urgente

Le superficie degl'iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali

Nota 2ª del Socio nazion. resid. Corrado Segre

(presentata nell'adunanza del 25 giugno 1922)

Le note da mettere a posto, a piè di pag., sono riunite nelle pag. numerate I e II.
Si lasci sempre un rigo d'intervallo fra due §§.
I numeri che ho messo in cifre, restino in cifre; non si mutino in lettere.
Dove ho scritto n° resti così abbreviato; non si muti in numero.

1. Al n. 9 della Nota 1ª su questo argomento (1), volendo escludere che su una superficie di S_5 appartenente alle specie isolate le ∞^2 curve spaziali C possano essere del 5° ordine e genere 2 (e quindi con 2 punti di mutua intersezione, necessariamente variabili), e tali inoltre che per 2 punti generici ne passino due; ho fatto, nella 1ª parte della pag. 152, un breve ragionamento, che è errato (2).

Lo scopo di questa 2ª Nota è di dimostrare in modo rigoroso l'impossibilità di quel caso, sì da rendere sicura in ogni parte la conclusione a cui nella Nota 1ª (pag. 157) ero giunto.

Supporrò che esista una superficie F, colle proprietà anzi dette; e proverò che l'ipotesi è assurda.

È subito visto che F sarà una delle così dette superficie di Jacobi, i cui punti si posson porre in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di una curva irriducibile di genere 2. (3) Si osservi da prima che il sistema ∞^1 delle C che passano per un punto P fissato in modo generico su F, — sistema che d'or innanzi indicherò con $\{P\}$, — quando lo si seghi con una generica di quelle stesse curve, risulta riferito biunivocamente ai punti di essa; ed è quindi del genere 2. Sono di conseguenza riferite biunivocamente due C generiche di $\{P\}$: che sono poi due C generiche della ∞^2. Sicchè le ∞^2 curve C e gli ∞^2 sistemi $\{P\}$ sono, generalmente, di genere 2 e cogli stessi moduli.

Se ora fissiamo un tal sistema $\{P\}$, e riguardiamo ogni punto M di F come rappresentato dalla coppia delle C di $\{P\}$ che si tagliano in esso, risulta l'insieme dei punti M riferito biunivocamente alle

coppie di elementi dell'ente ∞^1 $\{P\}$ di genere 2: come s'era asserito.

2. La superficie F non contiene alcuna curva razionale (e quindi, in particolare, nessuna curva eccezionale).

Sia, in fatti, D una curva razionale di F (irriducibile, dunque). Le ∞^2 C generiche la incontreranno in un numero fisso m di punti, tutti variabili. Distinguiamo due casi, secondo che $m>0$, oppure $m=0$.

1° caso. Sia $m>0$. Il sistema $\{P\}$ delle C passanti per un punto generico P segna su D un sistema ∞^1 di gruppi di m punti, tale che per un punto generico di D passan 2 tali gruppi; od anche uno solo, se $m=1$, o se D è contenuta in una di quelle C. In ogni modo, essendo D razionale, segue da due proposizioni note che quel sistema di gruppi di punti è razionale. D'altra parte, se fosse $m>1$, il sistema sarebbe in corrispondenza biunivoca con $\{P\}$: mentre questo è di genere 2. Sarà dunque $m=1$. (4)

Ne deriva che una C per 2 punti di D dovrà aver comuni con questa curva infiniti punti: ossia conterrà D come parte. Non può quella C ridursi alla sola D: altrimenti, siccome due C s'incontrano in generale in 2 punti, dovrebbe l'unico punto comune a D e ad una C generica essere punto di contatto fra queste; avremmo quindi $m=2$, e non $m=1$. Vi è dunque una C spezzata in D e una curva ulteriore Δ. Ogni C generica, incontrando questa $D+\Delta$ in 2 punti, e D in un punto, incontrerà pure Δ in un punto. Le C passanti per un punto fissato su Δ (che sono quindi delle C generiche) saran riferite biunivocamente alle loro tracce su D; e quindi formeranno un sistema razionale. Segandolo con una di quelle stesse C, si dedurrebbe che anche questa è razionale: mentre si tratta, come ho detto, di un[illegible]

Così resta escluso il caso $m>0$ (per qualsi[illegible]

3. — 2° caso. Se $m=0$, le ∞^1 C che pass[illegible] D dovranno contenere questa curva, come parte. [illegible]

linee Δ. Per un punto generico P passerà una (almeno) di queste. Le C di $\{P\}$, dovendo incontrare la $D+\Delta$ in 2 punti, e non incontrando D, segheranno Δ in 2 punti, uno dei quali è P; l'altro variabile al variar della C, risulta in corrispondenza biunivoca colle C di $\{P\}$. Dunque la Δ è di genere 2. — Se però la Δ passante per P fosse ulteriormente riducibile, il ragionamento fatto si applichi a quella parte ~~di Δ~~ irriducibile di Δ che è ~~incontrata dalle C di $\{P\}$ in un punto variabile, diverso da P. Risulta~~ descritta dal detto punto d'intersezione variabile di Δ colle curve di $\{P\}$. Risulta ancora che quella parte di Δ sarà di genere 2.

Ora qui occorre invocare il fatto che sulla nostra F dello S_5 le C sono del 5° ordine. La D dev'essere parte di ∞^1 tali curve, in modo che nei resti stia sempre una curva irriducibile di genere 2, incontrata in 1 punto, od in 2, da ogni C. Tale curva potrà solo essere una quartica piana variabile. La D sarà una retta, e le Δ saranno quartiche piane incontrate in 2 punti dalle C.

Gli ∞^1 piani delle Δ saranno dunque incidenti in rette agli ∞^2 S_3 delle C. Ora questi S_3 non passan tutti per uno stesso punto. Se ne prendiamo 4 generici, e quindi tali che a 3 a 3 non abbiano un punto comune, gli ∞^1 piani che sono ad essi incidenti in rette risultano intersezioni d'iperpiani omologhi di 4 fasci projettivi: sicchè quei piani formano una V_3^3. F sta in una tale V_3: non è dunque delle <u>specie isolate</u>, come ~~[illegible]~~ abbiam supposto.

È così stabilita la proposizione enunciata al principio del n. 2.

4. Converrà ancora osservare che <u>F è normale in S_5</u>.

Invero, se così non fosse, essa sarebbe projezione di una superficie Φ immersa in S_6, sulla quale le C^5 di F avrebbero come imagini ancora ∞^2 C^5, di genere 2, e quindi appartenenti a spazi ordinari. Poichè queste curve s'incontrano mutuamente in 2 punti, i loro S_3 si taglieranno a due a due secondo rette. Ne deriva facilmente — per qualche lettore la cosa sarà forse più ovvia sotto forma duale

in S_6, cioè per piani di S_6 che siano incidenti a due a due — che, non potendo gli S_3 stare tutti in un S_5, gli spazi stessi dovranno passare per un punto fisso, oppure incontrare un S_3 fisso secondo piani. Nel 1° caso, projettando Φ dal punto fisso su un S_5, si otterrebbe qui una superficie con ∞^2 curve piane irriducibili: dunque coniche. Queste dovrebbero essere projezioni delle C^5 di Φ: il che esige, fra altro, che queste curve passino tutte per un punto fisso, ciò che non è. Ove invece gli ∞^2 S_3 di S_6 incontrassero un determinato S_3 secondo piani, sicchè le loro mutue intersezioni fossero rette di quello spazio, lo stesso fatto si avrebbe, con projezione, per gli S_3 delle ∞^2 C di F. Su ognuno di questi S_3 il regolo focale (Nota 1ª, n. 3) starebbe in un S_3 fisso: e quindi tutta F giacerebbe quivi!

5. Rivolgiamo ora la nostra attenzione alle curve L, residue intersezioni di F cogli S_4 che passan per le C.

Per l'S_3 di una C passa un fascio d'ijerpiani, che segna su F un fascio (lineare) di curve L. È questo il sistema lineare completo determinato da una L. In fatti, per essere F normale (n. 4), cioè completo il sistema lineare delle sue sezioni ijerpiane; la C che, rispetto a questo sistema, è resto della L, sarà resto di tutte le L di quel sistema completo: il quale dunque sarà dato appunto dagl'ijerpiani passanti per l'S_3 di C. — La stessa considerazione fa vedere che le L appartengono agli S_4: se no, il sistema lineare completo determinato da una C sarebbe di dimensione > 0, il che non è (com'è noto, e come ritroveremo al n. 7). — Ne segue, in particolare che le L sono ∞^3.

Segando una C con un ijerpiano passante per un'altra C, e quindi anche per una L, dal fatto che le intersezioni han da essere 5, e che 2 si hanno già nei punti comuni alle due C, si deduce che: una C e una L si tagliano in 3 punti.

6. Si tratti, in particolare, di una C e una L poste in uno stesso S_4: dico che i loro 3 punti d'intersezione sono allineati.

In fatti ognuno di quei punti, come punto doppio della sezione fatta dall'S_4 su F, sarà punto di contatto di quell'iperpiano colla superficie. Gli ∞^3 iperpiani analoghi, ossia passanti per le ∞^2 C, sono dunque tritangenti a F.

Ora quando in S_5 ∞^3 iperpiani son tangenti a una superficie F, le loro <u>rette caratteristiche</u> [5] passano per i rispettivi punti di contatto con F. La cosa è presso che evidente per via geometrica. Analiticamente: si può determinare un iperpiano ξ del sistema con 3 parametri u, v, w, scegliendo pei primi due i parametri che su F servono a determinare il punto x di contatto con ξ. Si ha allora, per ipotesi, con le notazioni solite: ~~(pag. 5 della Nota ora citata)~~:

(1) $$(\xi, x) = 0, \quad (\xi, x_u) = 0, \quad (\xi, x_v) = 0.$$

D'altra parte la retta caratteristica di ξ è l'intersezione ~~dey~~ di ξ cogl'iperpiani ξ_u, ξ_v, ξ_w. Si tratta dunque di far vedere che

(2) $$(\xi_u, x) = 0, \quad (\xi_v, x) = 0, \quad (\xi_w, x) = 0.$$

Ciò risulta subito derivando, rispetto a $\underline{u}$, o $\underline{v}$, o $\underline{w}$, la prima delle (1), e tenendo conto delle altre due e del fatto che x non dipende da $\underline{w}$.

Nel caso nostro, gli ∞^3 iperpiani essendo tritangenti a F, i 3 punti di contatto di ognuno di essi saranno sulla retta caratteristica.

Così le intersezioni di una C col fascio delle L residue, cioè giacenti negl'iperpiani per C, sono le terne di punti di questa curva situate sulle sue trisecanti (rette del regolo incidente al regolo focale).

7. Nella Memoria citata in [3] s'incontra, di passaggio, a pag. 317, questo fatto: Su una superficie di Jacobi, priva di linee eccezionali, se un sistema lineare completo è ∞^r, di grado n e genere x, si ha [6]:

(3) $$x = r + 2, \qquad n = 2r + 2$$

Ad esempio per una curva di genere 2, come son le C, non può essere $r > 0$.

Applichiamo le (3) alle nostre curve L, fondandoci sull'assenza di curve eccezionali dalla particolare superficie di Jacobi F (n. 2), e sull'essere per le L (n. 5) $r = 1$. Ne deduciamo che le L sono in generale di genere 3, e si tagliano mutuamente in 4 punti. — Segando una L coll'iperpiano di un'altra L e di una C, ne segue che le L sono d'ordine $4 + 3 = 7$ (sicchè F è d'ordine $7 + 5 = 12$).

Se consideriamo le L di uno stesso fascio lineare, otteniamo che questo avrà 4 punti base, nell'S_3 della C di cui quelle L sono residue. Sono i punti in cui questo S_3 incontra F, all'infuori dei punti della C. Le L stesse, giacendo in S_4 passanti per quell'S_3, segano questo spazio in 7 punti: cioè nei 4 punti fissi nominati, e nei 3 punti variabili allineati (n. 6) d'incontro colla C.

8. Non può spezzarsi una C, nè una L. Perchè una C^5 spezzata avrebbe una componente del 1° o del 2° ordine: ciò che è escluso dal teorema del n. 2. Similmente se una L si spezzasse, poichè essa è incontrata dalle C generiche in 3 punti, vi sarebbe una sua parte irriducibile Λ incontrata dalle C generiche in un sol punto, o in nessuno; onde Λ starebbe in una C condotta per 2 suoi punti: vale a dire (essendo la C irriducibile) coinciderebbe con questa C. La rimanente parte di L^7 sarebbe di nuovo del 2° ordine!

Di qui tragghiamo che non può uno dei 4 punti base di un fascio lineare di L andar a cadere sulla C residua. Se no, la L del fascio che passa per un punto di C, tale da non stare con quello in una medesima trisecante di C, avrebbe comuni con questa curva 4 punti; e quindi la conterrebbe. —

Avvertiamo pure che F non può avere una linea doppia: perchè ~~una sezione iperpiana di F del tipo C + L ha solo 3 punti doppi~~ in generale; quindi un'eventuale linea doppia di F sarà d'ordine ≤ 3. Ma del 1° o del 2° ordine non può essere, sempre pel n. 2; nè può essere del 3°, se no, su essa starebbero tutte le terne ora considerate di punti d'incontro di una C e una L residue ~~mentre tali terne descrivono completamente le C, e quindi F~~.

Le tracce di una tal linea sull'iperpiano di una sezione del tipo C + L sarebbero fra i 3 punti doppi di questa sezione; mentre invece questi 3 punti descrivono completamente F.

9. Dal n. 7 la superficie F ipotetica era riuscita molto precisata. Dobbiamo dimostrare che essa non esiste.

Per giungere a ciò, considereremo le sue trisecanti: e più particolarmente quelle che escono da un suo punto generico.

Premettiamo che se una retta g è trisecante di F, essa starà nell'S_3 di una delle C che passano per 2 dei tre punti d'appoggio di g su F. Questo S_3 sega F, oltre che nella C, in 4 punti (n. 7). La g avrà il suo 3° punto d'appoggio, o sulla C ancora, o in uno di quei 4 punti. Nel 2° caso sarà una delle corde tirate alla C da questi punti: e in questo modo si ottengono solo ∞^2 trisecanti di F, negli ∞^2 S_3 delle C. Restano ∞^3 trisecanti di F, date dalle ∞^3 trisecanti delle C. Naturalmente non è escluso che questa triplice infinità contenga la doppia infinità precedente. Ma quel che risulta da questa considerazione, e che ci basta, è il fatto che le trisecanti generiche di F son le trisecanti delle C.

Per un punto P di F passa un cono di trisecanti della superficie, costituito dalle trisecanti delle ∞^1 C uscenti da P. Non possiamo escludere che per P passi anche qualche altra trisecante di F: ma, se mai, saranno in numero finito, in causa dell'osservazione precedente. Tali trisecanti non saran considerate nel parlare del cono di trisecanti.

Ogni generatrice di questo cono è trisecante per una sola C del sistema $\{P\}$: perchè due C non possono avere 3 punti in comune. Poichè il sistema $\{P\}$ è una ∞^1 del genere 2, sarà dunque di genere 2 anche quel cono. Ne segue che l'ordine del cono è ≥ 4. Ma nemmeno può essere 4: se no, il cono starebbe in un S_3; e i punti d'appoggio variabili delle sue generatrici su F formerebbero una curva di S_3. Di tali curve spaziali su F si avrebbero ∞^2, una per ogni punto P. Esse, incontrando le generatrici del cono di 4° ordine in 2 punti variabili, sarebbero dell'8° ordine almeno: il che non può accadere per una superficie delle specie isolate.

Possiamo enunciare quest'osservazione così: per un punto generico di F passano almeno 5 trisecanti di F giacenti in un iperpiano

~~generica~~ per P.

Ora faremo un'altra considerazione, che ci porterà ad un risultato in contrasto con questo.

10. Scegliamo cioè come iperpiano uscente da P, col quale seghiamo F, quello che unisce P all'S_3 di una C non passante per quel punto, e che quindi ~~taglia~~ ulteriormente F in una L uscente da P. Le trisecanti di F passanti per P e giacenti in quest'iperpiano risulteranno essere al più 4: donde l'assurdo che cercavamo.

Quelle trisecanti di F, ossia della curva composta C+L, non possono incontrare in 2 punti la C, perchè P non sta nello spazio di questa curva. Sono dunque: o trisecanti di L, o corde di L appoggiate a C.

Quanto alle trisecanti di L, non può per un punto generico di questa passarne più di una. Suppongasi infatti che pel punto P ne passino due (almeno) x, y. Projettando sopra un piano la L, che è del 7° ordine dalla x, la projezione non sarà biunivoca: se no, darebbe una quartica con punto doppio nella projezione di y, dunque del genere 2. Ne deriva che le coppie della g_2^1 segnata su L dagli S_3, che (entro l'S_4 di L) passano pel piano xy, sono in piani per x; e similmente saranno in piani per y: sono dunque in rette passanti pel punto P (cioè P è vertice di un cono ~~di~~ di trisecanti della L: considerazione che ci occorrerà di nuovo al n° seguente). — Se per ogni punto di L passassero due trisecanti di questa curva, ne verrebbe che le coppie della g_2^1 (la quale non può variare) sarebbero allineate con ogni punto di L!

7 e di genere 3,

Dunque: per un punto generico della L passa al più una trisecante di questa.

Per determinare poi quante corde di L passano per P, le quali si appoggino a C, visto che ~~Nelle nostre ipotesi~~ dovrebb'esservi sempre un numero finito > 0 di tali rette, facciamo andare P in uno di quei 4 punti d'incontro di L coll'S_3 di C, che non stanno su C: e sia a. Per questa particolare posizione di P soddisfano alle condizioni imposte le 3 rette che congiungono a rispettivamente ai

F (per le osservazioni precedenti e pel n. 9)

3 punti d'intersezione di C ed L. (7) Altre soluzioni non potrebbero aversi che fra le congiungenti di a con un altro dei 4 punti prima nominati di L: e sia b. Ma bisognerebbe allora che la retta ab riuscisse incidente a C. Se farò vedere che, per una C generica, non può presentarsi questo fatto, resterà stabilito che per un punto conveniente di una L, entro l'S_4 di questa, passano al più 1+3 trisecanti di F: e così sarà raggiunto lo scopo propostoci al principio di questo n°.

11. Supponiamo dunque che per ogni C accada che i 4 punti base del fascio delle sue L residue (punti d'incontro, fuori di C, di queste L colla spazio di C) presentino la particolarità che la retta congiungente di due di essi, a e b, incontri C. Sia k il punto d'incontro.

Nel detto fascio di curve L ve ne sarà una passante per k. Per questa particolare L, essendo k uno dei suoi punti d'incontro con C, gli altri due k_1, k_2 saranno allineati con k (n.6). La L ha così due trisecanti uscenti da uno stesso punto k. Ne deriva che i punti di L sono a coppie allineati con k. Basta applicare di nuovo la considerazione fatta al n.10, quando s'è supposto che per un punto di L passino due trisecanti x, y: solo avvertendo che ora la L è particolare, sicchè, pur senza spezzarsi (n.8), potrebbe avere dei punti doppi che ne abbassino il genere; ma la considerazione citata si applica ugualmente. (8) Sarà dunque k il vertice di un cono che projetta doppiamente L^7, e che quindi risulta del 3° ordine: cono di trisecanti di F.

Ora se la C si prende negli ∞^2 modi possibili, i punti k che così si otterranno saran pure ∞^2, cioè tutti i punti di F. Se no, un punto di F che sia punto k per una C dovrebbe esser tale per infinite, e quindi per le infinite particolari curve L ottenute dalle C nel modo esposto. Quel punto sarebbe ~~dunque~~ vertice di ∞ coni di trisecanti di F; starebbe su ∞^2 trisecanti, e quindi su ∞^2 curve C, cioè su tutte le C: assurdo.

Dunque ~~[redacted]~~ ogni punto di F, come punto k,

(si volti)

sarà vertice di un cono di trisecanti di F del 3° ordine: contrariamente al n. 9.

Rimane così escluso che possa avvenire per ogni C il fatto speciale (~~di~~ incidenza di una retta ab colla C) che alla fine del n° precedente si offriva alla nostra considerazione.

Seguito da pag 9

da mettere a posto, a più sempre un rigo d'intervallo
si che ho messo in cifre, resi scritto n° resti così affrivi

la conclusione a cui nella Nota 1ª (pag. 157) ero giunto.

~~Ch.~~

Supporrò che esista una superficie F, colle proprietà anzi dette; e proverò che l'ipotesi è assurda.

È subito visto che F sarà una delle così dette superficie di Jacobi, i cui punti si posson porre in corrispondenza biunivoca colle coppie di punti di una curva irriducibile di genere 2. [3] Si osservi

inserire a pag 1

~~Ch.~~

(a capo) La dimostrazione apparirà un po' lunga, e probabilmente sostituibile con altra più breve. Ciò nondimeno la pubblico tal quale, desiderando di non ritardare più oltre a colmare la detta lacuna. —

Note, da mettere a piè delle pag.e risp.e, (numerate come sono ora)

(1) In questi Atti, vol. 56, 1921, pag. 143–157.

(2) Non avevo pensato, nello scrivere quelle righe, alle superficie di Jacobi, che contraddicono appunto a quanto ivi affermavo! Ciò mi fece notare il Prof. A. Terracini.

Pag. sig.

(3) Cfr. il n. 22 (pag. 308) del Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques di F. Enriques e F. Severi, Acta mathematica t. 32 (1909) pag. 283–392.

(4) Cfr. il n. 16 (pag. 119) della Nota di M. de Franchis: Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica, Rendic. Circ. matem.o di Palermo, t. 17 (1903), pag. 104–121.

(5) V. i miei Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi, Rendic. Circ. matem.o di Palermo, t. 30 $(1910)_2$, pag. 87–121: al n. 16.

(6) Come mi fa osservare il Prof. Severi, la cosa risulta subito, senza basarsi sulle ricerche analitiche che là son citate. Sulla superficie di Jacobi si sa che è $p_a = -1$, $p_g = 1$; la curva canonica è d'ordine zero. Se mancano le curve eccezionali, ogni sistema lineare sarà perciò aggiunto di se stesso. Il numero $2\pi - 2 - n$ rappresenta il numero delle intersezioni di una curva del dato sistema colla curva canonica, sicchè $n = 2\pi - 2$. D'altra parte il sistema aggiunto di quello essendo (com'è pur noto) regolare, si avrà $r = n - \pi + p_a + 1 = n - \pi = \pi - 2$. Così le (3) son dimostrate.

(7) Si badi che esse non incontrano altrove C; ossia non sono fra le corde di C passanti per $\underline{a}$: perchè si può sempre supporre che la L sia, nel fascio delle residue di C, diversa da quelle che passano pei punti d'appoggio di quelle corde. — In conseguenza quelle 3 soluzioni del problema attuale non son da considerare come multiple. In fatti, quando P è un punto generico mobile sulla L, le corde di L passanti per P e appoggiate a C si posson riguardare come generatrici comuni ai due coni che da P projettano L e C. Se P prende la posizione particolare considerata $\underline{a}$, e la corda diventa

una delle 3 rette su nominate, essa è generatrice semplice dei due coni, e questi non risultano tangenti lungo essa.

(8) Per maggior cautela rileviamo a parte il caso che un punto doppio di L venisse a cadere proprio su una delle rette x, y, che ora sono kab, kk_1k_2. In k non può essere: altrimenti, dalla retta kab la L, che si abbasserebbe al genere 2, verrebbe projettata su un piano secondo una cubica. Se poi la L avesse un punto doppio in k_1, con cui di conseguenza coinciderebbe k_2; sicchè la retta kk_1 sarebbe tangente in k_1 alla C; le due tangenti alla L in quel punto starebbero con questa retta in un piano: il piano tangente a F in k_1 (che è in generale un punto semplice di F, poichè F non ha una linea doppia: n. 8). Quindi, projettando su un piano dalla trisecante kab la L di genere 2, di nuovo, come al n. 10, la projezione non potrebbe essere biunivoca: se no, darebbe una quartica con tacnodo nella projezione di k_1, ossia una curva di genere 1; e lo stesso varrebbe per la projezione dalla retta kk_1. Dunque anche in questo caso si applicherebbe il citato ragionamento del n. 10.

Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.

Nota I del Socio C. Segre.

1. Data ~~nello spazio S_5~~ una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con punto doppio in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una cuspide e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da x, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Tra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi in generale cinque, che danno sezioni aventi in x un tacnodo (1).

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori 1, 2, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du:dv$, ponendo le 6 equazioni:

$$(1) \qquad (\xi x)=0, \quad (\xi x^1)=0, \quad (\xi x^2=0)$$

$$(2) \qquad (\xi x^{11})du+(\xi x^{12})dv=0, \quad (\xi x^{12})du+(\xi x^{22})dv=0$$

$$(3) \qquad (\xi x^{111})du^3+3(\xi x^{112})du^2dv+3(\xi x^{122})dudv^2+(\xi x^{222})dv^3=0$$

dalle quali, eliminando le ξ_i, si ha per $du:dv$ l'equazione determinante

si faccia stare quest'equazione in un sol rigo

$$(4) \qquad \left| x, x^1, x^2, x^{11}du+x^{12}dv, x^{12}du+x^{22}dv, x^{111}du^3+3x^{112}du^2dv+3x^{122}dudv^2+x^{222}dv^3 \right|=0$$

che determina appunto 5 direzioni $du:dv$, ossia 5 tangenti, e quindi poi 5 iperpiani ξ.

Le formole (1), (2), (3) provengono, per dualità, dalle (14), (22), (26) del n. 23 dei "Prelim.". Ma esse si hanno anche subito direttamente, scrivendo i punti di F prossimi a x così:

$$x(u+du, v+dv)=x+x^1du+x^2dv+\tfrac{1}{2}(x^{11}du^2+2x^{12}dudv+x^{22}dv^2)+\ldots$$

e sostituendo nell'equazione dell'iperpiano ξ [Cfr. il n. 8 di "Sup."].

Se ξ verifica le (1), la sezione risulta con punto doppio in x, e

vendo ivi le tangenti date da $(\xi x^{11})du^2 + 2(\xi x^{12})du\,dv + (\xi x^{22})dv^2 = 0$. Perchè si abbia un tacnodo colla tangente $du:dv$ occorre: che questa annulli le 1ᵉ derivate di quella forma quadratica, il che dà le (2); e inoltre annulli la forma cubica in du, dv, che vien dopo nello sviluppo dell'equazione della curva: e ciò dà la (3).

Dirò <u>tangenti principali</u> di F in x le 5 rette nelle direzioni determinate dalla (4), e <u>linee principali</u> di F quelle che sono inviluppate da tali tangenti, ossia le linee integrali di quell'equazione differenziale (4). Per ogni punto di F ne passeranno in generale 5.

2. Per un'applicazione da farsi poi, converrà osservare che l'iperpiano ξ, a sezione tacnodale, che verifica le (1), (2), (3) per una radice $du:dv$ della (4), si può anche riguardare come un iperpiano tangente in pari tempo al cono quadrico V_4^2, prima nominato, relativo al punto x di F, ed all'analogo cono V_4^2 relativo al punto $(u+du, v+dv)$. In fatti, il 1° cono è rappresentato come inviluppo dalle (1) e: $(\xi x^{11})(\xi x^{22}) - (\xi x^{12})^2 = 0$. Si scriverà che ξ appartiene anche al 2° cono differenziando totalmente rispetto a u, v queste quattro equazioni. Con ciò, dalle (1) si ottengono soltanto le (2); e dall'altra [che è poi conseguenza delle (2)]:

$$[(\xi x^{22})(\xi x^{111}) + (\xi x^{11})(\xi x^{122}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{112})]du + [(\xi x^{22})(\xi x^{112}) + (\xi x^{11})(\xi x^{222}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{122})]dv = 0.$$

Ora quest'equazione, applicando convenientemente le (2), si viene a trasformare appunto nella (3).

3. Possiamo definire direttamente le linee principali anche così. Consideriamo la varietà V_3 luogo degli ∞^1 piani $\varkappa$ tangenti a F nei punti x di una data linea L. Se quella varietà non è <u>sviluppabile</u> (ordinaria), e quindi tale che lungo ogni piano generatore ammetta un S_3 tangente fisso, vi sarà per ogni $\varkappa$ un iperpiano (che lo unisce al piano successivo, incidente a $\varkappa$ in x) contenente gli ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 nei punti di $\varkappa$ ("Prelim." in §1); diciamo brevemente un iperpiano tangente alla V_3 lungo $\varkappa$. Orbene

volendo che L sia linea principale di F, ciò equivarrà a dire che o la V_3 è sviluppabile; o, se no, per ciascun x l'iperpiano tangente alla V_3 lungo esso ha contatto quadripunto con L nel corrispondente punto x: cioè ne contiene l'S_3 osculatore, e non soltanto il piano osculatore, come avverrebbe per una linea qualunque.

Invero si pensi L rappresentata da $v = v(u)$. La V_3 è il luogo del piano x determinato dai punti x, x^1, x^2: cioè il luogo del punto $x + \lambda x^1 + \mu x^2$, al variare di u, λ, μ. L'S_3 tangente in quel punto ad essa è l'S_3 del punto stesso e dei suoi primi derivati, cioè x^1, x^2, $x^1 + v' x^2 + \lambda(x^{11} + v' x^{12}) + \mu(x^{12} + v' x^{22})$. Esso sta, comunque si prendan λ, μ, nello spazio determinato dai punti

$$(5) \qquad x, \; x^1, \; x^2, \; x^{11} + v' x^{12}, \; x^{12} + v' x^{22}.$$

Questo sarà dunque, nel caso generale, l'iperpiano tangente alla V_3 lungo x. D'altra parte l'S_3 osculatore alla $v = v(u)$ in x è quello dei punti x, $x^1 + v' x^2$, $x^{11} + 2v' x^{12} + v'^2 x^{22} + v'' x^2$, $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222} + 3v'' x^{12} + 3v' v'' x^{22} + v''' x^2$. I primi tre di essi (che danno il piano osculatore a L) stanno già sull'iperpiano (5). Dire che vi giace anche il 4° è come dire che vi sta $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222}$: ossia equivale a scrivere la (4).

Se poi per ogni x di L i punti (5) stanno in un S_3, sicchè la V_3 è sviluppabile, ciò viene a dire che gli elementi omologhi delle prime 5 colonne del determinante (4) son legati da una stessa relazione lineare; e quindi, senz'altro, la (4) è verificata dalla L: ossia questa è una linea principale. (2)

4. Quando F è una superficie <u>sviluppabile</u>, vale a dire un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva di S_5, segue subito dalle ultime parole dette che <u>tutte</u> le linee segnate su F sono principali.

Consideriamo invece il caso che F sia una superficie non sviluppabile, di quelle (studiate in «<u>Sup.</u>») per le quali le 6 coordinate $x_i(u\,v)$ son soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali (di Laplace):

$$(6) \qquad Ax^{11} + Bx^{12} + Cx^{22} + Dx^{1} + Ex^{2} + Fx = 0,$$

ove $A, B, \ldots$ son date funzioni di u, v; e cerchiamo quali sono per essa le linee principali.

Applicando la (6) alle sei x_i, moltiplicando per ξ_i, — ove l'iperpiano ξ sia uno di quelli considerati al n. 1, — e sommando, si trae, grazie alle (1):

$$A(\xi x^{11}) + B(\xi x^{12}) + C(\xi x^{22}) = 0.$$

Quest'equazione, presa insieme colle (2), ammette due possibilità: 1°) è nullo il determinante dei coefficienti delle tre quantità (ξx^{11}), (ξx^{12}), (ξx^{22}), ossia si ha

$$(7) \qquad C\,du^2 - B\,du\,dv + A\,dv^2 = 0,$$

cioè la direzione $du : dv$ è quella di una delle <u>caratteristiche</u> della superficie («<u>Sup.</u>» n.i 13, 14, 15). Per ognuna di queste linee avviene che i piani tangenti nei suoi punti a F formano una V_3 sviluppabile (ordinaria); perciò (n. 3) le caratteristiche rientrano fra le linee principali. 2°) si ha:

$$(8) \qquad (\xi x^{11}) = 0, \quad (\xi x^{12}) = 0, \quad (\xi x^{22}) = 0,$$

ossia ξ è l'iperpiano (<u>iperosculatore</u>) che sega F in una curva con punto <u>triplo</u> in x («<u>Sup.</u>» n. 19). [3] Allora le (2) son verificate senz'altro, e resta la (3), che dà precisamente la terna delle tangenti a quella curva nel punto triplo (cfr. «<u>Sup.</u>» n. 21). E già al n. 22 di «<u>Sup.</u>», per questa classe di superficie, avevo chiamato quella terna di rette la <u>terna delle tangenti principali</u>.

Concludiamo dunque: <u>la quintupla delle tangenti principali di una superficie, non sviluppabile, di S_5, si scompone, nel caso che la superficie verifichi un'equazione di Laplace, nella detta terna di rette e nella coppia delle tangenti alle caratteristiche (Hessiana di quella terna)</u>. [4]

(1) Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei "Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi" (Rend. Circ. mat. Palermo, t. 30, 1910_2, p. 87), da citarsi in seguito brevemente con "Prelim.". — Citerò invece con "Sup." la mia Nota anteriore "Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine" (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, p. 1047). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.

(2) Un'altra proprietà geometrica delle 5 tangenti principali è data da E. Bompiani al n. 7 della Nota "Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero" (Atti Acc. Torino, 48, 1912-13, p. 393).

(3) Dalle sei equazioni (1) e (8) risulta che quest'iperpiano ξ è ben determinato: perchè, avendo escluso che F sia sviluppabile, è unica ("Sup." n. 12) l'equazione (6) verificata dalle x_i, e quindi la matrice quadrata d'ordine 6 delle x_i e delle loro derivate prime e seconde ha la caratteristica 5.

(4) Com'è già avvertito in nota al n. 23 di "Sup.", se l'equazione (6) è parabolica, ad es° se la superficie è rigata, le linee principali si riducono al sistema semplice delle caratteristiche (per le rigate, il sistema delle generatrici rettilinee) ed un altro sistema semplice di linee. E. Bompiani ("Alcune proprietà projettivo-differenziali dei sistemi di rette negl'iperspazi" Rend. Circ. mat. Palermo, t. 37, 1914_1, p. 305: v. a pag. 314) ha incontrato, fra quelle linee che egli chiama quasi-asintotiche per le rigate, questo 2° sistema di linee principali (nella sua notazione sono le $\gamma_{2,3}$), rilevando come la loro determinazione dipenda da un'equazione di Riccati: sicchè vale un teorema analogo a quello noto di P. Serret relativo alle rigate ordinarie.

(Altre note da mettere a piè di pag. son già a posto nei fogli 5 e 8)

Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese

Nota II del Socio C. Segre

5. Aggiungiamo che su una superficie non sviluppabile che verifichi un' equazione di Laplace, non solo non può svanire in ogni punto la coppia (7) delle tangenti alle caratteristiche (perchè A, B, C non posson essere tutte tre nulle identicamente); ma nemmeno può essere indeterminata la terna delle ulteriori tangenti principali. Invero questo fatto significherebbe che son nulle identicamente le 4 quantità (ξx^{pqr}), ove p, q, r valgono 1 o 2. La (39) di "Sup." (n. 20) ci darebbe: $(\xi^r x^{pq}) = 0$; e questa colle (36) e (37) proverebbe che tanto le ξ_i^1 quanto le ξ_i^2 soddisfano quelle stesse 6 equazioni lineari omogenee (1) e (8), che individuano i rapporti delle ξ_i. Ne seguirebbe, per ogni combinazione ik, $\xi_i^1 \xi_k - \xi_k^1 \xi_i = 0$, $\xi_i^2 \xi_k - \xi_k^2 \xi_i = 0$; e quindi i rapporti $\xi_i : \xi_k$ sarebbero costanti: la superficie starebbe in un iperpiano ξ fisso, contro l'ipotesi.

6. Vogliamo ora riconoscere, per una superficie qualunque F appartenente a S_5, quando avviene che in tutti i suoi punti le tangenti principali siano indeterminate.

In base al n. preced.e possiamo già escludere le superficie non sviluppabili soddisfacenti a un'equazione di Laplace. Di conseguenza ("Sup." n. 5 e n. 13) per un punto generico x della F il cono quadrico V_4^2 (n. 1) sarà irriducibile. Ciò posto, ci conviene mutare il problema nel suo duale entro S_5 (cfr. "Sup." n. 10, "Prelim." n. 22). In luogo della superficie F, avremo una ∞^2 d'iperpiani; invece dei piani tangenti di F, il sistema Σ dei piani caratteristici di quella ∞^2 d'iperpiani. Al cono quadrico V_4^2 dianzi nominato risponderà la conica focale di un'e conica nel caso at- irriducibile. Quanto portano in 5 punti l'osservazione del n. 2, lla conica stessa con , come fochi di 2° ordine per Σ. (*) Così il nostro problema si trasforma in questo:

(*) Cfr. la mia Nota precedente, in questo vol. dei Rendiconti, "Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti".

quando è che, non solo 5, ma tutti i punti di ogni conica focale di Σ sono fochi di 2° ordine.

Ora a tale questione risponde appunto il n. 4 della mia ultima Nota, ora citata, quando lo si applichi alla projezione su un S_4 del sistema di piani Σ. Si vede così che Σ è l'insieme degli ∞^2 piani contenenti le coniche di una superficie del 4° ordine di Veronese. Per conseguenza il sistema dei piani tangenti di F, da cui Σ s'era ottenuto per dualità, sarà l'insieme dei piani tangenti di una superficie di Veronese: e quindi F sarà appunto una tal superficie. Otteniamo dunque il seguente risultato:

Le sole superficie appartenenti a S_5, per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, ossia per cui tutte le linee son linee principali, sono le superficie sviluppabili e la F^4 di Veronese.

7. Il concetto di linea principale per una superficie di S_5 si può illustrare da un nuovo punto di vista, colla seguente considerazione, che è evidentemente capace di essere ulteriormente estesa.

Precisiamo l'ordine infinitesimale di vicinanza, per due piani infinitamente prossimi, di S_5, assumendoli in una ∞^1 di piani, che determiniamo con 3 punti $x\ y\ z$ funzioni di un parametro variabile t. Intenderemo cioè per "ordine di vicinanza" dei piani corrispondenti ai valori t, $t+dt$ del parametro, l'ordine infinitesimale, rispetto a dt come infinitesimo principale, del determinante

$$(g) \qquad |x(t),\ y(t),\ z(t),\ x(t+dt),\ y(t+dt),\ z(t+dt)|$$

È subito visto che questo numero non muta, se sostituiamo x, y, z con 3 punti qualunque, non allineati, combinazioni lineari di quelli, a coefficienti funzioni di t.

Sviluppando $x(t+dt), \ldots$ secondo le potenze di dt, risulta che il 1° termine nello sviluppo di quel determinante sarà in generale dt^3 moltiplicato pel determinante $D = |x\ y\ z\ x'\ y'\ z'|$. Dunque: in generale la vicinanza di

due piani successivi è del 3° ordine. — Perchè venga ad essere d'ordine superiore, dovrà annullarsi D. Supposto che ciò accada per ogni valor di t, s'annullerà pure la derivata di D: la quale è precisamente il coefficiente di $\frac{1}{2}dt^4$ nello sviluppo di (9). Vediamo così che se in una ∞^1 di piani l'ordine di vicinanza di due piani successivi generici è superiore al 3°, esso sarà almeno uguale a 5. Questo caso, dell'annullamento identico di D, avverrà («Prelim.» §1) quando la V_3 luogo degli ∞^1 piani ha lungo ogni piano un S_4 (od S_3) tangente, cioè ogni piano ha un foco (punto d'incidenza col piano successivo), sicchè: o tutti i piani son tangenti ad una stessa linea L, luogo di quel foco; oppure passano tutti per uno stesso punto: il che escluderemo, non essendovi occasione allora ad ulteriori ricerche, perchè il determinante (9) riesce $\equiv 0$.

Siano dunque gli ∞^1 piani tangenti ad una stessa linea L, il cui punto variabile assumeremo per $x(t)$. Potremo allora prendere y in $x'(t)$; e il determinante (9), sviluppato, diventerà $|x(t), x'(t), z(t), x(t+dt), x'(t+dt), z(t+dt)|$

$$= \frac{1}{12}dt^5 |x\ x'\ x''\ x'''\ z\ z'| + \frac{1}{24}dt^6 \{|x\ x'\ x''\ x^{IV}\ z\ z'| + |x\ x'\ x''\ x'''\ z\ z''|\} + \dots$$

Perchè questo risulti sempre infinitesimo d'ordine superiore al 5° dev'essere identicamente

$$(10) \qquad |x\ x'\ x''\ x'''\ z\ z'| = 0 .$$

Derivando, si vede che sarà nullo anche il coefficiente di dt^6; sicchè: se l'ordine di vicinanza è superiore a 5, esso varrà almeno 7. Ove la V_3 luogo degli ∞^1 piani non sia sviluppabile (ordinaria), e quindi sia determinato l'iperpiano che ~~(di $x\,x'\,z$ e di $x''\,z'$) tan~~ le è tangente lungo un piano generico $x\,x'\,z$, — iperpiano di questi punti e di $x''\,z'$, — la (10) dice che esso conterrà anche x''', cioè avrà contatto quadripunto in x colla L. (Se invece la V_3 è sviluppabile, ossia l'insieme dei piani osculatori di una linea, si potrà assumere z in $x''(t)$, e si riconosce subito che l'ordine di vicinanza di due piani successivi sale a 9).

In tal modo le varietà di ∞^1 piani, che s'erano già incontrate al n. 3 in relazione colle linee principali di F, risultan caratterizzate sotto un nuovo aspetto: in esse due piani successivi son più prossimi fra loro (ordine 7), che non nel caso generale (ordine 3), e nel caso di ∞^1 piani tangenti ad una linea, senz'altra particolarità (ordine 5).

Ritornando appunto al n. 3 e all'insieme dei piani tangenti di una superficie, potremo ora dire che: mentre due piani tangenti successivi hanno in generale vicinanza del 5° ordine, se i loro punti di contatto stanno su una stessa linea principale la vicinanza è del 7° ordine (almeno). E il teorema finale del n. 6 si potrà anche enunciare così: Se una superficie appartenente ad S_5 è tale che due piani tangenti successivi abbian sempre vicinanza d'ordine superiore al 5°, la superficie è sviluppabile (l'ordine di vicinanza $= 9$), oppure è la F^4 di Veronese (l'ordine di vicinanza è infinito, perchè i piani tangenti sono a due a due incidenti).

8. Il fatto che l'ordine infinitesimale di vicinanza di due piani di S_5 salta da 3 a 5, da 5 a 7, da 7 a 9, rientra in una proposizione generale relativa agli S_k di S_{2k+1}, con k pari.

Introduciamo per questi S_k le coordinate di Grassmann: determinanti d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti indipendenti. Indichiamole con p_x, ove x sia un numero $1, 2, \ldots, \binom{2k+2}{k+1}$, con cui si rappresenti una determinata permutazione di $k+1$ fra gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$ di quelle coordinate omogenee di punti. Anzi, indichino 1 e 2, come pure 3 e 4, e poi 5 e 6, ecc., delle permutazioni complementari, nel senso che, prese insieme nell'ordine indicato, costituiscano una permutazione pari di tutti gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$. Allora, nell'ipotesi fatta che k sia pari, il determinante delle coordinate dei $2k+2$ punti che determinano due S_k, p e q, si potrà scrivere come forma bilineare delle coordinate di questi spazi: $[p, q] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3) + \cdots$ (*) E così il determinante analogo a (9), che serve a valutare l'ordine di vicinanza di due S_k, viene a rappresentarsi con $[p(t), p(t+dt)]$; che, sviluppando $p(t+dt)$ secondo le potenze di dt, diventa $\sum \frac{1}{a!}[p, p^a]dt^a$,

~~(**) Cfr., anche pel preciso significato di quest'espressione, il pri-~~

(*) Cfr. il principio della mia Memoria "Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni" (Annali di Mat.ª (3) 27, 1918, p. 75)

(significando con p_r^a la derivata d'ordine a di p_r rispetto a t).
L'ordine di vicinanza sarà dato, in ciascun caso, dal primo indice $\underline{a}$ che comparirà effettivamente in questa serie: vale a dire dal primo $\underline{a}$ tale che la $[p, p^a]$ non sia nulla. Come al n. preced^e si riconoscerà che quest'ordine è almeno uguale a $k+1$.

Ciò premesso, supponiamo che l'ordine di vicinanza sia $\underline{m+1}$ (almeno), cioè che sian nulle, identicamente rispetto a $\underline{t}$, tutte le $[p, p^a]$ con $a \leq m$. Dico che saran pure nulle tutte le $[p^b, p^c]$ con $b+c \leq m$. Invero da $[p, p^{a-1}] = 0$, derivando rispetto a $\underline{t}$, e tenendo conto che $[p, p^a] = 0$, segue $[p', p^{a-1}] = 0$, per $a \leq m$. ~~Quindi~~ anche $[p', p^{a-2}] = 0$; sicchè, derivando e basandosi sulla precedente, si ha $[p'', p^{a-2}] = 0$. Così pure sarà $[p'', p^{a-3}] = 0$; e derivando, e valendosi dell'ultima, si trae: $[p''', p^{a-3}] = 0$. E così via.

Fissando ora che $m+1$ sia pari $= 2\mu$, avremo dunque:

$$[p, p^m] = 0, \quad [p', p^{m-1}] = 0, \quad [p'', p^{m-2}] = 0, \ \ldots, \ [p^{\mu-1}, p^{\mu}] = 0,$$

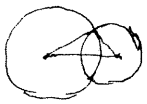
e derivando:

$$[p, p^{m+1}] + [p', p^m] = 0, \quad [p', p^m] + [p'', p^{m-1}] = 0, \quad [p'', p^{m-1}] + [p''', p^{m-2}] = 0,$$
$$\ldots \quad [p^{\mu-1}, p^{\mu+1}] + [p^{\mu}, p^{\mu}] = 0,$$

donde, essendo $[p^{\mu}, p^{\mu}] = 0$, segue $[p, p^{m+1}] = 0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m+2$, e non $m+1$.

Concludiamo che: in S_{2k+1}, quando k è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due S_k è sempre dispari.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_{=c}$$



$$r^2 + r'^2 - 2rr'\gamma = d^2 \qquad r^2 = a^2 + b^2 - c$$
$$(a-a')^2 + (b-b')^2 = (a^2 + b^2 - c) + (a'^2 + b'^2 - c') - 2rr'\gamma$$
$$-2aa' - 2bb' = -c - c' - 2rr'\gamma$$
$$(c + c' - 2aa' - 2bb')^2 = 4\gamma^2 (a^2 + b^2 - c)(a'^2 + b'^2 - c')$$
$$a^2 + b^2 - c = \varphi(s), \qquad \varphi(s, s')^2 - 4\gamma^2 \varphi(s) \cdot \varphi(s') = 0$$

significa che le sfere s, s' fanno l'ang. che a pag. 7

L'ang. di 2 sfere è uno quello non-eucl°... (mia Nota)