamente lontano
 in una direzione ed il tagliare lo p in un altro punto M pure immensamente lontano ma in
 direzioni opposte a quelle, la retta in i passa per una posizione intermedia p' su un
 allontanandosi ^{giunto a' voglia} ~~infinitamente~~ non si trova mai il punto M corrispondente. ~~Ma~~
 se la retta p' dicei parallela alla retta p . Allora secondo che ~~abbia~~ per quella po-
 -sizione di m il punto M non esiste, appoggiandosi sul fatto che per questo mo-
 si allontani sulla retta p o sulla p' non lo troverei mai. Allora ~~abbiamo che~~ osservano che se 2 rette passanti per P rotano in senso inverso tagliando la p

da parte opposte del punto fisso O in punti che si muovano contemporaneamente al-
-lontanando in quelle direzioni opposte, tenderanno a collocarsi entrambi su quella retta
 p' parallela a p . e dicono in conseguenza che queste si tagliano in 2 punti, a di-
-stanze dal punto O che osi indicano $+\infty$ e $-\infty$. Ma nella Geometria moderna
che tende a generalizzare i principii per quanto c' è possibile, osservando che ogni retta

In passando per p taglia la p in un solo e determinato punto, si conviene di dire che anche la retta p' taglia la p in un sol punto, che dicesi il punto all'infinito della retta p (e della p')

Bale concetto nasce ancora in altri modi. Ad esempio, sia su una retta due punti e punto A-B e la direzione dei segmenti positivi, e sia insieme M è un punto della stessa retta e $\frac{MA}{MB} = \mu$, ad ogni punto M corrispondrà in valore di μ . Ad ogni punto M distingua grandissima dal A-B, ma più prossimo ad A che a B, si accosta ad A, M si accosta da sinistra a o. Mentre M varia da A a B, M var per valori negativi tutti da o a $-\infty$, e finalmente mentre M camminando sempre nello stesso senso si allontana da B indefinitamente, M var per val. pos. diminuendo da + ∞ verso 1. È dunque evidente che ad ogni valore di μ corrisponde una sola posizione di M. Ma pur $\mu = 1$ il punto M è immensamente lontano o in un senso o nell'opposto: c'è quindi naturale, per dire che in entrambi i sensi allontanandosi indefinitamente si giunge allo stesso punto. (1)

Finalmente, per citare sol più un modo di vedere l'importanza di quella congettura e soprattutto eccezioni, se da un punto P del piano si proiettano i punti di una retta p sopra una retta q non parallela a quella, ad ogni punto di p ne corrisponderà uno di q e viceversa, sicché al punto d'intersezione della parallela p' condotta da P a p corrisponderà un solo punto della p : l'intersezione colla p' .

(1) Notisi anche che B corrisponde contemporaneamente a $p_0 = +\infty$ e $= -\infty$ sicché l'equazione si fa in geometria la b_0 corrispondente in algebra

ossia le 2 rette parallele P, P' si taglieranno in un sol punto.

E non istoro' a ciò altri esempi delle convenienze di natura logica di quella convenzione, perch' così se ne presentino in geometria tutti i momenti. Ed è senz' senso lo stare a dire che quella ^{quell' concetto} convenzione è falso, imperocchè noi non facciamo con ciò altro che una convenzione. Croyer è evidente che allontanandosi ^{2 punti} una retta in direzioni opposte partendo da uno stesso punto la distanza tra i 2 punti andrà sempre più crescendo e mai più i 2 punti toccheranno a coincidere. Ma la convenzione di dire che così veranno a coincidere non sarà punto la leggi note, tanto più se dicendo che coincidono nel « punto all'infinito » della retta, intendiamo con la denominazione un punto che non si potrà mai raggiungere. Tale convenzione non ucciderà ~~decomponerà~~ nessun teorema, nessuna proposizione, ed insomma sarà conseguenza di tali molti e molti teoremi, che non soffriranno più eccezioni.

d'idea del « punto all'infinito » di una retta ci far concepir questa come una linea perfettamente continua, cioè in cui i punti si susseguono in modo continuo, senza interruzione. — Per conseguenza 2 punti di una retta ci parranno dividere la retta in 2 segmenti, di cui l'uno, contenente il punto all'infinito, e che quindi si estende in 2 direzioni, lo diciamo « infinito », e l'altro « finito ». Quindi c'è perfetta analogia coi 2 lati di un angolo (considerate come lato al vertice), i quali in realtà determinano 2 angoli. L'uno acuto e l'altro obtuso, la cui somma costante è 2π .

Dal quanto si è visto scaturisce immediatamente che più sotto di un piano parallelo tra loro hanno comune il punto all'infinito. Essi vengono quindi considerati come un fascio di rette raggi, di cui il centro si sia allontanato indefinitamente. Quindi è che si parla dell'omografia e dell'involuzione anche per fasci di rette paralleli e la geometria ne ottiene grande utilità.

Inale c'è il luogo dei punti all'infinito di un piano? Egni rette del piano non ne contiene che uno (ricordiamoci che questi « punti all'infinito » di cui stiamo ragionando, non sono che enti geometrici convenzionali, ma dalle convenzioni fatte si possono dedurre benissimo, come faremo, delle proprietà che ne sono conseguenza) e quindi quel luogo è di 1^o ordine, ossia una retta, che dicesi ⁽¹⁾ retta all'infinito del piano. Si capisce quindi come nella proiezione centrale in cui ad ogni retta di un piano corrisponda come proiezione una retta d' un altro piano o viceversa, corrispondand pure rette ai luoghi dei punti all'infinito dei 2 piani: qui c'è sulla nostra convenzione quel luoghi sono ancor rette

(1) La retta non è geometria. Non è che la retta si possa definire, come la curva di 1^o ordine, imperocchè il concetto dell'ordine (numero dei punti in cui questa è tagliata da ogni retta) è già subordinato a quello di retta. Si può però dimostrare che la retta, che essendo tagliata da ogni altra in un sol punto c'è una di 1^o ordine, è la sola. Difatto siano A, B, C 3 punti della curva non in linea retta: le rette distinte AB, BC, AC taglieranno la curva in 2 punti, onde punti

Ogni piano dello spazio adunque ha una sola retta all'infinito, tagliando cioè il luogo di tutti i punti infinitamente lontani secondo una retta. Così ogni retta dello spazio taglia quel luogo in un sol punto. Dunque quel luogo è di 1^o ordine, cioè un piano. Concludendo: tutti i punti all'infinito dello spazio sono su uno stesso piano, da darsi quindi il piano all'infinito.

Più rette parallele dello spazio saranno a considerarsi come aventi comune il punto all'infinito e quindi come raggi di una stessa sfera. Più piani paralleli dello spazio saranno a considerarsi come aventi comune la retta all'infinito e quindi come piani di uno stesso fascio. Le rette parallele ad un piano si potranno considerare come aventi il punto all'infinito sulla retta all'infinito del piano. ~~E così~~ i piani paralleli ad una stessa retta come piani le cui rette all'infinito passano tutte per punto all'infinito della retta.

Però non basta definire parallele le rette del piano ~~che tagliano in un punto comune il piano~~ all'infinito. Ma una retta qualunque taglia la retta all'infinito appunto in un punto all'infinito. Dunque ogni retta all'infinito è a considerarsi come parallela

non sarebbe più di 1^o ordine: dunque ogni linea di 1^o ordine è una retta e viceversa. Una dimostrazione analoga farebbe vedere che ogni superficie di 1^o ordine è un piano e viceversa. Del resto delle rette si conoscono proprietà, ma non se ne è ancora data, ch'è mi pareva una vera definizione geometrica, cosa del resto vero che la retta col il punto non siamo

a tutte le rette dei vari piani che passano per essa. Del resto ciò c'è naturale, finché la retta all'infinito di un piano non può essere una direzione puntuata che un'altra. Infatti la direzione di ogni retta è determinata dal suo punto all'infinito e tutte le rette di una direzione hanno un certo punto all'infinito, e se hanno questi sono in quella direzione. La retta all'infinito, che contiene tutti i punti all'infinito, sarà tutta la direzione, cioè sarà parallela a tutte le rette del piano.

In modo analogo si vede che il piano all'infinito è a considerarsi come parallelo a tutti i piani dello spazio.

Consideriamo 2 rette qualsiasi che si taglino in un punto M: siano A, A' 2 loro punti fissi posti in modo che la 2 rette colino su loro piano in modo che il punto M si allontani per indefinitamente nel piano delle A-A'. Sia la retta in una direzione qualsiasi: finirà per costituire indefinitamente dai punti fissi A-A'. Nel triangolo AMA' si avrà però sempre:

$$AM : A'M = \operatorname{sen} A' : \operatorname{sen} A$$

possono in questa definire senza parlare di cose che noi dipendono. Così la definizione: il punto è un luogo immaginato senza dimensioni (Baltzer, Elementi §1) è più già evidentemente che si abbia il concetto del punto. Così quella ~~definizione~~ geometrica della lunghezza più corta fra 2 punti, implica il concetto geometricamente definitibili, giacché essendo così la base, direi, della geometria, non si

sto, man mano che M si allontana all'infinito, l'angolo \hat{M} del triangolo tende ad entrare negli elementi convenzionali (punto, retta, per ciò all'infinito), propri ad annullarsi e quindi gli angoli \hat{A}, \hat{B} tendono ad diventare supplementari, e lo \hat{C} più generale in un così più non entrano.

diventano appunto quando M sia giunto all'infinito e le 2 rette sian divenute parallele. Dunque il rapporto $\sin A'/\sin A$ tende ad 1 e quindi tenderà pure ad il rapporto $AM:A'M$. Concludendo: il rapporto di 2 segmenti aventi un'estremità comune all'infinito sono a considerarsi come aventi ugual lunghezza, in questo senso che il loro rapporto s'avvicina indefinitamente ad 1 quando quell'estremità comune si allontana indefinitamente.⁽¹⁾

Ciò punto all'infinito gode adunque della stessa proprietà di essere qualunque distanza diversa da tutti i punti ^{a distanza finita} del piano, anche da tutti i punti a distanza zero che le 2 rette si tagliano, ma per caratterizzarla ci addiciamo « punto infinito dello spazio ». (Si vedrà esistere anche delle direzioni fronte all'infinito il punto d'intersezione, che più non esiste. Notiamo però che quel punto è uno stesso angolo con ogni direzione possibile dello spazio)

Il concetto da cui siamo partiti riguardo ai punti all'infinito ci ha condotto a concluderne le varie proprietà che ne deduciamo. Ma quella prima convenzione, da cui ^{appunto} tacavamo tutte queste non si limita a darci la grande utilità del generalizzare via via le leggi della Geometria, togliendo le eccezioni che riguardavano rette e piani paralleli, e via dicendo. Essa ci dà di più: ci dà un metodo semplicemente rigorosissimo per dedurre dalle proprietà in-

⁽¹⁾ Le lunghezze di 2 segmenti tendendo a ∞ , il loro rapporto sarebbe $\frac{\infty}{\infty}$, an' indeterminato. In questo caso invece quel simbolo indica un numero determinato. Non sarebbe più 1 se quei 2 segmenti non avessero comune l' estremità all'infinito,

No dette « rigorosissimo » e parsi inprovvista questa parola al dedurre proprietà parallele. Il motivo è questo: realmente esistente da proprietà di enti puramente convenzionali. Ma il rapporto $AM:A'M$ hanno da esser rigorosi all'ultimo punto ed c'è fatto vedere che anche il nostro lo sarà. Quale è l'origine del così detto punto all'infinito? Si hanno 2 rette ~~se~~ cui angolo si va facendo sempre più acuto tendendo ad annullarsi e quindi ~~se~~ al cui punto d'intersezione s'allontana

indefinitamente tendendo a scomparire. Anche in tal caso convienerà di - la posizione della retta è una posizione finita, coll'allontanarsi di quel punto - che quindi in ogni caso si potrà considerare un punto esistente, ma che - si molto lontano, più lontano di ogni distanza data: le proprietà dei punti - an' in tal caso è facile dimostrare che quel rapporto sarebbe indeterminato veramente. Di fatto siano AN, BM 2 segmenti in cui M, N s'allontanino indef. Sotto sostituire a BM un segmento AM a lui parallelo ed ugualmente lungo, M sicché si tratterà di trovare $\frac{AM}{AN}$ quando M, N sono all'infinito. Or in tal caso la retta MN , come vedemmo (pag.) è parallela ad ogni retta di quel piano; se una retta taglia AM e AN in M', N' sarà dunque $\frac{AM}{AN} = \frac{AM'}{AN'}$, e ciò comunque si prendano M' e N' , sicché $\frac{AM}{AN}$ è veramente indeterminato

esistenti non appartengono pure a quello e noi lo indicheremo come appartenenti al punto all'infinito con quell'idea però che appartengono ai punti anche molti altri. Gli esempi, che ora daremo delle applicazioni di cui parlavamo, chiariscono meglio la cosa.

Vi sono proprietà delle figure piane che rimangono inalterate quando queste si proiettano da un punto qualunque dello spazio sopra un altro piano qualunque. Più tardi ne riguerremo, ma frattanto ricordiamo che non di tal genere tutte le proprietà puramente grafiche, riguardanti cioè punti posti sopra le stesse rette e rette passanti per gli stessi punti. Sono ancora proiettive tutte le parecchie relazioni metriche, come, ad esempio, tutte quelle che, ridotte ad essere senza denominatori, contingono in ogni termine segmenti della stessa retta o delle stesse rette e gli stessi punti come estremi di segmenti. Dimostrata una simile proprietà proiettiva per una proiezione particolare di una figura piano sarà pure dimostrata per questi.

Siano le punti A, B, C, D di una retta m e vogliasi dimostrare la relazione, che già vedemmo altro volta (V. pag. 5):

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$$

E questa relazione metrica appartiene evidentemente a quella categoria che teste discorso consiste tutta di relazioni proiettive. Basta adunque dimostrarla per l'infinito in Matematica è puramente convenzionale, quando si tratta di ragionevoli regole, una proiezione qualunque dei punti A, B, C, D per un punto qualunque.

quei O sopra un'altra retta m' . Piano A' ,

B', C', D' siano queste le proiezioni dei punti A, B,

C, D della m , e poniamo si sia preso la m' parallela ad OD, cioè sia D' punto all'infinito. La relazione

da dimostrarsi sarà:

$$A'B' \cdot C'D' + B'C' \cdot A'D' + C'A' \cdot B'D' = 0$$

ovvero:

$$A'B' \frac{C'D'}{A'D'} + B'C' + C'A' \frac{B'D'}{A'D'} = 0$$

E come D' è all'infinito, i rapporti $\frac{C'D'}{A'D'}$, $\frac{B'D'}{A'D'}$ valgono 1 (V. pag. 16) o, se vogliamo sbandierare le convenzioni, tendono ad 1 quando la proiezione si faccia in modo che la OD tenda a divenire parallela ad m , cioè che il punto D' tenda ad andar più lontano di qualunque punto assegnato sulla m' . Dunque la relazione da dimostrarsi si riduce allo seguente

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0$$

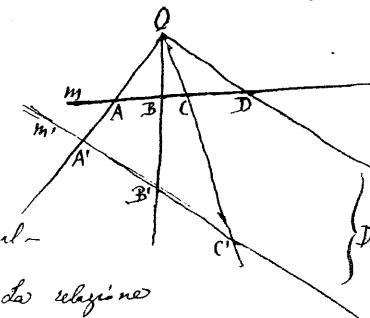
quando la m' sia diventata parallela ad OD. Per questa relazione c'è nota (V. pag. 4): dunque è pure dimostrata quella che volevamo dimostrare!

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$$

(1) L'infinito bisogna andar cauti, perché è relativamente facile cadere

in grandi errori, e così diciamo dello zero. Non bisogna dimenticar mai che

l'infinito in Matematica è puramente convenzionale, quando si tratta di ragionevoli regole,



Si ha un triangolo ABC tagliato in $\alpha\beta\gamma$ da una trasversale. Sono che (colla convenz. sui segni)

$$\frac{AY}{B\gamma} \cdot \frac{C\beta}{A\gamma} = 1 \quad (\text{teor. di Menelao})$$

Difatto questa relazione c'è proiettiva (V. pag. 16), e se proiettiamo la figura su un altro piano in modo che la proiezione della retta $\alpha\beta\gamma$ vada all'infinito, cioè (cioè vada) contenissima, tendendo ad allontanarsi sempre più, se non si vuol usare quel linguaggio convenzionale che tiene ad aver lo stesso significato (ma che è assai più rapido), si avrà un nuovo triangolo $A'B'C'$ sui cui lati le proiezioni α', β', γ' di α, β, γ saranno all'infinito e quindi daranno (V. pag. 16): $\frac{A'\gamma'}{B'\gamma'} = 1, \frac{B'\alpha'}{C'\alpha'} = 1, \frac{C'\beta'}{A'\beta'} = 1$; dunque:

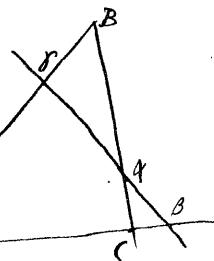
$$\frac{A'\gamma'}{B'\gamma'} \cdot \frac{B'\alpha'}{C'\alpha'} \cdot \frac{C'\beta'}{A'\beta'} = 1$$

Quindi c'è dimostrato il teorema.

Ecco c'è del resto assai più generale. Se si ha un poligono qualunque $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ di n lati che una retta α taglia in punti a_1, a_2, \dots, a_n si avrà (colla convenz. sui segni.)

$$\frac{A_1 a_1}{A_2 a_1} \cdot \frac{A_2 a_2}{A_3 a_2} \cdot \frac{A_3 a_3}{A_4 a_3} \cdots \cdots \cdots \frac{A_n a_n}{A_1 a_n} = 1$$

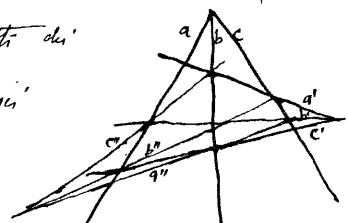
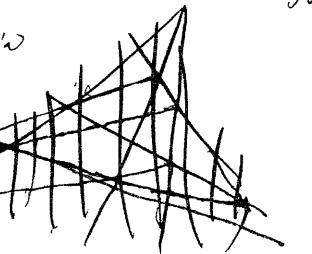
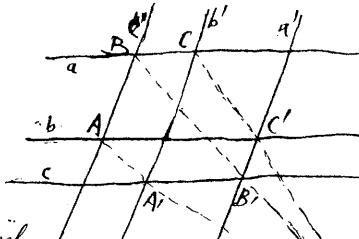
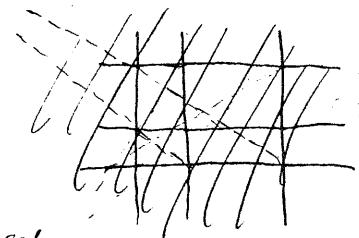
La dimostrazione è identica alla precedente: la relazione essendo proiettiva basta osservare che se si proietta la figura su un altro piano in modo che la trasversale vada all'infinito, i rapporti $\frac{A_1 a_1}{A_2 a_1}, \frac{A_2 a_2}{A_3 a_2}, \dots$ diventeranno tutti uguali ad 1 e quindi quella relazione si verificherà. Dunque così sarà



pure vera in generale.

Tendiamo ancora un esempio. Siano 3 rette parallele $a|b|c$ ed altre 3 più parallele $a'|b'|c'$ e consideriamo i punti a, a', b, b', c, c' che diamo rispettivamente a, a', b, b', c, c' , B, B', A, A' . È facile allora vedere che (non fosse che col teorema di Menelao fatto dimostrato) che le rette AA', BB', CC' concorrono in un punto. La proprietà essendo grafica c'è proiettiva, cioè solo che le rette parallele saranno generalmente proiettate come raggi di un fascio. Vorremo adunque in generale che se si hanno 2 fasci $a|b|c, a'|b'|c'$ i 3 raggi "ascensori", le 3 rette "congiungenti" i punti $a, a'; b, b'; c, c'$ saranno raggi di uno stesso fascio (proposizione nota della teoria delle forme dei fasci omografici). I 3 fasci $a|b|c, a'|b'|c', a''|b''|c''$ saranno quindi:

in una posizione reciproca, cioè i 3 raggi di ciascuno saranno le 3 congiungenti di punti d'intersezione dei raggi degli altri 2 fasci analoghi. Se ne deducono interpretando analogie.



in vario modo la figura bellissimi tornerà come i 2 seguenti: se ad esempio
 $(abcabc)$
ha 3 lati non adiacenti passanti per uno stesso punto, e così gli altri 3 per
un altro punto, le 3 congiungenti $(a''b''c'')$ opposte dell'esagono passeranno pure
per uno stesso punto; se un esagono ha 3 vertici non adiacenti $(abc'', ac'b'', abc)$
su una stessa retta (a) o gli altri 3 ($a''b'', a'''b'''c'''$) su una stessa retta (a'), anche
i 3 punti d'intersezione ($a''b'c$, $a''bc'$, $a''b''c''$) d'intersezione dei lati opposti saranno
su una stessa retta a'' .