Teoria geometrica delle curve algebriche piane

Introduzione: sui problemi di geometria enumerativa.

Numero dei parametri che determinano un ente geometrico; esempi (gruppi di elementi nelle forme di varie specie, coniche nel piano e nello spazio). Condizioni semplici e multiple; esempi. In una ∞^c di enti ve ne sono $\infty^{c-\alpha}$ soddisfacienti ad una condizione α-pla. Se un ente Γ contiene $\infty^{\alpha'}$ enti Γ', una condizione d-pla per Γ' dà una condizione $(d-\alpha')$pla per Γ; esempi (curva passante per un punto o tagliante una retta, cubica che contenga 3 punti in linea retta di una data curva, ecc.). Se per Γ è una condizione d-pla l'essere in una data relazione con un dato Γ', per Γ' sarà pure una condizione d-pla essere in quella relazione con un dato Γ; esempi (curva passante per un punto; essendo per una cubica condizione quintupla lo stare su una data quadrica, viceversa ecc.). — Risoluzione dei problemi di geometria enumerativa coll'enumerazione delle costanti; caso in cui le condizioni imposte all'ente essendo contraddittorie vi sono ∞ soluzioni se ve n'è una (omografie che trasformano una conica in se stessa); difetto di questo metodo.

Principio della conservazione del numero: un numero non varia o

diventa infinito se gli enti dati assumono posizioni speciali nello spazio o tra di loro, o degenerano comunque; quindi diventa infinito se > numero che si ha per altra posizione. Applicazioni. Esistono 2 rette che ne tagliano 4 date (e ∞³); coniche determinate da punti, tangenti e normali; 102 coniche con 5 date norm.; 4 date; 4 coniche di un fascio tangenti ad una conica data (facendo degenerare questa in una coppia di punti); 3264 coniche tangenti a 5 date; $n+\nu$ normali (anche con una conica qualunque per assoluto) ad una curva piana d'ordine n e classe ν da un punto del piano; $n+\nu+r$ normali da un punto (ed r in un piano) ad una superficie d'ordine n, classe ν e rango r; $n\alpha+\nu a$ curve di un sistema (a,α) tangenti ad una data curva d'ordine n, classe ν; l'ordine del luogo dei piedi delle normali condotte da un punto fisso alle curve di un sistema (μ,ν) è $2\mu+\nu$ (ed in particolare l'ordine della podaria di una curva è il doppio della classe di questa) e l'ordine del luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte dal punto fisso è $\mu+\nu$; di poligoni i cui vertici stiano su date curve d'ord. n_i e i cui lati tocchino curve di cl. m_i ve ne sono $2^{n_1 n_2 \dots m_1 m_2 \dots}$. Principio di corrispondenza univoca (Chasles 1855): esempi. Principio di corrispondenza (α,α'): caso della corrispondenza simmetrica; caso in cui un elemento unito è multiplo. Applicazioni. Due curve piane d'ordini n, n' si tagliano in nn' punti; analog. Due sistemi di curve d'ordini n, n', indici μ, μ' in corrispondenza (α, α') generano una curva d'ordine $\mu\alpha' n' + \mu' \alpha n$; casi particolari $\alpha=\alpha'=1$; $n=n'=1$;

SI 24

$n = n' = 1$ con $\mu = \mu' = 1$. Le curve di un sistema (μ, ν) tangenti ad una curva (n, m) sono $m\mu + n\nu$. Le corde intercette su una curva d'ordine n da un angolo di grandezza costante che rota intorno ad un punto ν-plo inviluppano una curva di classe $2(n-1)(n-\nu)$. I triangoli aventi i vertici su $\gamma_n, \gamma'_{n'}, \gamma''_{n''}$ e normali a $c_{n,m}$, c_{n_1,m_1}, c_{n_2,m_2} sono $nn'n''[2(m_1+n_1)(m_2+n_2)(m_3+n_3) - n_1n_2n_3]$. Il luogo dei punti di contatto delle curve di due sistemi (μ, ν), (μ', ν') è d'ordine $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$. — Se vi è un triangolo iscritto in una conica e circoscritto ad un'altra, ve ne sono infiniti.

Teorie preliminari sulle forme di 1ª specie.

Polarità nella punteggiata. — Il gruppo polare del grado r di un polo O rispetto ad n punti $A_1 \dots A_n$, come gruppo degli r punti X tali che $\sum \Pi_r \frac{XA}{OA} = 0$. Questa relazione è proiettiva. Si trasforma in $\sum \Pi_r \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA}\right) = 0$, ossia $\binom{n}{r}\left(\frac{1}{OX}\right)^r - \binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{OX}\right)^{r-1}\sum \frac{1}{OA} + \binom{n-2}{r-2}\left(\frac{1}{OX}\right)^{r-2}\sum \Pi_2 \frac{1}{OA} - \dots = 0$. Se X è nel gruppo polare di grado r di O, O sarà nel gruppo polare ($r$esimo o) di grado $n-r$ di X. Se rispetto agli r punti X si prende il gruppo polare di grado r' di O, esso sarà pure il gruppo polare di grado r' di O rispetto agli A. Si ha $\mathop{\mathcal{P}}_{O}\mathop{\mathcal{P}}_{O'} = \mathop{\mathcal{P}}_{O'}\mathop{\mathcal{P}}_{O}$ (+). Ne segue la commutatività delle polarità rispetto a

(+) Dalla $\sum \frac{\omega - \alpha}{\mu - \alpha} = 0$ e da $\sum \frac{\omega' - \mu}{\nu - \mu} = 0$ si ha per ν l'equ. simmetrica rispetto a ω e ω': $\sum (\omega - \alpha_1)(\omega' - \alpha_2)(\nu - \alpha_3)\dots(\nu - \alpha_n) = 0$

vari punti $O, O', O'', \ldots$ (gruppi polari misti). In particolare $\gamma_O^r \gamma_{O'}^{r'} = \gamma_{O'}^{r'} \gamma_O^r$, ossia il gruppo polare di grado $s+s'-n$ di O rispetto al gruppo polare di grado s' di O' rispetto a γ coincide col gruppo polare di grado $s+s'-n$ di O' rispetto al gruppo polare di grado s di O rispetto a γ. Se O ha A_1 per polare di 1° grado rispetto ad $A_2 \ldots A_n$, lo avrà pure per polare di 1° grado rispetto ad $A_1, \ldots A_n$. — Se k dei punti A di un gruppo γ coincidono in A_0, del 1° gruppo polare di un punto qualunque $k-1$ punti coincideranno in A_0 (dalla $(m-a_1)\ldots(m-a_n)\sum \frac{o-a_i}{m-a_i} = 0$); e viceversa. Ne segue che del gruppo polare s^{mo} $k-s$ punti cadranno in A_0.

L'equazione del polare di grado r di O: $OM^r \sum(OA)_{n-r} - (n-r+1) OM^{r-1} \cdot \sum(OA)_{n-r+1} + \binom{n-r+2}{2} OM^{r-2} \sum(OA)_{n-r+2} - \ldots \pm \binom{n}{r} \sum(OA)_n = 0$ se O coincide con k degli A, sicchè $\sum(OA)_n = 0, \ldots \sum(OA)_{n-k+1} = 0$ ha $OA = o$ per soluzione k-pla, ed è identica se $k > r$; se $k \leq r$ del gruppo polare di grado r, k punti coincidono con O e i rimanenti $r-k$ formano il polare di grado $r-k$ di O rispetto ai rimanenti punti A. Viceversa se del polare di grado r di O k punti coincidono con O, coincideranno con questi k degli A.

Polarità nel fascio di rette. È data dall'equazione $\sum \left(\frac{\operatorname{sen} ma}{\operatorname{sen}^m oa}\right)_r = 0$. Proprietà che si ottengono dalle precedenti.

Teoria dell' involuzione. — Definizione dell' involuzione di grado n mediante l'equazione $\varphi(x) + \lambda\psi(x) = 0$. È permesso sostituire φ e ψ con due gruppi qualunque. Le potenze di ciascun punto di un gruppo rispetto a due gruppi fissi sono in un rapporto costante per tutti i punti del 1° gruppo; vi sono $n-1$ punti (centrali), di cui ciascuno ha la stessa potenza rispetto a tutti i gruppi. Vi sono $2(n-1)$ punti doppi. L'involuzione è una forma razionale, cioè una serie lineare semplicemente infiniti di n-ple di elementi. I gruppi polari di grado r di un punto qualunque rispetto ai vari gruppi di un' involuzione di grado n formano un' involuzione di grado r in corrispondenza projettiva a questa. Caso di $r = 1$; punteggiate projettive ad un' involuzione; involuzioni projettive tra di loro. Punti comuni a due involuzioni projettive; casi di punti multipli nelle involuzioni.

Teoria delle curve.

Definizioni relative alle curve piane: ordine, classe e singolarità diverse. Punti comuni a due curve che coincidono in un punto multiplo comune. Numero delle condizioni imposte ad una curva dandone un punto multiplo; numero delle condizioni che determinano una curva. Fascio d'ordine n; sua equazione. Relazione tra i caratteristici di due curve piane in corrispondenza univoca. Formole di Plücker: loro applicazioni

Teoria dell' involuzione. — Siano $f(x)$, $\varphi(x)$ i due gruppi $A_1 A_2 \dots A_n$, $B_1 B_2 \dots B_n$: l'equazione dell' involuzione

$$f(x) + \lambda \varphi(x) = 0$$

equivale a $\alpha(x-a_1)\dots(x-a_n) + \lambda\beta(x-b_1)\dots(x-b_n) = 0$

ossia a $\dfrac{MA_1 \cdot \dots \cdot MA_n}{MB_1 \cdot \dots \cdot MB_n} = \rho$,

sicchè per tutti i punti di uno stesso gruppo il rapporto dei prodotti delle distanze dagli A e B ha uno stesso valore ρ che varia col gruppo.

Sui gruppi polari. — Crem. n. 14. Ecco una dimostraz. più semplice. Siano o, m_ℓ, μ_r, ... le ascisse dei punti stessi. Se m_ℓ formano il gruppo polare di grado i del punto o rispetto al gruppo a, e μ il gruppo polare di grado $i+i'-n$ di o' rispetto ad m, sarà:

$$(1) \quad \sum \frac{o-a_1}{m-a_1} \cdots \frac{o-a_{n-i}}{m-a_{n-i}} = 0$$

$$(2) \quad \sum \frac{o'-m_1}{\mu-m_1} \cdots \frac{o'-m_{n-i'}}{\mu-m_{n-i'}} = 0$$

Tra le (1) e (2) bisogna eliminare le m. Perciò formo della (1) la trasformata in $x = \dfrac{o'-m}{\mu-m}$, donde $m = \dfrac{\mu x - o'}{x-1}$

$m - a_1 = \dfrac{(\mu - a_1)x - (o'-a_1)}{x-1}$ e sostituendo

$$(1') \quad \sum \frac{o-a_1}{(\mu-a_1)x-(o'-a_1)} \cdots \frac{o-a_{n-i}}{(\mu-a_{n-1})x-(o'-a_{n-1})} = 0$$

La somma dei prodotti ad $n-i'$ delle radici n di questa uguagliata a o, ci dà la (2), cioè il coeff. di $x^{i+i'-n}$

$$\sum (o-a_1)\dots(o-a_{n-i})(o'-a_{s+1})\dots(o'-a_{s+n-i'})(\mu-a_{t+1})\dots(\mu-a_{t+i'})$$

che non s'altera scambiando i, i' ed o, o'. Dunque ecc. ecc.

Projettività nella polarità. - Che la relazione di polarità: $\Sigma\left(\frac{MA}{OA}\right)_r = 0$ sia projettiva, si vede immediatamente introducendo un punto ausiliario X qualunque della retta e moltiplicando ogni fattore $\frac{MA_i}{OA_i}$ per $\frac{OX}{MX}$. — Del resto si dimostra subito che proiettando coi raggi m, o, a quella relazione diventa $\Sigma\left(\frac{\text{sen } ma}{\text{sen } oa}\right)_r = 0$.

Teorema di Bézout (intersezioni di 2 curve). dimostraz. col principio di corrispondenza tra i proiettanti da 1 p. fisso 2 p. delle 2 curve variabili ma allineati con 1 p. fisso.

Programma del corso libero di Geometria superiore pel 1886-7.

Teoria geometrica delle curve piane algebriche.

I. Introduzione. — Coordinate projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª e 2ª specie. — I due principii fondamentali della conservazione del numero e di corrispondenza: esempi. — Teoria dei gruppi polari di ~~punti~~ elementi di una forma di 1ª specie rispetto ad un gruppo fisso di n ~~punti di una retta~~ elementi della stessa forma. —
Teoria delle involuzioni di grado qualunque nelle forme di 1ª specie.

II. Definizioni delle curve algebriche e dei loro caratteri: prime proprietà. Punti e tangenti comuni a due curve. Numero delle condizioni che determinano una curva di dato ordine. (Teorema di Carnot?) Teoremi relativi alle ~~punti~~ curve passanti per ~~punti~~ gruppi particolari di punti. Fasci projettivi di curve e generazione ~~delle~~ di ogni curva mediante ~~essi~~ tali fasci.

SI 23

III. Teoria delle curve polari. — Definizioni e proprietà fondamentali delle curve polari. Sistemi lineari qualunque di curve ed in particolare ~~delle~~ rete delle prime polari rispetto ad una curva fissa. Steineriana ed Hessiana di una curva fondamentale. Formole di Plücker. Curve ~~gener~~ inviluppate dalle polari dei ~~due~~ punti di una curva qualunque.

IV. Applicazione alle cubiche piane. Configurazione dei flessi e fascio sizigetico. Teoria geometrica dei gruppi residui di punti di una cubica e trasformazioni univoche di questa in se stessa. Forme principali delle cubiche. — Due teoremi generali (di Harnack e Klein) sulle forme delle curve algebriche piane.

V ~~Trasformazioni~~ Teoria delle trasformazioni razionali piane. Punti e curve fondamentali di una trasformazione e loro relazioni; teorema di Nöther. Relazioni tra due curve corrispondenti qualunque; conservazione del genere. (Dimostrazione di Bertini dell'uguaglianza del genere in due curve che si corrispondono univocamente.) — Trasformazioni involutorie

VI. Teoria delle caratteristiche in generale e particolarmente di quelle ~~delle~~ dei sistemi di coniche.

Le coniche nello spazio.

Siano a_{ik} le coordinate di una quadrica - inviluppo, cioè i coefficienti della sua equazione inviluppo $\sum a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = 0$, e poniamo:

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix}$$

I coefficienti della sua equazione locale $\sum A_{ik}\,x_i\,x_k = 0$ essendo i subdeterminanti di 1° ordine del discriminante Δ saranno:

$$A_{ii} = \frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_{ii}} \quad ; \quad 2A_{ik} = \frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_{ik}}$$

Nello spazio a 9 dimensioni delle quadriche a, la superficie di 4° ordine $\Delta(a) = 0$ comprende tutte le coniche dello spazio. Sia data un'equazione lineare, o piano, di punti a:

$$\sum A'_{ik}\,a_{ik} = 0 \; ;$$

di questi piani le <u>coordinate</u> sono A'_{ii}, $2A'_{ik}$, e se poniamo:

$$A'_{ii} = \frac{\partial \Delta(a')}{\partial a'_{ii}} \quad ; \quad 2A'_{ik} = \frac{\partial \Delta(a')}{\partial a'_{ik}}$$

queste 10 equazioni ci determineranno le A' ove si conoscano le a' e viceversa: il punto a' ha A' per piano polare rispetto alla superficie Δ. È facile vedere che questa superficie è tale che non solo il punto a' ha un piano polare A', determinato, unico, ma che anche viceversa è unico il punto a' avente A' per piano polare. Di fatti si trova:

$$a'_{ik}\,\Delta^2(a') = \alpha'_{ik} \; , \qquad \Delta^3(a') = \begin{vmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{41} & \cdots & A'_{44} \end{vmatrix}$$

essendo α'_{ik} il subdeterm. di A'_{ik} nell'ultimo determinante.

S1 25

Ciò posto l'equazione del dato piano si potrà scrivere:

$$\sum a_{ik} \frac{\partial \Delta(a')}{\partial a'_{ik}} = 0 ,$$

onde tutti i punti del piano sono legati al punto a' da questa relazione di polarità rispetto a Δ.

Siano date più coniche $a, a', a'' \ldots$; perchè anche $\lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots$ sia una conica, qualunque siano $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$, cioè perchè indipendentemente da questi sia $\Delta(\lambda a + \lambda' a' + \ldots) = 0$ devono potersi determinare 4 quantità $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ tali che, indipendentemente dalle λ sia:

$$\xi_1 (\lambda a_{1i} + \lambda' a'_{1i} + \ldots) + \ldots + \xi_4 (\lambda a_{4i} + \lambda' a'_{4i} + \ldots) = 0$$

$$\lambda (\xi_1 a_{1i} + \ldots + \xi_4 a_{4i}) + \lambda' (\xi_1 a'_{1i} + \ldots + \xi_4 a'_{4i}) + \ldots = 0$$

dunque: $\xi_1 a_{1i} + \ldots + \xi_4 a_{4i} = 0$, $\xi_1 a'_{1i} + \ldots + \xi_4 a'_{4i} = 0$, $\ldots$

Ciò significa che non vi sono altri sistemi lineari di coniche nello spazio che quelli noti di coniche contenute nello stesso piano ξ.

Sistemi di rette

$x_1 = A, \; x_2 = y_1^3, \; x_3 = y_1^2 y_2, \; x_4 = y_1 y_3, \; x_5 = y_1 y_2^2, \; x_6 = y_1 y_2 y_3$

Sist. di r. (m, n) cioè che per 1 p. passano m r.; e di più una data retta sia in un fascio con k coppie di r. del sist. La proj. sarà sup. d'ord. $m+n$ con curva doppia avente 2 p. multipli secondo $\binom{m}{2}$ ed $\binom{n}{2}$ e nei piani per la loro congiung. k p. Dunque la sez. piana è del genere $\frac{1}{2}$ di

$$(m+n-1)(m+n-2) - m(m-1) - n(n-1) - 2k = 2mn - 2(m+n) + 2 - 2k$$
$$= 2(m-1)(n-1) - 2k$$

cioè del genere $p = (m-1)(n-1) - k$, il che risulta anche da 1 formola di Chasles (v. Loria geom sul compl. teti:) sulla quadrica con curva prov. da S_4 tg nel centro di proj. alla M_4^2.

Ne segue che l'ordine della superf focale è $2(m+p-1)$ e la classe $2(n+p-1)$

v. Sturm e Schumacher nei Math-Ann.

Nel piano un'invol. d'ord. n e cl. m rappresenta univocam. una sup. doppia di S_5 d'ordine $n+1$ incontrata dai piani tg in 1 punto, dai secanti in m. Le sez. piane d'ord. $n+1$ si rappresent. sul piano con curve d'ord. $n+1$

La rigata ell. d'ord. m con ∞^1 curve d'ord. $\frac{m+1}{2}$ quadratica rappresenta univocam. le coppie di p. di una curva ellittica cioè il sistema delle sue corde.

Per le sup. raz^{li} del 4° ord. v. Nöther Math. Ann

Sui sistemi di rette (3, 3)

La F^6 di S_6 gen. è rappresentata ~~dalle~~ $X_{123} = x_1 x_2 x_3$, $X_{ijk} = x_i^2 x_k$ ~~cioè~~ dalle cubiche per 3 punti sta, ~~nelle~~ posto

$y_0 = x_1 x_2 x_3$, $y_1 = x_1^2 x_2$, $y_2 = x_3^2 x_2$, $y_3 = x_3^2 x_1$, $y_4 = x_2^2 x_1$, $y_5 = x_2^2 x_3$, $y_6 = x_1^2 x_3$,

nelle quadriche di S_6:

$$y_1 y_2 - y_0^2 = 0, \quad y_3 y_4 - y_0^2 = 0, \quad y_5 y_6 - y_0^2 = 0$$

$$y_0 y_1 - y_4 y_6 = 0, \quad y_0 y_2 - y_3 y_5, \quad y_0 y_3 - y_2 y_6, \quad y_0 y_4 - y_1 y_5,$$

$$y_0 y_5 - y_2 y_4, \quad y_0 y_6 - y_1 y_3$$

cioè in una ∞^8 di quadriche. Dato ad arbitrio in S_6 un p. doppio di una tal quadrica pure che si abbiano ∞^1 coni e che ne segua: una F^6 di S_5 rappres. sul piano da cubiche per 3 punti sta in un fascio di quadriche (†) — La congr. (3, 3) ellittica sta su una solo complesso quadratico. Di che specie?

Tal congr. (3, 3) ha tre serie di rigate quadriche e 6 fasci di raggi; come prova la rappresentaz. E questa prova che una tal serie ∞^1 di quadriche è razionale e tale che per ogni r. ne passa una. Dunque è (3, 3); appartiene ad una ∞^3 (come luogo); poiché se fosse in una ∞^2 si avrebbero 8 punti

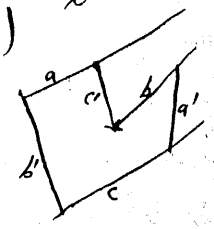
(†) Si trae anche considerando le sez. spaziali di F^6 e le 2 ∞^2 di quadriche su cui stanno.

sulla M_3^3 generata da 3 fasci proj. di S_4; più precisamente i piani della ∞^1 considerata di coniche di F^6 formano una tal M_3^3. ~~Considerando F^6 su una delle ∞^2 quadriche contenenti questa M_3^3 come quadrica di rette, essa sarà~~ Questa contiene poi ∞^2 rette, assi dei coni quadrici di 2ª specie contenenti la M_3^3.

Un S_4 taglia F^6 in sestica gen. per cui passano ∞^3 quadriche (di cui ∞^2 per la rigata cubica sez. di M_3^3); se ne scelga una fuori di quelle ∞^2; e su altro S_4 quell'unica quadrica contenente la sestica di sua inters. con F^6 la quale passa per la inters. con la quadrica presa nel 1º sp. Per le 2 quadr. ed i p. di F^6 esterno ad esse passerà una M_4^2 che, ~~se cosa non sarà di 2ª specie~~ non conterrà la M_3^3 e quindi non darà con quella ∞^2 di coni M_4^2 di 2ª specie una ∞^3 di coni ma bensì una ∞^3 di M_4^2 passanti per la F^6 e non tutte degeneri. Prendendone una non degenera per quadrica di rette si ha il sistema (3.3) di Kummer

~~Cercare in Ball il sist. assi ∞^2 compl. lineari~~

Ma ritornando alla F^6 di S_6 rappres. dalle cubiche per 3 pt., tra le ∞^8 quadriche che la contengono vi sono ∞^4 coni quadrici di 3ª specie. Invero proiettandola su S_4 da una sua corda si ha F^4 a sez. ellitt. e questa sta sempre su un fascio di quadriche (chè le 2 sez. spaziali, quartiche 1ª sp. stanno ∞¹ fasci di quadr. che si corrispondono proiettiv. se si fanno passare per 1 stessa conica ecc.); i 5 coni di questo son le sez. di 5 coni di 3ª specie di S_6. Tre di questi (mostra la teoria della F^4 biquadr. di S_4) hanno i piani di sostegni appoggiati cioè ai piani opposti ab', ba'; ac', ca'; bc', cb' dell'esagono semplice sghembo giacente su F^6. [Ved. Bordiga]; e gli altri due? Se si potesse astrarre da questi.



In S_6 vi sono ∞^{39} tali F^6, e ∞^{20} quadriche; per una F^6 ne passano ∞¹: la condiz. d'appartenersi è dunque = 19; dunque su una quadrica vi sono ∞^{20} tali F^6, cioè esistono ∞^{20} sistemi ellitt. (3, 3) di rette. Ma ∞^{20} appunto si hanno dalle ∞^{25} varietà cubiche con 9 punti doppi; dunque tutti son dati da quelle var. cubiche.

singolari, mentre son soli 6. Dunque è rappres. come luogo di $a_0\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 3a_2\lambda + a_3 = 0$ dove le a_i son quadriche; l'inviluppo è:

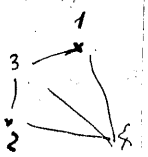
$$(a_0a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2)$$

che pare di 8° ord. ma si riduce al 6°. La curva inviluppo è $a_3 = \mu^3 a_0$, $a_2 = \mu^2 a_0$, $a_1 = -\mu a_0$

ossia $a_0^2a_3 - a_1^3 = 0$, $a_0a_2 - a_1^2 = 0$, $a_0a_3 - a_1a_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_1^2 \\ a_1 & a_2 & a_0a_3 \end{vmatrix} = 0$$

curva di 12° ordine. — La serie considerata ha comune un raggio con ciascun fascio di una certa coppia (corrisp. a 1 vert. e lato opposto tr. fondam.); ma se una quadrica passa per 1 e 2 manca dei term. in x_1^2, x_2^2 e se è tg. al piano 1



La F^6 di S_5 gen. 2 è rappres. da quartiche con 1 p. doppio D e 6 p. sempl. $P_1 \dots P_6$. Le cubiche per tutti quei p. fondam. danno su F^6 ∞^2 quartiche ellittiche normali ciascuna delle quali ha 2 p. com. con ognuna delle ∞^1 coniche corrisp. alle ∞^1 r. per D. Segue che gli ∞^2 fasci di S_4 che dagli ∞^2 S_3 contenenti quelle quartiche proiettano le coniche son proiettivi. La F^6 sta dunque

Sistemi di rette (3, 4)

F^7 di S_5. La sez. C^7 con un S_4 sta su ∞^2 quadriche se $p=3$, su ∞^1 quadriche se $p=2$, su 1 quadrica se $p=1$. Se ne trae, considerando due sez. lineari, che la F^7 sta su ∞^2 ~~—~~ ^{1} quadriche M_4^2 se $p=3$, ~~su una~~ se $p=2$ e su nessuna; in generale se $p=1$.

$p=3$. F^7 è la residua inters. di tre M_4^2 aventi comune un piano π; viceversa tale inters è sempre una F^7 con $p=3$. Il piano π è tale che ogni retta sua taglia F^7 in 2 pt. (come risulta da che la C^7 ha la retta residua per trisecante unica; quindi unico quel piano); quindi sez F^7 secondo una cubica γ, luogo dei punti di π in cui le tre M_4^2 hanno uno stesso S_3 tg. La projez. di F^7 da π su un piano è univoca ed i punti di γ si projettano in punti di una cubica. ~~da be co~~ Le sez. C^7 spaziali di F^7 si projettano in quartiche $p=3$ con 9 punti fondam. semplici posti su quella cubica e projez. di 9 rette di F^7 appoggiate a π cioè a γ. — La proj. di F^7 da una retta di π su S_3 sarebbe una F^4 con punto triplo.

$p=2$. La F^7 su M_4^2 sarà (3, 4), giacché se fosse (2, 5) sarebbe $p=1$. La projez. da due suoi punti su R_3 è una F^5 a sez. piane $p=2$, quindi rappresentabile (nel caso più generale ha una quartica doppia ellittica, ma pare che anche in tutti i casi particol. rimanga rappresentab.) sul piano con quartiche con 1 p. doppio e 7 punti semplici fissi. Dunque la F^7

Relaz. fra caratteri dei sist. di rette

Sistema di rette ord m. classe n, gen. p e tale che una data retta sia in un fascio con k coppie di 2. del sist. La proj. della F^{m+n} di S_5 ~~avrà una sup.~~ da una retta della M^2_4 sarà una sup. d'ord. $m+n$ con due p. multipli secondo m ed n e una curva doppia che ha quelli per multipli secondo $\binom{m}{2}$ ed $\binom{n}{2}$ e che in ogni piano per la loro congiung. ha ancora k p. Servendo che il genere di una sez. piana è p si ha:

$$k + p = (m-1)(n-1), \quad (+)$$

formola che risulta pure da una formola di Chasles (v. Loria germ. compl. tetr.) per la quadrica con su una curva proveniente da sist. ∞^2 M^2_4 con un S_4 tg.

Ne segue che l'ordine della sup. focale è $2(m+p-1)$ e la classe $2(n+p-1)$. — Ne segue che per $m=2$ essendo la sup. focale di 4° ord. sarà $p=1$.

(+) Risulta anche direttam. dalla rigata d'ord. $m+n$ con retta m-pla e curva doppia d'ord. $\frac{n(n-1)}{2} + k$ sicché

$$p = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - k$$

Sistemi $(m, 8-m)$

in part. $(3, 5)$

$p = 5$. F^8 è segata da due S_4 in C^4 con $p = 5$, inters. di ∞^2 quadr. Dunque F^8 è su ∞^2 M_4^2, ossia è l'inters. compl. di tre M_4^2 e viceversa. Il sist. di rette è $(4, 4)$ ed è l'inters di 2 compl. quadrat. qualunque

$p = 4$. F^8 è su ∞^1 M_4^2.

Sulle operazioni, sui loro prodotti e loro gruppi.

Definizione delle operazioni che si considerano, su un campo o corpo di enti, univoche. Esempi: Caso di un numero finito di oggetti, sostituzioni e loro notazione. Movimenti, trasformaz' univoche qualunque; anche solo una parte di essi. Trasformaz' di una variabile $x' = f(x)$ univoca; ecc. — Prodotto di due operazioni. ~~(Potenza) Associatività~~. Mancanza di commutatività in generale. Esempi: sostituz' lineari $\frac{ax+b}{cx+d}$ (determinante del prodotto) e casi partic', sostituz' di 4 oggetti e rappres' geometrica con le sovrapposizioni di un quadrato a se stesso. Prodotto di più operazioni. Associatività. (+) Potenza. Identità: non altera un prodotto; si rappresenta con 1. Operazioni cicliche. Operazioni inverse: loro notazione; loro prodotto $= 1$. L'inverso di un prodotto è il prodotto delle inverse coll'ordine scambiato; inversa di una potenza. $S^m S^n = S^{m+n}$. T Trasformata di T mediante S: si esprime

(+) È permesso di moltiplicare ambi i membri di un' uguaglianza per uno stesso fattore (da una stessa banda)

SI 27

con $S^{-1}TS = T_1$. Godo di proprietà simili a quelle di T: (gli elem.i uniti di T si trasformano in quelli di T_1; così se T è ciclica, anche T_1 sarà tale, poichè $S^{-1}T^mS = (T_1)^m$. Più in generale) il prodotto TU è trasformato da S in T_1U_1. Quindi se S trasforma T in T ed U in U, trasforma TU in se stesso. Due prodotti come TS, ST son trasformabili l'uno nell'altro (da T^{-1} p.e). La permutabilità di S, T equivale all'essere ognuna trasformata in se stessa dall'altra. Esempi: proiettività binarie permutabili ad un'invol. iperbolica; collineaz.i piane permutabili ad una data conica; ~~traslaz.i~~ e rotaz.i

Dei gruppi di operaz.i. Definizione (1) Esempi: le sostituz.i di n oggetti; movimenti, traslazioni, rotazioni, ecc.; sostituzioni lineari $\frac{ax+b}{cx+d}$, quelle di determinante ± 1; pag.3 lin.3 ... Sottogruppi di un dato: già negli esempi prec.i: Altri esempi: le operaz.i che mutano un ente in se; così le affinità, le collineaz.i che mutano in se una conica, le proj.tà binarie in cui 1, 2, 3, ... elem.i si scambiano fra loro, i movimenti che sovrappongono un poliedro regolare

(1) Se un gruppo è finito, tutte le sue operaz.i sono cicliche, e quindi con ogni operaz.ne vi è l'inversa, e vi è l'identità.

a se stesso. Le operaz.i di un gruppo permutabili ad una data. — Le operaz.i comuni a 2 gruppi formano (Prima dei sottogruppi) 1 gruppo. — Due operaz.i involutorie permutabili formano 1 gruppo col loro prodotto, pure involº, e coll'identità. esempi geometrici. —

Trasformando un gruppo mediante un'operaz. si ha un gruppo <u>simile</u>. Se è lo stesso, l'operaz. si dice permutabile al gruppo. Due gruppi permutabili; il loro prodotto è un gruppo.

Superficie di Kummer con trasformazioni proiettive eccezionali

~~Tipi che possono presentarsi~~

~~I (12)(34) , I_1 (1324) ; II (12345) ;~~

~~III (12)(34)(56), III_1 (123)(456) , III_2 (123456)~~

A_1 $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$, $x'_3 = x_4$, $x'_4 = x_5$, $x'_5 = x_1$

A_2 $x'_1 = x_3$, $x'_2 = x_4$, $x'_3 = x_5$, $x'_4 = x_1$, $x'_5 = x_2$

$A_3 = A_2^{-1}$ $x'_1 = x_4$, $x'_2 = x_5$, $x'_3 = x_1$, $x'_4 = x_2$, $x'_5 = x_3$

$A_4 = A_1^{-1}$ $x'_1 = x_5$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = x_2$, $x'_4 = x_3$, $x'_5 = x_4$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & x_6 \\ x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \rho & 1 & & & & \\ & \rho & 1 & & & \\ & & \rho & 1 & & \\ & & & \rho & 1 & \\ & & & & \rho & 1 \\ 1 & & & & & \rho \end{vmatrix} = (\rho+1)(\rho+\varepsilon)(\rho+\varepsilon^2)(\rho+\varepsilon^3)(\rho+\varepsilon^4)$$

$x_1 + \varepsilon x_2 = 0$, $x_2 + \varepsilon x_3 = 0$, $x_3 + \varepsilon x_4 = 0$, $x_4 + \varepsilon x_5 = 0$, $x_5 + \varepsilon x_1 = 0$

~~$\varepsilon^4 (\varepsilon^4, -\varepsilon^3, \varepsilon^2, -\varepsilon, 1)$~~

SI 28

$(12)(34)(56)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = S$, polarità

SC_1C_2; SC_3C_4 ; SC_5C_6 polarità. 32

Quelle 4 quadriche a 2 a 2 si tagliano in 4 quadrilateri, colle diagonali direttrici delle congruenze C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6. Hanno il tetraedro di queste per polare.

Si ha $SC_1S = C_2$, donde $SC_1 = C_2S$; ecc. Le 6 trasf. omogr. SC_i non sono involutorie ; bensì i loro quadrati $(SC_1)^2 = SC_1C_2S = C_1C_2$

Idem le omogr. $SC_1C_3 = C_2SC_3 = C_2C_4S$; $(SC_1C_3)^2 = SC_1C_3C_2C_4S =$
$= SC_5C_6S = C_5C_6$

Idem le 6 omogr. $SC_1C_2C_3 = SC_4C_5C_6$; il quadrato è $SC_1C_2C_3SC_1C_2C_3$
$= C_2C_1C_4C_1C_2C_3 = C_3C_4$

Invece le 4 omogr. $SC_1C_3C_5 = SC_2C_4C_6$ sono involutorie poichè $C_1C_3C_5 = C_2C_4C_6$ è trasformata in sè da S e quindi il prodotto è involutorio come S ed una tal quadrica $C_1C_3C_5$ hanno comune il tetraedro 12.34.56 polare, quelle omogr. sono le 4 omologie armoniche date da questo tetraedro.

$(12)(34)(56)$; $(13)(42)(56)$; $(14)(23)56$

Rimangono le 32 trasformaz. eccezionali precedenti. Inoltre altre 32 analoghe, da $(13)(42)(56)$, di cui noteremo solo

4 quadriche S', $S'C_1C_3$, $S'C_2C_4$, $S'C_5C_6$

4 omologie armoniche $S'C_1C_2C_5$, $S'C_3C_4C_5$, $S'C_1C_4C_5$, $S'C_2C_3C_5$

~~La S' trasformi S~~ da $(14)(23)56$ coi segni + è un'involuzione assiale cogli assi appoggiati alle direttrici di 56. 6 con due $-$ se ne ottengono altre 3. La 1ª sia $SS'-S'S$, che scambia dunque 1 e 4, 2 e 3, ma non muta 5, 6. Un'altra sarà $SS'C_5C_6$

I	$(12)(34)(56)$	tetraedroide[1]
II	$(12345)6$	
III	$(12)(34)56$	tetr.[2] : $(13)(24)(56)$ e $(14)(23)(56)$
IV	$(123)(456)$	tetr.[3]
V	(123456)	tetr.4
VI	$(1234)56$	tetr[6]

$(13)(24)56$

Se i p' fondam. sono tutti uniti $x'_i = a_i x_i$ muta
$\lambda \sum p_i x_i^2 + \mu \sum q_i x_i^2 = 0$ in $\lambda \sum p_i a_i^2 x_i^2 + \mu \sum q_i a_i^2 x_i^2 = 0$
che è la stessa se $p_i a_i^2 = l p_i + m q_i$, $q_i a_i^2 = l' p_i + m' q_i$
donde $\frac{p_i}{q_i} = \frac{l \frac{p_i}{q_i} + m}{l' \frac{p_i}{q_i} + m'}$, $z_i = \frac{l z_i + m}{l' z_i + m'}$, donde
$l' z_i^2 + (m' - l) z_i - m = 0$, donde $\begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_i^2 & z_i & 1 \end{vmatrix} = 0$
ossia due delle z_i cioè $\frac{p_i}{q_i}$ uguali fra loro. Non possono i p' fondamt. essere tutti uniti, a meno che $l' = m' - l = m = 0$
$p_i a_i^2 = l p_i$, $q_i a_i^2 = l q_i$, $a_i^2 = l$, $a_i = \pm k$
che sono le omologie fondam. e omogr. involutorie che ne derivano.

Allora le eqn. saranno $x_k = a_{k'} x'_{k'}$ che mutano $\sum p_k x_k^2$ in $\sum p_k a_k^2 x'^2_{k'}$ e dev'essere $p_k a_k^2 = l p_{k'} + m q_{k'}$
anzi supposto addirittura che $\sum p_k x_k^2$ sia doppia $p_k a_k^2 = l p_{k'}$
$a_k = \sqrt{\frac{l p_k}{p_k}}$ ma $\frac{p_{k'}}{p_k} = \pm \frac{q_{k'}}{q_k}$

Pag. XII lin. 2 leggasi $[x \epsilon] a$

" 1, Axiom. 3 ; si cancelli c. — Ax. 4 dopo a, b si aggiunga c.

" 10, Theor. 24, dopo aDb aggiungasi / .b

" 13, Theor. 9, leggasi $p/p' = q/q'$

Pag. 13 def. 2 uguagl. ragioni. Pare che converrebbe provare che se si verifica per x, anche per y.

7 Raggruppamenti di 6 elem.ti MM

di una forma semplice in 3 coppie di un'invol.

1° caso

Gli elem.ti A B C D E F diano due invol.i con una coppia comune, p.e AB, CE, DF ; AB, CF, DE.

Sarà applicando successivam.te le due invol.i

A B C D E F π B A E F C D π A B D C F E,

ossia A e B sono doppi per l'invol. CD, EF. Viceversa se questa condiz.e è verificata seguono da un noto teor., le due invol.i supposti.

2° caso

Abbiansi due invol.i senza coppie comuni, p.e

AD, BF, CE ; AE, BD, CF

Applicandole successivam.te si ha:

A B C D E F π D F E A C B π B C A E F D,

cioè (A B C)(D E F) sono due cicli di una stessa proiettività ciclica di 3° grado. Viceversa se questo accade e si chiamano M N gli elem.ti uniti (imag.i) di questa proiettività, il teor. già applicato nel 1° caso dà che

SI 29

MN è una coppia dell' invol. AD, BF (perchè nella projettività sono corrisp^i fra loro A e B, F e D), ed anche dell' invol. BF, CE, sicchè AD, BF e CE son coppie di una stessa invol.; analogam. si hanno le tre invol.

(1) AD, BF, CE ; (2) AE, BD, CF; (3) AF, BE, CD, delle quali si saprà inoltre che (hanno comune una coppia, MN, e che) due hanno per conseguenza la rimanente. Ciò risulta anche subito osservando che una qualunque di esse trasforma le rimanenti l'una nell'altra.

Se nel 1° caso si vuol aggiungere l'ipotesi di una terza involuz., questa non può contenere la coppia AB comune alle due involuz^i date, nè può aver a comune con ciascuna di queste una delle rimanenti due coppie (altrimenti avrebbe 2 coppie con un elem. comune); dunque con una almeno delle due involuz^i date non avrà alcuna coppia comune. Sarà dunque quello che così si otterrà un caso particolare non solo del 1° ma anche del 2° caso. Basta quindi introdurre nel 2° caso una 4ª involuz. Ficco-

me le sole combinaz.i binarie dei 6 elem.i contenenti A, o B, o C, che non dànno coppie nè di (1), nè di (2), nè di (3) sono AB, BC, CA, è chiaro che la 4ª involuz. da introdursi dovrà necessariamente aver a comune con quelle tre una coppia contenente A, o B, o C; e più precisamente se la 4ª involuz. non contiene alcuna delle coppie AB, BC, CA, essa avrà una coppia comune con ciascuna delle prime 3 involuz.; e se invece essa contiene una delle coppie AB, BC, CA essa avrà comune una coppia con una sola delle prime 3 involuz. L'un caso si ha p.e. prendendo per 4ª involuz. la AE, BF, CD e sarà il 3° caso; l'altro che sarà il 4°, prendendo la

3° caso.

Oltre le (1), (2), (3), vale a dire la projettività ciclica di 3° grado (ABC)(DEF), si ha l'involuz.e

(x) AE, BF, CD,

Eseguendo successivam.e quella projettiv.à e quest'involuz. si ha AFCEBD π BDAFCE π FCEBDA (.)

ossia (AFCEBD) è un ciclo di una proj.à ciclica di 6° grado. Viceversa se i 6 elem.i dati formano un tal ciclo

ripetendo tre volte la proj. ciclica di 6° grado si avrà A F C E B D π E B D A F C, cioè l'invol. AE, BF, CD (che avrà comuni con quella proj^a gli elem^i uniti (imag)), e ripetendola ancor una volta si avrà la proj. ciclica di 3° grado (A B C)(D E F) che ha per conseguenza le invol^i (1), (2), (3).

Nè oltre a queste involuz^i se ne può avere un'altra, che, come la (X), abbia una coppia comune con ciascuna delle (1), (2), (3), vale a dire una delle due

AD, BE, CF ; AF, BD, CE,

giacchè essa con la (X) produrrebbe (l'altra delle due e) la projettività ciclica di 3° grado (ABC)(DFE), che è incompatibile colla (ABC)(DEF).

4° caso.

Oltre le (1), (2), (3) si ha l'involuz^e:

(4) AD, BC, EF.

Questa è trasformata dalla (3) e dalla (2) risp. nelle

(5) AB, DE, CF ; (6) AC, BE, DF.

La (1) con la (4) provano che ~~AD separano~~ la coppia AD è armonica a BE, CF ; la (2) e la (5) che

CF è armonica ad AD e BE ; la (3) e la (6) che BE è armonica ad AD e CF. E viceversa se le tre coppie AD, BE, CF di elem' sono mutuamente armoniche, hanno luogo le sei involuz' (1), (2) ... (6).

E non vi può essere una 7ª involuzione, p.e.

AE, BF, CD.

Basta dimostrare ciò prendendo per AD e BE due coppie di elem. reali mutuamente armoniche ; allora CF sono imaginari coniugati. Quindi verificandosi quella 7ª invol. si verificherebbe pure la seguente che se ne deduce scambiando C, F : AE, BC, DF,

e queste due sarebbero incompatibili con la (2), avendo tutte tre la coppia AE comune.

Involuzioni a cui possono dar luogo 5 elementi.

Siano 1 2 3 4 5 i cinque elementi. Due due involuzioni aventi comune un elemento doppio non ne segue un' altra; così le 1, 23, 45 e 1, 24, 35 sono tali che ciascuna trasforma l'altra in se stessa. Ma sono impossibili insieme se i cinque elementi sono distinti.

Se poi due involuzioni hanno elementi doppi diversi, allora possono presentarsi due casi: 1° esse hanno comune una coppia, e dànno luogo ad una terza involuzione contenente pure quella coppia. Così delle tre involuzioni

1, 23, 45 ; 2, 31, 45 ; 3, 12, 45

una qualunque è conseguenza delle altre due. In tal caso la coppia comune (45) è l'Hessiana degli altri tre elementi; l'imagine su un cerchio è data da un triangolo regolare coi due punti ciclici. — 2° le due involuzioni non hanno comune alcuna coppia; allora esse dànno luogo ad altre tre involuzioni. Così delle 5 involuzioni

1, 25, 34 ; 2, 13, 45 ; 3, 24, 15 ; 4, 12, 35 ; 5, 14, 23

tre qualunque sono conseguenza delle rimanenti due; i cinque elementi formano allora un gruppo ciclico, cioè si possono rappresentare su un cerchio con un pentagono regolare (12345).

Cenni sulla geometria della retta

La $z_1 z_{34} + \dots = 0$ mostra che le rette di S_3 sono i punti di una M_4^2 non degenere R. La condizione d'incidenza per due rette è reciprocità rispetto ad R: onde segue che le rette incidenti ad una data dànno i punti di un cono M_3^2 in cui R è tagliata da un iperpiano tangente. Se in un punto di questo cono si considera ancora l'iperpiano tangente ad R, l'intersezione di R coi due iperpiani sarà una M_2^2 con 2 punti doppi, una coppia di piani: che corrispondono risp. ad una stella di rette ed un piano rigato. Così si hanno in R due sistemi ∞^3 di piani: relazioni fra essi.

Definizione di complessi e congruenze di rette. Facciamo subito esempi.*) Complessi speciali di tg^i e sec^i di superficie e curve. Ordine del complesso. Ordine, classe e rango, genere di una congruenza. Fuochi e piani focali di un raggio: ~~si osservi dal primo che la rigata della congruenza appoggiata ad una retta qualunque~~ si considera la superficie che rappresenta la congruenza su R; il piano tangente in un punto segherà R secondo due rette, onde due fasci di rette tangenti alla ~~rigata~~ congruenza in una data retta di questa. Le rette della congruenza sottotangenti alla superficie luogo dei fuochi e dualmente; alla 1ª superf. è tg. in un fuoco il piano focale che corrisponde all'altro fuoco, dunque un piano tg. della 2ª sup., e viceversa; le 2 sup. focali hanno gli stessi piani tg^i e però coincidono. Ordine e classe della congruenza focale: se la congruenza è $(m^{\text{ord.}}, n^{\text{cl.}}, p^{\text{gr.}})$, l'ord. della superf. focale sarà $(g'_m \dots)$ $2m + 2p - 2$; la classe $2n + 2p - 2$, onde la differenza tra ordine e classe $2(m-n)$ (Klein). — Complesso: si rappresenta

*) Compl° lineare: speciale ♦ Congruenza lineare: direttrici; speciale. Schiera di rette.

SI 30

con un'equazione. La M_3^{2n} che lo rappresenta ha in un suo punto in S_3 tangente onde congruenza lineare di tangenti al complesso in una retta. La quale può essere specializzata doppiam., cioè quell'S_3 tg. ad R lungo una ∞^2 $\left[\frac{\partial F}{\partial z_{12}} \frac{\partial F}{\partial z_{34}} + \ldots = 0\right]$, e allora si dice che la 2ª è singolare pel complesso. La congruenza singolare è intersez. con un compl. d'ord. $2(n-1)$. In ogni retta singolare si ha un punto ed un piano singolare: superficie singolare [d'ordine $2n(n-1)^2$]. — Che cosa si può dire per le rigate di analogo a compl. e congr., rispetto ai fasci di rette tangenti? La curva immagine su R non ha in un punto generico per tg. una 2ª che giaccia in R: quando l'ha si hanno per la rigata le generatrici cuspidali (caso delle sviluppabili). Ma ve in luogo delle rette tg. alla curva si considerano piani tg. S_3 S_4 osculatori si hanno schiere rigate, congr. lineari, compl. lineari osculat., cioè anche per falde singolari! Dal fatto che C^n è in S_n seguono proposizioni sulle rigate di 3°, 4° e 5° grado (in unione al teor. di Clifford).

La geometria proiettiva di S_3, rappresentata su R. È chiaro che collineaz. e reciproc. di S_3 dànno le trasf. collineari di 1ª e 2ª sp. di R in sè. In particol. un sistema nullo di S_3 vien rappres. da un'omologia armonica di R*). Di qui: complessi lineari involutori o armonici; gruppo determinato da 6 sistemi nulli mutuam. involutori. Coordin. di Klein delle rette. Sistemi lineari di compl. lineari mutuam. involut.

Complesso quadratico, come $M_3^{2.2}$ in S_5. Le ∞M_4^2 dànno ∞ generazioni del complesso, ciascuna con 2 sistemi ∞^3 di schiere di rette. I 6 coni del fascio dànno 6 complessi lineari fondamentali, sistemi nulli che trasformano il complesso

*) Le collineaz. involutorie di R sono: 1° omologie (= sist. nulli), 2° collineaz. con assi un S_2 e un S_3 (= collineaz. assiali), 3° collineaz. con 2 S_2 (secondo che questi sono fra loro polari o che stanno in R e quindi sono autopolari si ha: polarità risp. a quadrica, omologia armonica)

in se. Punti e piani singolari. Per una retta qualunque se ne hanno 4 e 4, come appare dalla corrispondenza (2, 2) data dai fasci di rette tangenti al complesso contenenti la retta data; donde risulta anche la proiettività fra le 2 quaterne (Klein). Onde le rette tangenti alle superficie dei punti singolari sono anche le rette tang.ti all'inviluppo dei piani singolari = superficie singolare di 4° ord. e 4ª cl. Una retta del complesso fa parte di 4 fasci di rette del complesso. Se la retta è singolare (v. sopra, quanto s'è detto in generale delle rette singolari dei complessi) S, corrisp.te al p.° sing. S e piano sing. σ, su S si hanno ancora 2 p.i sing.i A A' e per S 2 piani sing.i β β', sicchè S fa parte dei 4 fasci di rette Sβ, Sβ', Aσ, A'σ. Appare così che in S coincidono 2 p.i d'incontro colla superf. singolare F e in σ 2 piani sing.i: le rette singolari son tg.e a F nei p.i e coi p.i sing.i corrisp.i. — Sia schiera determinata da R e da una M_2 e Φ sega R secondo una schiera di complessi quadratici. Un piano di R tg. a Φ_4 sarà tg. a tutte la schiera, perchè il p.° iperpiano tg. a Φ in P a R è pur tg. ad R, e quindi a tutta la schiera = ciò prova che i p.i e piani singolari son gli stessi per tutti quei compl.i quadratici. Quell'iperp.° sarà tg. alle varie forme in p.i P, P'... di una retta di quel tal piano, e la retta doppia di contatto viene punteggiata proiettivamente alla schiera = in particolare in questa si hanno 6 iperpiani doppi. Segue che le bitg.e di F si dividono in 6 congruenze giacenti risp. nei 6 compl.i fondam.i; le 6 bitg.e che fan parte di un fascio qual di tg.i rimangon proj.e a se mutando il fascio. Tenno sui complessi quadratici particolari = complesso tetraedrale.

5130