

Superficie del 14° ordine  
lungo dei vertici dei coni rotondi per 4 punti dati  
(dalla Tesi della sig<sup>na</sup> Grudo 1903)

Dicendo  $A_i$  ( $i=1..4$ ) i 4 punti dati,  $r_i$  le distanze da essi di un punto della superf., l'equazione di questa è il prodotto degli 8 quadrimoni  $\sum \pm \alpha_i r_i$ , ove  $\alpha_i$  è l'area della faccia opposta ad  $A_i$  nel tetraedro  $A$ .

I vertici  $A_i$  son punti 8-pli, in cui il cono tang. si spezza nei 4 coni rotondi circoscritti da  $A_i$  alla faccia opposta. Così gli spigoli  $A_i A_k$  sono rette quadrumple, e in ogni punto di un tale spigolo i 4 piani tang. son quelli tang. ai 4 coni rotondi (del sistema) aventi ivi il vertice.

Dall'equazione suddetta si stacca il piano all'infinito doppiamente. Rimane una  $F^{14}$ , che ha l'assoluto per conica doppia, lungo cui il piano all'infinito tocca la superficie. Inoltre  $F$  contiene le rette all'infinito delle 4 facce del tetraedro (e lungo esse è toccata da questi piani); e sega ulteriormente il piano all'infinito in una  $C^4$  lungo dei vertici dei cilindri rotondi circoscritti al tetraedro.

# Monoidi particolari

(dalla Tesi di Andreatta Bernocco, 1902)

Monoidi d'ordini  $n$  e vertice  $O$ . Ogni retta  $s$ -pla di 1<sup>a</sup> specie, cioè a piani tangenti tutti variabili; uscente da  $O$ , abbassa la classe  $(n-1)(3n-4)$  del monoido di  $(s-1)(3s+1)$  unità. Una retta  $s$ -pla di 2<sup>a</sup> specie, cioè a piani tangenti tutti fissi, cioè la retta che unisce  $O$  ad un punto  $(s+1)$ -plo, abbassa la classe  $(n-1)(3n-4)$  di  $s(3s-1)$  unità. E se la retta  $s$ -pla di 2<sup>a</sup> specie ha 2 piani tangenti coincidenti, aumenta di 2 unità l'abbassamento di classe: la retta presenta una singolarità delle linee cuspidali e contiene un 3<sup>o</sup> punto singolare [point-clos]

Il numero delle tangenti principali uscenti da un punto generico è  $3(n-1)(n-2)$ ; da diminuirsi di  $3(s-1)^2$  se vi è una retta  $s$ -pla di 1<sup>a</sup> specie, e di  $3s(s-1)$  per una retta  $s$ -pla di 2<sup>a</sup> specie. — Ne seguono gli altri caratteri del cono circoscritto

(volta)

Il massimo numero di rette doppie di  $g^a$  specie che possa avere il monoidale è dato dall'intero contenuto in  $\frac{n(n-1)}{4}$ ; ed esistono monoidi irriducibili per i quali il massimo è raggiunto.

Il massimo numero di punti doppi isolati (possibile) fuori del vertice è  $\frac{n(n-1)}{2}$

# F<sup>6</sup> razionali (non monoidei)

(dalla tesi della sig<sup>a</sup> Bonicelli)

- Sistemi lineari rappresentativi di genere 5, sovrabbondanza 1.
- C<sup>6</sup> con 5 punti doppi e 8 punti semplici su una  $\gamma^3$ , e due punti semplici fuori.
  - C<sup>7</sup> con 9 punti doppi e 3 semplici su  $\gamma^3$  e un punto doppio fuori; oppure 10 punti doppi e 1 semplice su  $\gamma^3$  e 2 punti semplici fuori; oppure 1 punto triplo, 7 doppi, e 4 semplici su  $\gamma^3$ , e 2 sempl. fuori; oppure 1 triplo, 6 doppi, e 6 sempl. su  $\gamma^3$ , e 1 doppio fuori.
  - C<sup>8</sup> con 2 punti tripli e 9 doppi su  $\gamma^3$  e 1 doppio fuori.
  - C<sup>9</sup> con 6 tripli, 4 doppi, 1 sempl. su  $\gamma^3$  e 1 doppio fuori. — Etc.

- Sistemi di genere 6, sovrabbondanza 2 ( $\gamma^4$  con 0 doppio fondo)
- C<sup>7</sup> con 0 triplo, 6 punti doppi e 10 semplici su  $\gamma^4$ .
  - C<sup>8</sup> con 0 quadruplo, 9 punti doppi e 6 sempl. su  $\gamma^4$ .
  - C<sup>9</sup> con 0 quadruplo, 12 doppi e 2 semplici su  $\gamma^4$ .

Altre F<sup>6</sup> razionali, più interessanti, si possono ottenere col metodo indicato nel corso 1900-01 pag. 111. La sig<sup>a</sup> Bonicelli ottiene con i seguenti:

Genere 5, sovrabb<sup>a</sup> 1

- C<sup>5</sup> con 1 punto doppio e 15 punti semplici: le 6 intersezioni variabili (gruppo speciale) essente su una conica per O. da F<sup>6</sup> ha una conica doppia e una retta tripla.
- C<sup>6</sup> con 5 punti doppi e 10 semplici.
- C<sup>7</sup> con 1 punto triplo, 7 doppi e 6 semplici.
- C<sup>8</sup> con 4 punti tripli, 2 doppi e 4 semplici.

(si velt.)

Genere 6, sovrabbondanza 2

- $C^7$  con 9 punti doppi e 4 semplici, 6 intersezioni variabili giacendo su quartiche per 9 punti doppi.
- $C^7$  con 1 punto triplo, 6 doppi e 10 semplici.
- $C^8$  con 2 punti tripli, 9 doppi e 4 semplici;  
oppure 1 punto triplo, 2 doppi e 1 semplice;  
oppure 1 quadruplo, 9 doppi e 6 semplici.
- $C^9$  con 7 tripli, 1 doppio, 8 semplici.
- $C^{10}$  con 1 punto quadruplo, 8 tripli e 6 semplici.

## Coniche normali a rette e piani dati

(dalla Tesi di E. Laura Genn° 1902)

Come nel mio corso 1899-1900 pag. 96 e pag. 114-116 per il problema analogo nel piano, così si ottiene per la condizione che la conica dello spazio sia normale ad una retta data (e sia una conica propria, cioè non avente  $\infty$  punti all'infinito), la formula simbolica  $N_g = P' + Q$ ; ove  $P'$  è la condizione, per la conica propria, di passare per un dato punto improprio, e  $Q$  quella di toccare un piano dato in un punto di una retta data.

Onde:  $N_g^2 = P'^2 + 2P'Q + Q^2$ ,  $N_g^3 = 3P'^2Q + 3P'Q^2 + Q^3$   
 $N_g^4 = 6P'^2Q^2 + 4P'Q^3 + Q^4 = 28$  (coniche normali a 4 rette date).

Similmente la condizione, per una conica propria di essere normale a un piano dato si esprime così:  $N_e = P + \mu\beta$  ( coi simboli di Schubert )  
Non vi son da considerare potenze di  $N_e$  superiori alla 2<sup>a</sup>, perchè il piano di una tal conica dovrebbe essere normale a 3 o più piani, sarebbe all'infinito.

(5) 3<sup>30</sup>

T 4

# Ricerche sui fasci di forme quadratiche dal punto di vista della realta.

Date in  $S_n$  due quadriche, esse si possono in generale ridurre simultaneamente a forma canonica  $\sum a_i x_i^2 = 0$   $\sum b_i x_i^2 = 0$ . Se la piramide autopolare comune è reale, si studia facilmente il fascio dal punto di vista della realta. Si distinguono le quadriche (non degeneri) di  $S_n$  ad equaz. reale in  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$  specie, a seconda che non hanno punti reali, o hanno reali risp. punti, rette ....  $S_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ : il che corrisponde a esservi nella equazione canonica  $0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  coefficienti di un segno, e gli altri del segno opposto. Dal punto di vista delle collineazioni reali si equivalgono due quadriche solo quando sono della stessa specie. Sarà facile riconoscere di quali specie sono, a seconda dei casi, le quadriche che si ottengono da  $\sum (a_i + \lambda b_i) x_i^2 = 0$  dando

a) a  $\lambda$  tutti i valori possibili. b) con 0 quadriche



2

4

degeneri non si dovranno trascurare: essi corrispondono a  $\lambda = -\frac{a_i}{b_i}$  e costituiscono il passaggio da una specie ad un'altra. Ordinate le  $\frac{a_i}{b_i}$  secondo la loro grandezza, daranno i valori di  $\lambda$  compresi fra due successive di queste quantità quadriche di una stessa specie.

La cosa è meno semplice se la piramide autopolare comune alle date quadriche non ha tutti i vertici reali, e quindi non si può assumere come fondamentale. Si potrebbe forse sostituirla una piramide così ottenuta: Per ogni vertice immaginario esiste pure il coniugato; sulla retta reale che li unisce si prendano due punti reali (forse converrà che siano armonici rispetto a quelli) come nuovi vertici. Ciò equivale, se non sbaglia, a porre nelle equazioni canoniche, al posto di  $x_1$  e  $x_2$ ,  $y_1 + iy_2$  e  $y_1 - iy_2$  (e  $a_1, a_2$  complesse coniugate); sicché forse, al posto di  $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$ , viene un trinomio quadratico omogeneo in  $y_1, y_2$ . Similmente per  $a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2$  se

(8) T

T5

anche i vertici 3, 4 sono immaginari coniugati, ecc. Con al posto delle primitive forme canoniche se ne hanno delle nuove lievemente più complicate, per fatto che compaiono alcuni prodotti di coordinate distinte. — Come si riconosce, se una forma quadratica qualunque  $\sum_{i,k} a_{ik} z_i z_k$  non ridotta a somma di quadrati, la specie?

Veda p. e. Hesse Vorles. ii. anal. Geom. des Raumes 3<sup>e</sup> Auflage p. 460 (dai segni del discriminante  $\Delta = |a_{ik}|$  e di  $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{11}}, \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11} a_{22}}, \frac{\partial \Delta}{\partial a_{11} a_{22} a_{33}}, \dots$ ) — Verifichi se vi è qualcosa di utile in Kronecker Monatsber. Berlin Januar 1874; o Vorles. ii. Determin<sup>o März</sup>  
 — Veda anche il teorema di Klein, nota a p. 56<sup>2</sup> del t. 23 dei Math. Ann.

La ricerca indicata finora avrebbe poco di nuovo e d'importante. L'importante è invece — e questo dev'esser lo scopo del lavoro — di collegare le cose precedenti allo studio della forma dell'intersezione  $M_{n-2}^4$  delle 2 quadriche, o del fascio. Può mancare l'intersezione: oppure  $\infty$

4

Nella mia Dissertaz. è fatto lo studio di quella  $M_4^2$  senza badare alla realtà. — In Cremona Mém. sur les surf. du 3<sup>e</sup> ordre (Grelle 68), ultimo cap<sup>o</sup>, son classificate in  $S_3$  le  $E_4^4$  in relazione colla realtà del tetraedro. (Cfr. anche Zeuthen Annali di mat. (2) 14 p. 63-4). — In questa mem<sup>a</sup> di Zeuthen è implicitamente risolta la questione per  $S_4$  in quanto che le  $F_4^4$  studiate da Zeuthen son le proiezioni delle  $M_2^{2.2}$  di  $S_4$  (cfr. la mia Mem. Math. Ann. 24). — Per  $S_5^2$ , se nel fascio di  $M_4^2$  ve n'è una di specie 4, cioè contenente piani reali, la si prenda come quadrica delle rette di  $S_3$ , e la  $M_3^{2.2}$  sarà un complesso quadratico di rette (cfr. la 2<sup>a</sup> parte della mia Dissertaz.). In questo senso sono immediatamente utilizzabili i risultati di Reye Grelle 98 p. 284 e quelli del suo discepolo Arnoldt nella dissertaz<sup>e</sup> che Le presterò quando Le occorra. — Bisogna che Ella cerchi proposizioni generali che abbraccino in tutto o in parte quei risultati spe-

ciali. Quando la cosa non le riesce troppo ardua, bisognerebbe badare non solo al numero di falde che compongono la  $M_{n-2}^4$ , ma anche ai loro caratteri nel senso dell' Analysis situs, come vedrà in Zeuthen per curve e superficie. Allora potrai indicarle dei lavori di Betti, Poincaré, Picard, ecc. sulla connessione delle varietà iperspaziali. Il lavoro acquisterebbe notevole importanza.

Non occorre dire che, come controllo dei ragionamenti che facesse in  $S_n$ , dovrebbe sempre prendere i primi valori di  $n$ .

Più tardi potrà vedere se i suoi risultati le permettessero di rispondere alla questione di Hadamard Intermédiaire des math. X, 1903 août p. 201, question 2629