

lettere a scienziati

(5)

N° 190

a

Stella

Due stelle reciproche generano una quadrica.
(da una lettera a Torio)

Ogni piano di una stella si puo' rappresentare con

$$(1) \quad a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 = 0$$

dove $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$ sono le equazioni di tre piani. Se su quel piano giace una retta

$$(2) \quad \frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_3}{\alpha_3}$$

della stessa, dovranno le a e le α essere legate da un'equazione. Per averla basta moltiplicare la (1) per $\frac{1}{a_1 \alpha_2 \alpha_3}$ e poi tenerci conto della (2); si avra' così:

$$\frac{a_1}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{a_2}{\alpha_3 \alpha_1} + \frac{a_3}{\alpha_1 \alpha_2} = 0$$

ossia:

$$(3) \quad a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 = 0$$

Viceversa una qualunque delle equazioni (1) e (2) combinata alla (3) ci darà l'altra, per cui intendendo nelle equazioni (1) e (2) che a_1, a_2, a_3 siano nella stessa coordinata (3) è la condizione necessaria e sufficiente affinché il piano (1) passi per il raggio (2). coordinate omogenee del piano (1) e che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ siano coordinate omogenee che il raggio (2) giaccia sul piano (1).

del raggio (2), l'equazione (3) si potrà ritenere come equazione del raggio (2) o del piano (1) della stessa, secondo che le coordinate a_1, a_2, a_3 , oppure le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ si ritengono mobili e le altre fisse. L'analogia tra la stessa ed il piano (punteggiato - rigato) si vede essere completa.

E' premesso, abbia in un'altra stessa una retta:

$$(1)' \quad \frac{N_1}{a_1} = \frac{N_2}{a_2} = \frac{N_3}{a_3}$$

che considero come corrispondente al piano (1) della 1^a stessa: dico che

L1 (1)

b

Allora le due stelle saranno reciproche. Poniamo dunque che il piano (1) della 1^a stella rotoli intorno al raggio (2), cioè che le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ siano legate dall'equazione (3) e vediamo che cosa avverrà del raggio corrispondente (1)[']. Nella nuova stella l'equazione di un piano le $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ sono le coordinate del raggio considerato (1)['] per definizione e poiché esse sono legate dall'equazione (3) per ipotesi, quel raggio girerà per quanto vedremo ugualmente sul piano della stessa stella avendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per coordinate, cioè avendo per equazione

$$(2)' \quad \alpha'_1 N_1 + \alpha'_2 N_2 + \alpha'_3 N_3 = 0$$

Dunque realmente le 2 stelle sono reciproche e confrontando le equazioni (1) - (2) rispettivamente colle (1)' - (2)' si vede che ~~il~~ raggio dell'una ed il corrispondente piano dell'altra si deducono l'uno dall'altro nello stesso modo sia che il raggio appartenga alla 1^a stella, sia che esso appartenga alla 2^a.

Eliminiamo le α dalle equazioni (1) e (1)'). Basterà moltiplicare ciascuna dei 3 termini della (1) per ciascuna dei 3 membri della (1)' rispettivamente. Si avrà: $M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_3 = 0$ equazione della quadrica luogo delle intersezioni dei raggi e piani corrispondenti delle due stelle. Lo stesso si avrebbe eliminando le α tra le equazioni (2) e (2)': la quadrica è dunque luogo delle intersezioni dei raggi della 1^a stella e della 2^a cui giulani corrispondenti della 2^a e della 1^a.

L.A. (2)

1891

Al preg^{re} sig^o D^r G. Veronesi,
professore di Geometria analitica all'università di Padova

Torino, 21 luglio 1883.

Preg^{re} Signore,

Senza avere il piacere di essere da lei conosciuto mi permetto di scrivervi per comunicarle ~~altri~~ ^{altri} risultati sulla teoria generale delle quadriche in uno spazio ad n dimensioni, ~~a cui sono~~ ^{rispetto} a cui sono passati ~~che si trovano~~ ^{in un paragrafo} ~~per l'adattamento~~ ^{altri} ~~ma sono~~ ^{di questo} ~~qualche~~ ^{ma} ~~per la facoltà di Matematica~~ ^{ma} ~~di questa~~ ^{ma} ~~università~~ ^{ma} ~~risultato~~ ^e che in certo modo completano quelli che Ella ha esposti intorno a quella teoria nella sua importante memoria "Behandlung der projektiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projektions und Schneidens" del vol XIX dei Mathematische Annalen.

In questi lavori Ella ha applicato allo studio di una quadrica in uno spazio ad n dimensioni la proiezione (stereografica) di questa da uno suo punto su un piano (spazio ad $n-1$ dimensioni) e così ho fatto anch'io. ~~Si trova così che una~~ ^{anche} ~~mentre~~ cercando ^{ogni punto} ~~gli~~ spazi lineari contenuti in quella quadrica si trova ~~che non~~ (conside-

L2 (1)

secondo soltanto le quadriche che non hanno punti doppi, cioè che sono date
 così) che una F_{2m-1}^2 , contiene solo degli spazi lineari a numero di
 dimensioni non maggiore di $m-1$ e una F_{2m}^2 solo degli spazi lineari
 a numero di dimensioni non maggiore di m . Orò nell'ipotesi i num-
 meri di R_m , contenuti nella F_{2m-1}^2 , e di R_m (formanti due sistemi)
 contenuti nella F_{2m}^2 mi pare che non siano precisamente quelli che
 Ella ha assegnati (pag. 192 ^{tutto del vol. citato}) ma, ma benintesi si debba dire che in
una F_{2m-1}^2 vi sono $\infty^{\frac{1}{2}m(m+1)}$ R_{m-1} , e in una F_{2m}^2
vi sono $\infty^{\frac{1}{2}m(m+1)}$ R_m . Purché nei secondi benintesi Ella
 dice, come esempio, che in una F_5^2 vi sono $\infty^9 R_2$, si
 troverà che ve ne sono solo ∞^6 .

Più in generale si può dire che: nello spazio lineare ad n
dimensioni in una quadrica generale qualunque F_{n-m}^2 , sono contenuti,
 se $m \leq \frac{n-1}{2}$, $\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-2)}$ R_m , al che per ogni R_k
 delle quadriche stessa, essendo $k < m$, passano $\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k-3)}$
 di quegli R_m .

Le quadriche a numeri pari di dimensioni danno luogo a qualche
 problema di più che le altre. Una F_{2m}^2 contiene, come Ella ha
 notato, due sistemi ben distinti di R_m . Orò c'è facile vedere che uno
 di questi R_m deve (forse) avere in generale un punto comune o con-

(2)

tutti quelli dello stesso sistema e non con quelli dell'altro sistema, oppure viceversa con tutti quelli di diverso sistema e non con quelli dello stesso sistema. Con l'oltre metodo della rappresentazione su un piano che è fornito dalla proiezione stereografica ~~intorno~~ della quadrica si trova questo risultato:

Se m è numero impari, allora $\text{nel } F_{2m}^2$ hanno in generale un punto comune due R_m di diverso sistema e non hanno punti comuni in generali due R_m dello stesso sistema. Se invece m è numero pari, allora nella F_{2m}^2 si troveranno in generale due R_m relativi allo stesso sistema.

Di qui segue subito che volendo generare una F_{2m}^2 con stelle reciproche aventi per sostegni R_m di questa bisogna prendere questi R_m nello stesso sistema se m è impari, in diversi sistemi se m è pari. Questi risultati ^{si applicano} immediatamente alla dimostrazione delle proprietà trovate dalla Schur ^{confermate} in un complesso quadratico di rette (nonendo ciò $m = 2$) e due rigate dello stesso sistema stanno in uno stesso complesso lineare, ma non più se appartengono ai due sistemi diversi. Il generare il complesso quadratico con stelle reciproche di complessi lineari si dovranno prendere due rigate quadriche appartenenti ^{rispettivamente} a due sistemi diversi coniugati.

(2(3))

Nella quadrica F_{2m}^2 sia contenuto uno spazio algebrico ad m dimensioni di ordine qualunque λ tale che ogni R_m di un sistema lo tagli in λ^2 punti, ed ogni R_m dell'altro sistema in λ punti e quindi indicando con (l, λ) un tale spazio algebrico, si può domandare quanti punti comuni abbiano due tali spazi algebrici, ~~ma se le questioni~~ se due λ spazi ad m dimensioni contenuti nella quadrica e rappresentati da (l, λ) e (l', λ') abbiano quanti punti comuni ed in quante numeri. Bene si trova che: ~~se m è impari~~
~~il numero dei punti comuni per~~
~~il numero dei punti comuni a quei due spazi algebrici è~~, ~~se m è impari~~
 $l\lambda' + l'\lambda$, se m è pari:
~~mentre se m è pari, il numero dei punti comuni è ed invece:~~
 $ll' + \lambda\lambda'$. se m è pari.

In particolare per $m=1$ si ha un teorema noto dovuto, ecco, allo Charles. Per $m=2$ supponendo che la quadrica F_4^2 sia lo ordinario spazio di rette e quindi che i due sistemi di R_2 siano i piani regati e le stelle di rette ed i due spazi algebrici considerati siano due sistemi di rette, dei quali perciò l, l' indicheranno rispettivamente gli ordini e λ, λ' le classi (per una dimostrazione semplicissima si ottiene del teorema di Falphen): due sistemi di raggi d'ordine l, l' e classe λ, λ' hanno comuni $ll' + \lambda\lambda'$ rette.

Avrei ancora da parlare di altre ricerche sulle quadriche a un numero qualunque di dimensioni, distinte stesse dimensioni, riguardanti specialmente le quantità contenute su una tali quadriche, ma siccome sono now sotto in stile relativo co' simboli ora usati e' d'altra parte tenendo d'averli già annunziati con questi, le ~~trovo~~ ^{trovo} (corrado Segre) classificazioni. E da ricerche colla distinta stessa, no augurandomi che Ella trovi non affatto poco d'importanza queste proposizioni (Torino, via Montebello, 26) che mi sono permesso apporre.

1882. 1^{er} letter

A M^e le Dr. A. Voss,
professeur de mathématiques

Darmstadt.

Monsieur,

Veuillez m'excuser si j'ose vous écrire sans vous être connu pour vous faire une demande que vous trouverez peut-être indiscrète. Cependant ce n'est pas sans avoir fait tout mon possible pour éviter de vous incommoder que je me résous à vous écrire. Je l'étudie avec passion cette belle science que vous illustrez, la géométrie; ~~et je me tourne à présent~~ spécialement les complexes de droites formant aujourd'hui l'objet de mes études. Il me serait donc indispensable non seulement de lire, mais d'approfondir vos mémoires, ~~qui~~ qui contiennent la resolution de tant de questions importantes et générales de cette théorie si jeune et si belle. Je nomme ~~particulièrement~~ les mémoires publiés dans les tomes VIII, IX et X des «Mathematische Annalen» et ~~particulièrement~~ celui du tome IX «Ueber Complexen und Kongruenzen» qui a tant d'importance et qu'en aucun maniement je n'ai pu me procurer chez les libraires. Si vous voulez, Monsieur, m'expédier ces mémoires ~~en m'avertissant de leur prix,~~ par quel moyen je pourrais les acquérir je vous en serais infiniment obligé. Excusez-moi, encore une fois, de mon indiscretion; mais comme elle est causée par l'amour de la

L 3 (1)

sciente, et que ~~me~~ j'espére que vous me compratirez. ~~Cela~~ quelle que puisse
être votre réponse, je vous en remercie apparaissant de vos bons
~~avisements~~ quelle que puisse être votre réponse.

Votre humble serviteur.

Corrado Segre

Mon adresse est : « ~~L~~ Turin (Italie), rue Montebello, 26 ».

L 3 (2)

Al D.A.Voss

Professore di Matematica

Prima lettera, 1882

Darmstadt

Signore,

Vogliate scusarmi se oso scrivervi senza conoscervi per farvi una domanda che forse troverete indiscreta.

Tuttavia ho fatto tutto il possibile per non scomodarvi.

Studio con passione questa bella scienza che voi illustrate : la Geometria; specialmente i complessi di rette costituiscono oggi l'oggetto dei miei studi. Non mi sarà perciò solo indispensabile leggere, ma approfondire le vostre memorie che contengono la soluzione di molte domande importanti e generali di questa teoria così recente e così bella.

Nomino particolarmente le memorie pubblicate nei volumi 8,9 e 10 dei "Mathematische Annalen" e specialmente quella del volume 9 "Ueber Complexe und Congruenzen"(^o), che ha tanta importanza e che non ho potuto procurare in libreria.

Se volete, Signore, spedirmi queste memorie, avvertendomi del prez-
zo. vi sarò infinitamente grato.

Scusate ancora la mia indiscrezione, ma siccome è causata dall' amore per la scienza, spero mi comprendiate.

Qualunque sia la vostra risposta, vi ringrazio anticipatamente.

Vostro umile servitore
Corrado Segre

Il mio indirizzo è: Torino (Italia), Via Montebello, 26

(°) 55-162,1876.

transcription

Monsieur,

J'ai reçu ~~ces quatre~~ vos mémoires sur la géométrie des complexes de droites en même temps que votre lettre, et je vous en remercie vivement. Vous ne pouvez vous figurer le plaisir que j'ai eu d'avoir enfin dans mes mains ces mémoires que j'avais, tant désiré, qu'elles m'aient fait. ~~Outre la joie~~ de l'avoir enfin dans mes mains ces mémoires que j'avais, tant désiré, ~~que~~ elles m'aient fait, ~~vous~~ ~~me~~ ~~avez~~ ~~gracé~~ ~~que~~ ~~je~~ ~~n'ai~~ ~~sais~~ ~~revoir~~ ~~encore~~ ~~d'une~~, ~~lettre~~ ~~qui~~ ~~obligeait~~ ~~comme~~ ~~vous~~ ~~m'avez~~ ~~critiqué~~, à moi qui ne suis pas même pas encore ~~peu~~ ~~encore~~ ~~la~~ ~~thèse~~ ~~de~~ ~~docteur~~ (~~je~~ ~~je~~ ~~je~~ ~~je~~ ~~je~~ ~~je~~ étudiant de la troisième année à cette université) ~~c'est~~ ~~bravement~~ plus que je ne méritais.

Je vous remercie aussi de vos conseils. Dans l'étude que ~~j'ai fait~~, ~~mon~~ ~~étudier~~ ~~à~~ ~~l'école~~ ~~des~~ ~~mathématiques~~ ~~de~~ ~~l'université~~ ~~de~~ ~~Bruxelles~~ ~~sur~~ la géométrie de la droite, après ~~l'~~ ~~ouvrage~~ ~~de~~ ~~Fischer~~ ~~et~~ ~~les~~ ~~mémoires~~ ~~de~~ ~~Battaglini~~, ~~de~~ ~~Tasch~~, ~~etc.~~, ~~je~~ ~~suis~~ ~~passé~~ ~~aux~~ ~~recherches~~ ~~de~~ ~~M^r Klein~~, en tâchant de bien posséder la méthode de coordonnées ~~affines~~ qu'il a développée particulièrement dans le mémoire du tome II des "Mathematische Annalen" "Über die Théorie der Complexe I und II. Grade". Seullement alors j'ai pu ~~lire~~ commencer à lire vos beaux mémoires sur les complexes de un degré quelconques. Je vous assure que je ferai tout ce qui est possible, ne fût-ce que pour gratitudine envers vous. Du reste comme pour moi l'étude des mathématiques, et particulièrement de la géométrie, est un grand plaisir et non pas une chose ennuyeuse, je n'y aurai pas beaucoup de malice.

Vous avez déjà eu tant de bonté que ~~je~~ ~~peut-être~~ ~~me~~ ~~permettez~~ ~~de~~ ~~vous~~ ~~entretenir~~ ~~encore~~ ~~un~~ ~~moment~~ ~~sur~~ ~~une~~ ~~question~~ ~~étrange~~ ~~relative~~ ~~à~~ ~~la~~ ~~théorie~~ ~~des~~ ~~complexes~~ ~~Monsieur~~ ~~Klein~~ dans le mémoire ~~que~~ ~~j'ai~~ ~~dû~~ ~~été~~ ~~donnant~~ ~~une~~ ~~interprétation~~ ~~géométrique~~ ~~de~~ ~~ses~~ ~~coordonnées~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~droite~~ ~~fondée~~ ~~sur~~ ~~le~~ ~~théorème~~ ~~qu'il~~ ~~énonçait~~ ~~ainsi~~: "Si dans l'équation (en coordonnées plu"heriéennes P_{ik}) d'un complexe linéaire l'on substitue à la place les coordonnées d'une droite donnée, on aura une expression qui sera proportionnelle ~~au~~ ~~moment~~ ~~caractéristique~~ ~~du~~ ~~moment~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~droite~~ ~~donnée~~ ~~et~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~droite~~ ~~qui~~ ~~lui~~ ~~correspond~~ ~~relativement~~ ~~au~~ ~~complexe~~ ~~linéaire~~." Le théorème a été reproduit dans la géométrie de l'espace de Salmon - Biedler à Biedler (version allemande). Mais ^{en échant de} ~~ce~~ ~~qui~~ ~~est~~ ~~à~~ ~~l'origine~~ ~~de~~ ~~ce~~ ~~théorème~~ ~~que~~ ~~j'ai~~ ~~aussi~~ ~~tous~~ ~~trouvés~~ ~~dans~~ ~~la~~ ~~II^e~~ ~~édition~~ ~~allemande~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~géométrie~~ ~~de~~ ~~l'espace~~ ~~de~~ ~~Salmon - Biedler~~ ~~d'ailleurs~~ ~~très~~ ~~simple~~, ~~pour~~ ~~se~~ ~~diffier~~ ~~si~~ ~~il~~ ~~me~~ ~~semblait~~ ~~qu'il~~ ~~au~~ ~~bien~~ ~~de~~ ~~dire~~ "proportionnelle au moment etc" il fallait dire "proportionnelle à la racine carrée du moment etc", ~~après~~ ~~longtemps~~ ~~plus~~ ~~étant~~ ~~lorsqu'il~~ ~~apparut~~ ~~dans~~ ~~la~~ ~~III^e~~ ~~édition~~ ~~de~~ ~~cette~~ ~~géométrie~~. ~~Etant~~ ~~parti~~ ~~à~~ ~~la~~ ~~dernière~~ ~~édition~~ ~~de~~ ~~la~~ ~~géométrie~~ ~~de~~ ~~Salmon - Biedler~~ j'eus le plaisir d'y tomber dans une "errata" précisément cette correction: on y dit qu'elle est due à M. Sturm (Brelle's Journal. Bd 86, pag. 138). Cependant après y avoir encore réfléchi et arrêté la ~~que~~ dit M. Sturm dans le lieu cité je suis venu à la conclusion que le théorème même ainsi modifié est faux et je vous prie d'écouter mes raisons. La surprise de cette pensée m'était venue en raisonnant ainsi: soit $(c_p) = c_{12} P_{34} + \dots = 0$ un complexe linéaire; le théorème (modifié) que (c_p) est proportionnel à la racine carrée du moment des droites $p \cdot p'$

qui se correspondent relativement au complexe donné. Mais supposons pour un moment que $(c, c) = 0$, c'est-à-dire que le complexe soit spécial, alors on sait ^{positivement} que $(c p)$ est proportionnel au moment des droites (et non à sa racine carrée) des droites $p \cdot p'$ (p' étant en ce cas la droite c); il y aurait donc une exception très-singulière au théorème pour ce cas-ci. Mais en examinant un peu la démonstration donnée par M. Sturm et que moi aussi j'avais eu un moment acceptable il me paraît évident qu'elle est insuffisante. ~~M. Sturm dit ainsi~~ (j'ne fais que changer légèrement les notations) : l'on a, comme on sait :
 ~~$\frac{p'_{ik}}{p_{ik}} = -\frac{1}{2}(c, c)p'_{ik} + (c p)c_{ik}$~~ , ~~$\frac{p'_{jk}}{p_{jk}} = -\frac{1}{2}(c, c)p'_{jk} + (c p)c_{jk}$~~ . De là on tire par une ~~théorème~~ que j'ai déjà utile, que le moment des deux droites $p \cdot p'$ sera proportionnel à ~~$\frac{1}{12}p'_{12} + p'_{34} + p'_{14} + p'_{23}$~~ $= (c p)^2$. ~~est à dire au carré de (c p)~~, d'où l'on conclut le théorème en question. Mais si M. Sturm au lieu d'écrire $p'_{ik} = -\frac{1}{2}$ avait écrit, comme c'est plus juste : $p'_{ik} = -\frac{1}{2}(c, c)p_{ik} + g_{ik}(c, p)$, ~~$\frac{p'_{jk}}{p_{jk}}$~~ peut-être se serait-il aperçue que le raisonnement est insuffisant. Car le facteur p restant à la fin du calcul, ce l'on obtient $P(p \cdot p') = (c p)^2$ qui ~~l'on obtient à la fin~~ peut très-bien être une fonction ~~des~~ non seulement des coordonnées c du complexe, mais encore des coordonnées p_{ik} de la droite, pourvu qu'il soit symétrique en elles-ci. Dès lors, on ne peut plus rien conclure sur le théorème en question. J'ai même tâché de prouver qu'il est faux et voici comment. J'ai pris pour coordonnées, non homogènes, d'une droite les rapports p_{ik} ~~aux volumes des~~ des volumes des tétraèdres déterminés par deux sommets i, k du tétraèdre fondamental et deux points de la droite dont la distance soit = 1. au volume V du tétraèdre fondamental. Alors entre les 6 coordonnées d'une droite passent les deux relations caractéristiques : $(p \cdot p) = 0$, $\sum a_{mn, rs} p_{mn} p_{rs} = 1$ où m, n et r, s sont des combinaisons binaires de 1 2 3 4, et où $a_{mn, rs}$ sont des quantités construites qui dépendent seulement de la forme du tétraèdre fondamental. Cela posé l'on trouve facilement (de la même manière qu'en les coordonnées projectives) que la droite p qui correspond à p relativement au complexe $(c p) = 0$ a des coordonnées p'_{ik} telles que : $p'_{ik} = (cc)p_{ik} - 2(c p)c_{ik}$ où $\rho^2 = 4(c p)^2 \sum a_{mn, rs} c_{mn} c_{rs} - 4(cc)(cp) \sum a_{mn, rs} c_{mn} p_{rs} + (cc)^2$. On voit bien ainsi ce qu'est le facteur ρ . Maintenant comme dans ces coordonnées-ci le moment de deux droites $p \cdot p'$ est précisément égal à $6V(p \cdot p')$ l'on aura :
 $\text{mom}(p \cdot p') = -12V \frac{(cp)^2}{\rho}$
d'où l'on voit que le moment n'est pas du tout proportionnel à $(cp)^2$, car ρ est une fonction des c et des p . lorsque c est ~~un~~ complexe spécial, ~~c'est à dire une~~ droite, alors ρ^2 devient égal ~~à~~ $4(c p)^2$ et la formule précédente donne que le moins d'un facteur indépendant de p (c'est à dire $4 \sum a_{mn, rs} c_{mn} c_{rs}$) à $(cp)^2$.

moment de $p \wedge p'$ est proportionnel à (p), comme il devait être. — Il paraît aussi qu'en général lorsqu'on fait usage de coordonnées homogènes il ait moins de plaisir un peu plus le sens de la parole "proportionnel".
Si ce Pardonnez-moi, Monsieur, cette longue lettre; mais c'était une belle occasion pour moi pour soumettre mes doutes à un savant. Je vous repte encore une fois mes remerciements pour votre bonté et en même temps je vous prie encore de m'écrire encore pour me dire ~~ce que vous pensez de mes doutes et pour le prix~~ ce que je vous dois pour les mémoires que vous m'avez envoyé, ~~Il se peut que je ne puisse pas tout~~ car je disire ~~un~~ beaucoup le savoir. Vous avez déjà été trop bon de ~~me~~ me le envoyer sans me connaître et je ~~ne voudrais~~ absolument pas que vous y perdiez ^{certain} ~~me~~ ^{me} connaissons même après vous avoir expidies leur prix, ^{le} ~~de~~ toujours moi qui aurai gagné au change. Vous me ferez avec infiniment plaisir en me disant un mot sur ces doutes que je vous ai soumis.

Botre très - dévoué

Corrado Segre

(Corino, via Montebello, 26)

Herr. Dr. G. Duss. — Schweizerstrasse 19 — Dresden

N 196

1880-81

All' Illusterrimo Sig^r. Rettore

della S. Università di Torino

L'Università, studente nel 2^o anno di questo S. Università nello Studio

di Matematiche pure, prego l'U. di voler ascoltare benignamente

Egregio Signore

che sente l'anno scorso in questo Ateneo

Dobbiamo pregare la S. U. di preghiamo, la S. U. di sentire se
ci rivolgiamo per domandarle un favore, ascoltare benignamente il nostro
studiamo di un anno e mezzo studiamo
in questo Ateneo ci raggiunno la Facoltà di Matematiche pure, e
mentre posti a noi eravamo posti
come attesi dal nostro per le scienze che vi si insegnano, ma non B. Decreti
ci obbligherebbe ora a studiare due lingue ^{completamente} nuove per noi, il greco ed
il latino, per poter prendere la laurea in Matematiche. Non parlano
di un terzo esame, quello nella letteratura italiana, perché già fatto,
in questa dozzina già dov' esami abbastanza rigorosi alla bancha
e qui ci costituisce già finora li dovranno fare degli istituti tecnici, di
qui veniamo, e quindi non è più cosa nuova per noi, benché appunto
però ci paga insisto un nuovo
per questo esame, e lo già per il dì quelli
di bancha degli istituti tecnici. Ma per limitarci agli esami sul greco e
sul latino, si ben sa quanto queste 2 lingue siano difficili e quanto sia
breve il tempo che ci separa dall' ultimo esame di laurea per poter
imparare prima di questo impararne anche solo abbastanza anche poche
la grammatica di quelle 2 lingue ^{far studiare per anni ed anni i giovani} nella scuola dei ginnasi o dei licei
ed anni prima che si giunga a conoscere, oppure il decreto
ministeriale che stabilisce le norme per l'esame di quelle letterature ci obbliga

(1) L 5

costingerebbe al studiare più ancora. In più breve tempo quando un giovane, giunto all' Università, cederebbe di potersi dedicare interamente agli studi, che più lo dilettano, è duro trovare nuovi incamici, nuove occupazioni noiose ~~per lui~~ (dicono per frauenamento) per lui le quali lo distolgono da quelle che assai più gli piacciono e di sarebbero assai più proficue ~~per lui~~. Ora avremmo che lei, o signore, ci ajutasse per quanto se è possibile, a liberarci da quel fastidio.

E lo stesso utile di quelle due lingue crediamo di non errare, pensando che la lingua greca non sia ~~necessaria~~^{indispensabile} a chi voglia cercare di illustrarsi nei nostri studi, nelle Matematiche; qualche scuola ^{bellezza} ~~scuole~~ non sono più a paragonarci con ^{in cui si discute} ai tempi di Euclide e di Archimede. Alcune che non contano che qualche secolo, altre che solo da poche decine di anni ^{hanno vissuto}; eppur non si potrebbe dire che questi siano le meno belle, le meno interessanti. La lingua greca è ~~piuttosto~~ utile, ^{però}, ~~ma~~ ^{non} conveniente, già andar sicurando nella storia della matematica di qualche migliorjo d' anni fa, la lingua latina poi è ~~utile~~ ^{bellezza}, come quella che fu fino al secolo scorso quasi la sola lingua ^{usata dagli scienziati} ufficiale. Ma la lingua francese, l' inglese, la tedesca, che al giorno d' oggi sono indispensabili per conoscere ~~importanzissimi~~ ^{recenti} progressi di questo secolo, ^{che hanno ordinato le antiche e stabilite}, sono esse meno utili di Charles, ^{che non conosceva} la lingua tedesca, dovuta nella prima metà del secolo quelle ^{lingue} ^{che} ⁱⁿ ^{tutta} ^{la} ^{vita}, che in molta parte avevano già perduto prima di lui il obbligo di conoscere quelle ^{lingue} ^{moderne}, cosa che a par giustissima, non sarebbe, e lo Stein, ^{non capiva}.

Per questo del pari il lasciare a noi pure la libertà di studiare per conto

(1) Ed è anche i progressi che la Matematica in ogni giorno facendo, forse che quelli servono più delle riviste? H. Charles

nostre il latino ed il greco? d' Università si dia al candidato. Se siamo L' potrebbe esser certo che chi vuol darci ad un genere di ricerche piuttosto che ad un altro si sarebbe pure di acquistare quei mezzi, ^{che} come le lingue, ^{che} gli fossero necessarie a quello scopo.

Vorremmo ^{cosa} ^{che} ^{noi} le preghiamo quindi, o signore, a voler dispensare, ^{se Ella mi farà}, degli esami in quelle letterature, e dall' ardore con cui noi proseguiamo nelle Matematiche. Ella sarebbe di aver ben fatto. E, se il dispensare non sta nei suoi poteri, noi le supplichiamo ancora di volerci appoggiare, presso per quanto se è possibile, presso il Ministero, al quale vorremmo fare ^{in tal caso} un ricorso. ~~Il consiglio accade~~

Ei scusi tanto del disturbo, e riceva, signore, i nostri anticipati ringraziamenti.

Gli studenti di 2^o anno nella Facoltà
di Matematiche pure

N° 195

Dimostrazione sintetica di un teorema del Reye
sulle curve assintotiche della superficie di Kummer.

Il teorema consiste in questo che ogni piano tangente della superficie di Kummer considerata la tocca nel centro di uno dei due fasci di rette di uno determinato Q dei complessi quadratici di cui quella superficie è singolare, quando il piano stesso è pure tangente alla superficie singolare di quel complesso quadratico che contiene la congruenza singolare di Q ed è infinitamente vicino a Q . Da esso si trae poi, per una proposizione di Klein, il risultato del Reye che una curva delle tangenti principali della superficie di Kummer è base di un fascio di superficie del 4° ordine.

Per dimostrare quel teorema si consideri un piano singolare π di Q : sia A, B i centri dei due fasci di rette di π contenute in Q e sia P quel punto della retta singolare AB in cui π tocca la superficie singolare di Q , e P' il punto coniugato armonico di P rispetto ad A, B . La congruenza singolare di Q è base di un fascio di complessi quadratici (tra cui c'è Q) le cui coniche poste su π formano una schiera di coniche tangenti tutte alla retta AB in P' (per un teorema generale di Pasch): in questa schiera una conica degenera nella coppia di punti A, B (^{appartenente a Q} ed esiste solo più una conica degenerata nel punto P' ed in un altro punto, conica appartenente ad un certo complesso Q' ^{del fascio} rispetto ad cui π è piano singolare). Ora quando Q' è infinitamente vicino

L6 (1)

a Q , e solo allora, accadrà che la seconda conica degenera dovendo essere infinitamente vicina alla prima, il punto P' dovrà venire a coincidere con A (o con B), e quindi anche P coinciderà con A . — Il teorema è dunque dimostrato.

Torino, 15 Ottobre 1884.

(da una lettera al Reye)

6 (2)

N^o 196

Nuove conseguenze del detto teorema del Reye.

Si ha immediatamente, coi metodi esposti nella mia memoria « Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche », la proposizione seguente :

I complessi quadratici passanti per la congruenza delle rette singolari di un complesso quadratico hanno tutti la stessa caratteristica e gli stessi complessi lineari fondamentali (ed in particolare le stesse rette doppie) di questo.

Se d'altra parte il teorema di Reye vale per ogni specie particolare di superficie di Kummer, così applicando anche quella proposizione avremo :

Le linee asintotiche della superficie [2111], cioè della « Complexifiche » generale sono (intersezioni di essa con superficie quartiche) aventi la stessa

L 7 (1)

retta doppia, cioè) curve d'ordine e classe 12 aventi 4 punti singolari sulla retta doppia della superficie (e non appartenenti a superficie cubiche) le linee asintotiche della superficie [2 2 1], cioè della superficie a due rette doppie secantisi e 4 punti doppi, le curve asintotiche sono d'ordine 8 ed appartengono a superficie cubiche passanti per le due rette doppie (ma non a quadriche).

Le linee asintotiche della superficie cubica a 4 punti doppi (reciproca di quella di 4° ordine di Steiner) sono intersezioni di essa con superficie cubiche contenenti le stesse 3 rette (non passanti per punti doppi) e sono per conseguenza curve del 6° ordine intersezioni della superficie con delle quadriche (e di 4° classe).

Le linee asintotiche della superficie di Steiner di 4° ordine a 3 rette doppie sono intersezioni di essa con altre superficie di Steiner aventi le stesse rette doppie: ne segue tosto che esse sono linee razionali di 4° ordine ~~ma~~ (2^a specie) e 6^a classe aventi quelle 3 rette per corde e le cui sviluppabili osculatrici inviluppano quadriche.

Ecc. ecc.. Le superficie singolari rigate non danno risultati interessanti su questa via.

Corino, 24 Ottobre 1894.

(Lettera al Reye)
(2)

1897

Prof. Thomas Archer Hirst, P.R.S.
Professor of Mathematics in the University of London

Burin, le 23 Mars 1887

Monsieur,

Dans un très-long travail que j'écris en ce moment pour les Mathématiques Annalen j'ai besoin de ^{faire une} appliquer la théorie, des inversions de l'espace par rapport à une quadrique. (générale on décompose en un cône ou en un couple de plans) Permettez que je vous demande si vous avez développé cette théorie quelque part car alors je pourrais me borner à une citation sans développer moi-même cet argument. Je connais seulement votre mémoire sur les inversions du plan par rapport à une conique (Proceedings, Mars 1865), et mais il me semble probable que vous vous soyez aussi occupé de l'inversion dans l'espace, laquelle présente encore plus d'intérêt. M. Geiser ~~en a dit quelques mots dans son mémoire~~ s'en est occupé en 1865 et je lui écris en ce moment-même pour lui demander des détails sur ses résultats.

Permettez ^{encore} que j'profite de cette occasion pour rappeler votre attention sur quelques le contenu de quelques travaux que j'ai en l'honneur de vous envoyer dernièrement et surtout sur l'un d'eux qui montre les liens étroits qui il y a entre la géométrie métrique des complexes linéaires et celle des sphères, liens qui n'avaient pas encore été aperçus.

^{Reverez} Monsieur le Professeur, mes remerciements antérieurs et mes salutations les plus respectueuses

D^r: Corrado Segre
(Torino, via Bonafous, 3)

Al Prof. Thomas Archer Hirst, F.,R.,S.
Professore di Matematica nell'Università di Londra

TORINO, 23 Marzo 1884

Signore,

In un lungo lavoro che ho scritto per i "Mathematische Annalen"
(°) ho bisogno di applicare la teoria delle inversioni dello
spazio in rapporto ad una quadrica (generale o scomposta in un
cono o in una coppia di piani).

Permettete che vi chieda se avete sviluppato questa teoria da
qualche parte, perchè in questo caso potrei rifarmi ad una citazione
senza sviluppare io stesso questo argomento.

Conosco solo la vostra memoria sulle inversioni del piano in
rapporto ad una conica(*), ma mi sembra probabile che abbiate
anche quella dell'inversione dello spazio, la quale presenta
ancora più interesse. Il Signor Geiser se ne è occupato nel 1869
e gli ho scritto proprio ora per chiedergli i dettagli dei suoi
risultati. Permettetemi ancora di approfittare di questa occasione
per riportare la vostra attenzione sul contenuto di qualche lavor
o che ho avuto l'onore di spedirvi ultimamente e soprattutto
su quello che mostra i legami stretti tra la geometria metrica
dei complessi lineari e quella delle sfere, legami che non erano
ancora stati notati(**).

Accetti, Signor Professore, i miei ringraziamenti anticipati e
i miei più rispettosì saluti.

Dott. Corrado Segre
(Torino, Via Bonafons, 3)

Traduzione L8 (1)

(*) "QUADRATIC INVERSION OF PLANE CURVES" Roy. Soc. Proc. LONDRA 14, 15 p.,
1865

(**) "Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sferre e sulle loro mutue analogie" (Atti Acc. Torino, 19, 159-186, 1883)

(°) Forse "Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à coïnique double ou cuspidale(générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions" (Math. Ann. 24, 313-444, 8-4-1884)

trascr. L 8(2)

N° 198

Herr D^r C. P. Geiser. Docent am Polytechnikum

Zürich

Burin, le 23 Mars 1864

Monsieur,

Je vous envoie une copie d'un travail sur les géométries métriques des complexes linéaires et des sphères, que j'ai fait paraître en ces jours-ci. Si vous pourrez y jeter un regard, vous me ferez plaisir en m'en faisant la critique. — Et je vous demanderai encore un autre plaisir : en lisant votre mémoire « über die Plüschens vierten Grades, welche eine Doppelkurve zweiten Grades haben » (Bulle 70) j'y vois cette note « Über eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades » (Mittheil. der Berner naturforsch. Gesellsch. 1863), qui traite de l'inversion de l'espace par rapport à une quadrique. Serais-je indiscret en vous priant de m'envoyer une copie de cette dernière note, ou bien de me donner des détails sur ce qu'elle contient ? Je dois envoyer dans quelques semaines aux Mathematische Annalen un travail sur les surfaces du 4^e ordre à conique double ^{ou cuspidale} dans lequel je fais usage de ces inversions (et de plusieurs de leurs cas particuliers) et j'aurais besoin de connaître tout ce qui a été écrit là-dessus.

Excusez-moi mon hardiesse et agréez mes remerciements et mes salutations

D^r Corrado Legre

Al Dott.C.F.Geiser
Docente al Politecnico, Zurigo

TORINO, 23 MARZO 1884

Signore,

Vi invio una copia di un lavoro sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere, che ho realizzato in questi giorni (°). Mi farete un piacere se potete controllarlo e valutarlo.

Vi chiedo un altro piacere. Leggendo il vostro lavoro "Uber die Flachen vierten Grades, ~~womit~~ eine Doppelcurve zweiten Grades haben" (*), vedo citata una nota "Ueber eine geometrische Vorwandtschaft des zweiten Grades" ("") che tratta dell'inversione dello spazio in rapporto ad una quadrica.

Sono troppo indiscreto se vi prego di spedirmi una copia di quest'ultima nota, o meglio di darmi i dettagli su ciò che contiene? Devo spedire tra qualche settimana ai "Mathematische Annalen" un lavoro sulle superfici di 4° ordine a conica doppia o cuspidale, nel quale faccio uso di queste inversioni (e di parecchi loro casi particolari) e avrei bisogno di conoscere tutto ciò che vi è scritto. Scusi la mia arditezza e accetti i miei ringraziamenti e i miei saluti.

Dott.Corrado Segre

(°)"Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie"(Atti Acc.Torino, 19, 159-186, 1883).

(*) CRELLE 70, 8 p., 1869

(") BERN. NATUREL. GES. MITTH., 10 p., 1865

tranc L9 -

Herr Prof. Weierstrass

Berlin

Berlin, le 28 Mars 1884

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous envoyer une copie d'un mémoire, dont une partie au moins vous est due, car elle contient des recherches sur la signification géométrique des d'vn théorème ^{analytique} sur la théorie des formes bilinéaires que ~~vous~~ ^{est à vous} ~~est~~. Je parle du théorème fondamental pour cette théorie : " la condition nécessaire et suffisante pour que deux couples de formes bilinéaires puissent se transformer linéairement l'un dans l'autre est que les déterminants de leurs faisceaux aient les mêmes diviseurs élémentaires ". ^{Q vrai dire} ~~Lorsqu'en~~ dans ce mémoire et dans ^{un autre} qui ~~se~~ suivra bientôt je n'ai appliqué à la géométrie que ~~le~~ théorème qui regarde les formes quadratiques, mais dans un mémoire que j'ai envoyé à l'académie des Lincei j'ai aussi étudié le cas de formes bilinéaires quelconques.

~~Je vous prie de saluer M. Kronecker~~ Est-il que vous n'avez jamais pensé à étendre votre méthode et votre théorème ~~sont~~ en considérant, au lieu de deux, plusieurs formes quadratiques, ^{au même} ~~sont~~ en considérant au lieu de deux formes quadratiques ^{plusieurs} ~~deux~~ formes de degrés quelconques (auquel cas on pourrait substituer au déterminant ^{et} ~~de~~ discriminant et certaines autres fonctions ~~des coefficients~~ qui en s'annulant indiquent que la forme a plusieurs points singuliers) ? ^{C'est renvoyant avec celles tous les problèmes de la théorie} J'ai déjà fait ces mêmes questions à des invariants des formes : et je comprends que par cette raison même l'étendre dont je parle doit présenter des difficultés ; cependant, ~~le caractère de votre méthode~~ il est possible de résoudre ces problèmes généraux par quelque méthode, il me semble que ~~elle~~ doit être par la voie convenablement étendue.

M. Kronecker, avec lequel je suis entré en relation précisément à propos de la théorie des formes bilinéaires, mais j'ignore s'il vous en a parlé.

Agitez, Monsieur, mes salutations respectueuses

Votre dévoué

D^r Corrado Segre

L 10 (2)

Al Prof. Weierstrass

Berlino

TORINO, 28 Marzo 1884

Signore,

Ho l'onore di spedirvi una copia di una memoria (°), di cui almeno una parte vi è dovuta, perchè contiene le ricerche sul significato geometrico di un teorema analitico sulla teoria delle forme bili=
neari che è vostra; parlo del teorema fondamentale di tale teoria:
"La condizione necessaria e sufficiente perchè due coppie di for=
me bilineari possano trasformarsi linearmente l'una nell'altra, è
che i determinanti dei loro fasci abbiano gli stessi divisori ele=
mentari".

A dire il vero in questa memoria e in un'altra che seguirà presto ("'), non ho applicato alla geometria che la parte di questo teore=
ma che riguarda le forme quadratiche, ma in una memoria che ho spe=
dito all'Accademia dei Lincei (*), ho anche studiato il caso di
forme bilineari qualsiasi. Non avete mai pensato di estendere il
vostro metodo e il vostro teorema considerando, invece di due, pa=
recchie forme quadratiche, oppure considerando invece di due forme
quadratiche parecchie forme di grado qualunque (in quel caso si po=
trebbe sostituire al determinante e ai suoi subdeterminanti. Il
discriminante e alcune altre funzioni che si annullano indicano
che la forma ha parecchi punti singolari?). Si risolverebbero con
ciò i principali problemi della teoria degli invarianti delle for=
me: e comprendo che proprio per questa ragione l'estensione di
cui parlo debba presentare delle difficoltà; tuttavia, se fosse
possibile risolvere questi problemi generali con qualche metodo ,

mi sembra che ciò debba essere grazie al vostro utile apporto.
Ho già fatto queste stesse domande al signor Kronecker, con cui
sono entrato in relazione precisamente a proposito della teoria
delle forme bilineari, ma ignoro se ve ne abbia parlato.

Accetti, Signore, i miei rispettosi saluti

Vostro
Corrado Segre

(°) "Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari
e la coppia delle loro forme reciproche"
(Giorn. di Mat., 22, 29-32, 17 Ottobre 1883)

(") "Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques"
(Math. Ann., 24, 152-156, 11 Aprile 1884)

(*) "Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in
uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni"
(Mem. Acc. Lincei, (3), 19, 127-148, Aprile 1884)

N° 200

Mr Arthur Cayley, F. R. S.,
Sadlerian Professor of Mathematics in the University of
Cambridge

Turin, le 15 Mars 1884

Monsieur,

Je vous envoie une copie d'une note sur les géométries métriques des complexes linéaires et des sphères, en souhaitant que vous vous daigniez y jeter un regard, car les analogies que j'y découvre entre ces deux géométries (par des méthodes qui vous sont dues en partie) me paraissent fort remarquables.

Agreer mes salutations les plus respectueuses

D^r Corrado Legre

L 11

N^o 201

Prof. Luigi Cremona.

Roma

Turin, 15 Marzo 1884

M^o Signore,

Mi permetta inviarle una mia ~~nuova~~ nota sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere; la quale opera non le rieta affatto più d'interesse, sia perché di argomenti affini Ella offre già ad occuparsi, sia perché so che Ella far quest'anno a questa università un corso di geometria non-euclidea, sia infine perché in questo lavoro ho mostrato dei legami tra quelle due geometrie metriche, i quali finora erano passati inosservati, malgrado le analogie assai curiose a cui essi conducono tra teoremi notissimi riguardanti da un lato i complessi lineari e dall'altro le sfere.

Salutandola collo massima stima mi dichiaro

Suo dev^{mo}D^r Corrado SegreN^o 202A M^o le prof. G. Darboux - Paris.

Monsieur

Turin, le 15 Marzo 1884

Je vous envoie deux notes copies d'une note sur les géometries métriques des complexes linéaires et des sphères qui, j'espère, ne vous déplairont pas tout-à-fait, car elle se lie à des recherches que vous avez fait autrefois, et elle montre (du moins si je dois croire ce que m'en écrit ce juge si compétent qu'est M. Klein) des analogies très-intéressantes entre ces deux géometries métriques.

Comme M. G. Koenigs, qui a été votre élève, s'est aussi occupé de ces analogies, et comme je ne connais pas son adresse, je vous prie de vouloir lui faire parvenir une de ces deux copies de ma note, si cela ne vous incommoder pas trop.

Excusez-moi mon hardiesse et recevez mes remerciements et mes respects. Votre D^r C. Segre

M² Arthur CayleyCambridge ~~London~~

Curis, le 14 Mai 1884

Monsieur,

En feuilletant le tome 50 du Journal de Brême j'y trouve avec surprise à la pag. 317 dans votre note de "Recherches sur les Matrices" (1854) une idée importante et ^{dont} je ne pensais pas qu'elle fut connue depuis si longtemps : c'est ~~à dire~~ que toute la théorie et la classification des homographies ^(pag. 313) se rattachent aux propriétés des ~~diviseurs~~ ^{de} une matrice, ^{ou} à ~~dire~~, comme l'on dit d'après Weierstrass, aux diviseurs élémentaires d'un certain déterminant. Vous comprendrez tout l'intérêt que je porte à cette matière lorsque je vous dirai que j'ai justement étudié (^{l'antécédent dans le passé}) cette théorie et cette classification des homographies (dans un espace à n dimensions) par la méthode que vous indiquez dans un mémoire qui paraîtra dans les Acti de l'A. Académie des Lincei et dont vous pourrez voir dans les derniers Transconti de cette Académie le résumé contenu dans la relation qu'en a fait M. Cremona. (1)

Dans la ~~deuxième~~ page dont je vous parlais, je vois clairement que vous aviez déjà ^{il y a trente années} une idée ~~tout à fait~~ complète de cette théorie (il faudrait seulement corriger en disant que pour l'homologie ^{dans votre symbolique} on a le symbole $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et non pas $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$) ; mais vous ne la développez pas. Cependant

(1) Veuillez aussi un mémoire ^{sur le même argument} de mon ami le D^r Gino Loria, dans le dernier cahier du Giornale di matematiche

dant comme vous finissez votre ~~brave~~ note en disant que vous reviendrez
à cette théorie dans une autre occasion, je voudrais vous prier de me dire
si (et dans quel travail) vous y êtes réellement revenu; soit par le vif inté-
rêt que je prends à cela, soit aussi parce que, ayant encore à corriger les
épreuves du mémoire dont je vous parlais je tiendrais beaucoup à ~~savoir~~
avertir ~~avec plus de~~ ~~que~~ détails que je puis que vous m'avez précédé.
~~je vous envoie quelques travaux publiés dernièrement.~~
Veuillez m'excuser si je vous dérange et recevez ~~par anticipation~~
mes salutations et mes remerciements anticipés

D^r Bonado Segre
(Torino, via Bonafous, 3)

A M. Arthur Cayley

Cambridge

TORINO, 14 Maggio 1884

Signore,

Sfogliando il numero 50 del Journal de Crelle ho trovato con sorpresa a pag. 317 nella vostra nota "Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indeterminée" (pagg. 313-317), un'idea importante e perciò non ho pensato che quella era conosciuta da molto tempo: cioè che tutta la teoria e la classificazione delle omografie si rifanno alle proprietà di una matrice, oppure, come si dice dopo Weierstrass, ai divisori elementari d'un certo determinante.

Comprenderete tutto l'interesse che ho per questa materia quando vi dirò che ho giustamente studiato (nell'autunno scorso) questa teoria e questa classificazione delle omografie (nello spazio a n dimensioni), col metodo che voi indicate, in una memoria che apparirà negli Atti della R. Accademia dei Lincei e di cui potrete vedere negli ultimi Transulti di questa Accademia (°) e contenuto nella relazione che ne ha fatta M. Cremona (veda anche una memoria sullo stesso argomento del mio amico Dr. Gino Loria, nell'ultimo quaderno del Giornale di Matematiche (*)). Nella pagina di cui vi ho parlato vedo chiaramente che avete già da 30 anni un'idea completa di questa teoria (bisognerà solo correggere usando nella vostra simbologia per l'omologia il simbolo $\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}$ e non $\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix}$); ma non lo sviluppate. Ma siccome finite la vostra nota dicendo che voi tornerete a questa teoria in un'altra occasione, vi pregherei di dirmi se (e in quale lavoro) siete realmente tornato; sia per il vivo interesse che ho, sia perchè, avendo ancora da correggere le prove della memoria di cui vi ho parlato, ci terrei molto ad avere

maggiori dettagli da voi che mi precedete.

Vi invio i qualche lavoro che ho pubblicato ultimamente(").

Vogliate scusare il disturbo e accettate i miei saluti e i miei ringraziamenti anticipati.

Dr.Corrado Segre
(Torino,Via Bonafons,3)

(°)"Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni"
(Mem.Acc.Lincei,(3)19,127-148,Aprile 1884)

(*) "SULLE CORRISPONDENZE PROGETTIVE FRA DUE PIANI E FRA DUE SPAZI"
GIORN. DI MATEM. 22, 1883

(")"Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques "
(Math.Ann.24,152-156,11 Aprile 1884)

"Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale(générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions"
(Math.Ann.24,313-444,8 Aprile 1884)

Herr Prof. Dr. Oscar Schlömilch, professor der Mathematik
Kgl. Sächs. Tech. Schulrat

Leipzig.

Buris, le 17 Janvier 1884

Monsieur,

Je vous envoie avec cette lettre en un pli chargé une note "Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes", que je vous prie de publier dans votre Zeitschrift für Mathematik und Physik.
Dans cette note je m'occupe surtout du complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à une droite fixe, complexe quadratique très remarquable dont la surface singulière se décompose en un cylindre droit et dans le cercle imaginaire à l'infini. Dans la 1^e partie ~~de ma note~~ j'étudie élémentairement et par voie synthétique ce complexe; dans la 2^e je me sens des coordonnées pour en trouver d'autres propriétés, qui regardent surtout la série homofocale de ce complexe, série qui se compose de complexes quadratiques généraux de la classe $[(22)11]$ de M. Weier, et j'arrive ainsi et de ces complexes je trouve ainsi une définition géométrique remarquable. Enfin dans la 3^e partie je m'occupe ^{plusièrement} de la congruence, de la surface réglée et des groupes de droites qui ont des moments donnés par rapport respectivement à 2, 3, 4 droites fixes.

Dans un mémoire qui va paraître dans le 2^{me} cahier du nouveau volume des Mathematische Annalen, je me suis occupé (avec mon ami Loria)

de trouver tous les complexes quadratiques qui peuvent s'obtenir comme complexes des droites couplant harmoniquement deux surfaces du second ordre. Le complexe des droites qui ont moment donné par rapport à une droite fixe appartient aussi à cette catégorie : je l'ai simplement affirmé dans ce mémoire, et je le prouve dans la note que je vous envoie. C'est pour cela que je désirerais que celle-ci fut publiée le plus tôt possible. Vous m'obligeiez infiniment en la ^{demandant un peu de place} publiant dans le prochain numéro de votre *Leitschrift*. Mais si cela ne vous est pas possible, je ne vous serai pas moins reconnaissant pour sa publication.

Agitez, Monsieur le Professeur, mes salutations les plus respectueuses

N° 205

Cartoline postale

Burin, le 8 Février 1893
Monsieur le Professeur

Je reçois votre lettre, dont je vous remercie : j'espère que vous aurez tout-à-fait guéri de votre maladie. — lorsque j'avais écrit ma note en français, plutôt qu'en italien, je n'avais pas réfléchi à ce que vous me faites justement remarquer, c'est-à-dire que dans votre *Leitschrift* n'ont jamais paru que des travaux écrits en allemand. Quasi je regrette de vous avoir incommodé en vous envoyant mon manuscrit : le faire traduire en allemand vous coûterait aussi plus de peine que le mémoire ne vaille. J'accepte donc volontiers l'offre que vous me faites de le renvoyer aux *Mathematische Annalen*, et je vous remercie de la bonté que vous avez de vous charger vous-même de cet envoi. J'écris tout-de-suite à M. Klein, avec lequel j'ai aussi le plaisir d'être en relation, pour l'en aviser.

En attendant recevez encore, Monsieur, mes remerciements et mes salutations les plus cordiales et respectueuses.

J. P. Je prends la permission de vous envoyer une copie d'un travail qui est paru il y a quelques jours dans le *Giornale*.

Votre

D^r Corrado Legre
(Borino, via Bonafous, 3)

Votre très-devoué

D^r Corrado Legre

Al Prof.D.Oscar Schlomilch,

Professore di Matematica

Kgl.Sachs.Geh.Schulrath

Lipsia

TORINO, 17 Gennaio 1884

Signore,

Vi spedisco in questa lettera in un plico una nota "Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes"(), che vi prego di pubblicare nel vostro "Leitschrift für Mathematik und Phisika". In questa nota mi occupo soprattutto del complesso di rette che hanno un momento dato in rapporto ad una retta fissa, complesso quadratico molto notevole la cui superficie singolare si scomponе in un cilindro retto e in un cerchio immaginario all'infinito. Nella prima parte studio elementarmente e per via sintetica questo complesso; nella seconda mi servo di coordinate per trovarne altre proprietà, che riguardano soprattutto la serie omofocale di questo complesso, serie che si compone di complessi quadratici generali della classe $\boxed{(22)11}$ di Weiler, e di questi complessi trovo una definizione geometrica notevole. Infine nella terza parte mi occupo brevemente della congruenza, della superficie rigata e del gruppo di rette che hanno dei momenti dati in rapporto a 2, 3, 4 rette fisse. In una memoria che apparirà nella seconda sezione del nuovo volume dei "Mathematische Annalen" (°) mi sono occupato (col mio amico Gino Loria) di trovare tutti i complessi quadratici che si possono ottenere come complessi di rette che tagliano armonicamente due superfici del secondo ordine. I complessi di rette che hanno dei momenti determinati in rapporto ad una retta fissa appartengono a questa categoria: l'ho affermato in modo semplice in questa memoria, e lo provo nella nota che vi spedisco. È per questo che desidero sia pubb

blicata al più presto. Sarei molto obbligato di avere un posto
piccolo nel prossimo numero della vostra Leitschrift.

Ma se ciò non vi sarà possibile, non vi sarò ugualmente meno
riconoscente che per la pubblicazione.

Accetti, Signor Professore, i miei saluti più rispettosi.

Vostro Corrado Segre
(Torino, Via Bonafons, 3)

(^o) Journ. für Math., 97, 95-110, 6 Gennaio 1884.

(^o) "Sur les différentes espèces de complexes du 2° degré des
droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2°
ordre" (Math. Ann., 23, 213-234, Luglio 1883)

Cartolina Postale

TORINO, 8 Febbraio 1884

Signor Professore,

Ricevo la vostra lettera di cui vi ringrazio; spero che siate gua~~to~~
rito dalla vostra malattia.

Quando avevo scritto la mia nota in francese^(°), piuttosto che in italiano, non avevo riflettuto su quello che mi fate giustamente notare, cioè che nella vostra Leitschrift non sono stati pubblicati che lavori scritti in tedesco.

Mi spiace anche di avervi scomodato spedendovi il mio manoscritto; tradurlo in tedesco vi costerà più pena del valore della memoria. Accetto dunque volentieri l'offerta che mi fate di rispedirlo ai Mathematische Annalen e vi ringrazio della bontà che avete di prendervi l'onere della spedizione.

Scrivo subito al Signor Klein, col quale ho il piacere di essere in relazione, per avvisarlo.

In attesa, ricevete ancora Signore, i miei ringraziamenti e i miei saluti più cordiali e rispettosi.

Vostro devotissimo
Dott. Corrado Segre

P.S. Colgo l'occasione per spedirvi una copia di un lavoro che è uscito qualche giorno fa' su "Il Giornale"^(*)

(°) "Sur les droites qui ont des moments données par rapport à des droites fixes" (Journ. für Math., 97, 95-110, 1884).

(*) "Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche" (Giorn. di Mat. 22, 29-32, 1883)

Herr Prof. Leopold Kronecker,
professor der Mathematik an der Universität zu Berlin

Curin, le 16 Novembre 1883

Monsieur,

Sans avoir le plaisir de vous être connu, je prends la permission de vous écrire pour vous demander quelques renseignements sur la théorie des formes bilinéaires, théorie dont je m'occupe depuis quelque temps, spécialement ~~pour~~ en une des ^{2^e} applications géométriques. ~~je suis sûr que bien que je soit tout~~
~~s'ai tant de confiance dans votre connoissance que, dess que je suis sûr que vous me~~
~~donnerez ces renseignements.~~

En 1869 ^{savant} votre ami, M. Weierstrass, a donné dans un mémoire des Monatsberichte de Berlin un théorème fondamental sur la théorie des formes bilinéaires et quadratiques, c'est-à-dire il a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que deux séries (Schaaren, suivant votre expression) ~~complexes~~ de formes quadratiques $u\phi + v\psi$, $u\phi' + v\psi'$ puissent se transformer linéairement ^{l'une dans l'autre} est que les déterminants de $u\phi + v\psi$, $u\phi' + v\psi'$ aient les mêmes diviseurs élémentaires (Elementartheiler). Mais M. Weierstrass n'a pas exclu le cas dans lequel ces déterminants sont nuls identiquement. Or dans les remarques que vous, Monsieur, avez fait suivre à ce mémoire, vous considérez précisément les séries pour lesquelles se présente ce fait, et vous avez démontré ^{la importante proposition} qu'une telle série peut toujours être représentée par

$$u(f_1x'_{m+1} + f_2x'_{m+2} + \dots + f_mx'_{2m} + \Phi) + v(\varphi_1x'_{m+1} + \varphi_2x'_{m+2} + \dots + \varphi_mx'_{2m} + \Psi)$$

où Φ et Ψ sont des formes quadratiques de $x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_{n-1}$ et f_i, φ_i sont des formes linéaires de toutes les n variables $x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}$. Mais ce que je ne trouve pas dans

L 16 (2)

voire nulle c'est la condition nécessaire et suffisante pour que deux séries de formes quadratiques de cette espèce particulière puissent se transformer linéairement l'une dans l'autre, ^{c'est à-dire qu'elles soient équivalentes.} Il me semble que cette condition doit être la suivante : que la série $uf + vf$ et son analogue (qui sont deux séries pour lesquelles les déterminants ne sont pas tous identiquement) ^{soient elles-mêmes équivalentes} puissent se transformer linéairement l'une dans l'autre ^(sont à-dire soient équivalentes); de manière qu'en appliquant le théorème de M. Weierstrass à ces séries à un nombre moindre de variables on aura précisément la condition cherchée. En d'autres termes on aurait ainsi ^{qui il m'imposeoit beaucoup d'avoir, c'est à-dire} tous les cas que peut présenter une ~~telle~~ ² série de formes quadratiques dont le déterminant soit identiquement nul, du point de vue de l'algèbre, des transformations linéaires, et par conséquent aussi tous les invariants absolus d'une telle série de formes. Mais comme ce n'est là qu'un résultat que je ne suis pas encore réussi à prouver ^{rigoureusement pour tous les cas}, je désire vivement de savoir si vous vous êtes déjà occupé de cette question et quels sont les résultats que vous avez obtenus. Peut-être ^{dans le cas contraire} pourrez-vous répondre avec peu de mots cette question qui m'éclairerait sur une chose qui m'intéresse beaucoup, ^{mais qui en même temps me présente quelque difficulté,}

Permettez-moi encore une autre question. Dans un autre ^{mémoire très important et très connu} des Monatsberichte, « Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen » vous avez démontré, Monsieur, que si f et f' sont deux que si f et f' sont deux formes bilinéaires conjuguées, dans le déterminant de $uf + vf'$ aura les diviseurs élémentaires ^{satisfaisant à la condition d'être} deux à-deux du même degré et correspondants à des valeurs réciproques

L (16) 3

de $u:v$, exceptés ceux de la forme $(u+v)^{2x+1}$ et $(u-v)^{2x}$. Or il m'importerait beaucoup, pour mes recherches, de savoir si, réciproquement, étant donné <sup>alors-ci sont les seules conditions aux-
quelles répondent les deux diviseurs élémentaires du déterminant de $uf+vf'$, c'est à-dire si</sup> un système de diviseurs élémentaires satisfaisant à ces conditions, on puisse peut trouver deux formes conjuguées f, f' telles que le déterminant de $uf+vf'$ ait précisément ces diviseurs élémentaires. J'ai quelques raisons pour en douter, mais je ne suis pas encore assez fort analyste pour trouver les autres conditions, si d'y en a. En conséquence je vous prie ~~me~~, Monsieur, de me dire si vous avez étudié cette question, qui me semble très-intéressante, et quels sont les résultats auxquels vous êtes parvenu. Et s'il arrive que vous n'êtes pas encore occupé et que ma lettre vous y fasse penser, je serai doullement content de l'avoir écrite, car non seulement moi, mais aussi la science y aura gagné.

Je vous demande encore excuse pour la liberté que je me suis prise ~~en~~, tout-
et en attendant avec impatience votre réponse pour laquelle je vous remercie déjà, je
suis me déclare, Monsieur, avec la plus grande estime

Votre très-dévoué

D^r Corrado Segre

(presso la R. Università di Torino. Italia)

11^o

l'au

1^o-

es

Al Professor Leopoldo Kronecker

Professore di Matematica presso l'Università di Berlino

Torino, 16 Novembre 1883

Signore,

Senza avere il piacere di esservi conosciuto, mi permetto di scrivervi per chiedervi qualche indicazione sulla teoria delle forme bilineari, teoria della quale mi occupo da qualche tempo, specialmente in vista delle sue applicazioni geometriche.

Ho tanta fiducia nella vostra cortesia che, malgrado la mia audacia, sono sicuro che mi darete queste indicazioni.

Nel 1868 il vostro sapiente amico, il signor Weierstrass, ha dato in una memoria dei Monatsberichte di Berlino, un teorema fondamentale sulla teoria delle forme bilineari e quadratiche ("), cioè ha dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente perchè due serie ("Schaaren", seguendo la vostra espressione) di forme quadratiche $u.F + v.G, u.F' + v.G'$ possano trasformarsi linearmente l'una nell'altra, è che i determinanti di queste abbiano gli stessi divisori elementari (Elementartheiler).

Il signor Weierstrass aveva però escluso il caso che questi determinanti fossero nulli identicamente. Ora nei lavori che voi Signore avete fatto seguire a questa memoria, considerate precisamente le serie per le quali si presenta questo fatto, e avete dimostrato l'importante proposizione che una tale serie possa sempre essere rappresentata da $u.(f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + F) + v.(g_1x_1^2 + \dots + g_{m-1}x_{m-1}^2 + G)$, dove F e G sono delle forme quadratiche di x_1, x_2, \dots, x_{m-1} e f_i e g_i sono delle forme lineari di tutte le N variabili x_1, x_2, \dots, x_{m-1} . Ma quello che non trovo nella vostra nota è la condizione necessaria e sufficiente perchè due serie di forme quadratiche di questa specie particolare possano trasformarsi linearmente l'una nell'altra, cioè che siano equivalenti. Mi sembra che questa condizione debba essere la seguente: che la serie $u.F+v.G$ e la sua analoga (che sono due serie per le quali i determinanti non sono nulli identicamente) siano esse stesse equivalenti, in modo che applicando il teorema di Weierstrass a queste ultime serie abbia un numero medio di variabili o precisamente la condizione cercata. In altri termini si avrebbe così quello che mi importerebbe molto ottenere, cioè tutti i casi che può presentare, dal punto di vista dell'algebra delle trasformazioni lineari, una serie di forme quadratiche il cui determinante sia identicamente nullo, e di conseguenza anche tutti gli invarianti assoluti di una tale serie di forme. Ma siccome questo è un risultato che non sono ancora riuscito a provare rigorosamente per tutti i casi, desidero vivamente sapere se vi siete già occupato di questa questione e quali sono i risultati che avete ottenuto. Forse in caso contrario potreste risolverla con poche parole e chiarirmi una cosa che mi interessa molto. Permettetemi ancora una domanda. In una

altra memoria molto importante e molto conosciuta di Monatsberichte "Uber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen 3"^(°), avete dimostrato che se f e f' sono due forme bilineari coniugate, il determinante di $u.f+v.f'$ avrà i divisori elementari soddisfacenti la condizione d'essere a due a due dello stesso grado e corrispondenti a dei valori reciproci di u, v eccetto quelli della forma $(u+v)^{2x+1}$ e $(u-v)^{2x}$. Ora m'importerebbe molto, per le mie ricerche, sapere se reciprocamente, queste sono le sole condizioni alle quali soddisfino i divisori elementari del determinante di $u.f+v.f'$, cioè, essendo dato un sistema di divisori elementari, soddisfino queste condizioni o si possano trovare due forme coniugate f e f' tali che il determinante di $u.f+v.f'$ abbia precisamente questi divisori elementari. Avrei qualche ragione per dubitarne, ma non sono ancora un abile analista per trovare le altre condizioni, ammesso che ce ne siano. Di conseguenza vi prego, signore, di dirmi se avete studiato questa altra questione, che mi sembra molto interessante, e quali sono i risultati a cui siete pervenuto. E se per caso non ve ne siete ancora occupato e la mia lettera ve ne facesse pensare, sarei doppiamente contento di averla scritta, perchè non solo io ma anche la scienza ne avrà guadagnato. Chiedendovi ancora scusa per la libertà che mi sono preso, e attendendo con impazienza la vostra risposta per la quale vi ringrazio anticipatamente, vi dichiaro la mia profonda stima. Vostro devotissimo

Corrado Segre
(Università di Torino, Italia)

(["]) "Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen" Berl. Monats. 28 p., 1868.

([°]) Berl. Monats. , 397-447, 1874.

N° 207

L 17 (1)

Herr Professor Dr. L. Kronecker

Berlin, le 10 Decembre 1883

Monsieur,

Berlin, W.
Bellevuestrasse 13

Je vous remercie vivement pour les explications que vous avez bien voulu me donner sur les deux questions que je vous avais faites, soit pour le cadeau, que vous avez eu la bonté de me faire de votre mémoire "Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen", et que je conserverai précieusement. J'ai retardé à vous écrire pour étudier vos mémoires de Janvier, Février et Mars 1874, mémoires que je ne connaissais pas encore, et qui, avec les nouveaux détails contenus dans votre lettre et dans votre carte postale, m'ont parfaitement élucidé sur la question fondamentale des conditions pour l'équivalence de deux faisceaux quelques-unes de formes quadratiques. J'étais arrivé par mes propres recherches à un système d'invariants d'un tel faisceau, mais je n'avais pas encore vu l'importance de cet autre système d'invariants que vous avez introduit : les degrés des équations qui lient les dérivées partielles de la forme ~~quelconque~~ générale du faisceau. Je préfère, à vous dire le vrai, ~~la~~ cette manière dernière ~~que~~ méthode que vous avez adoptée pour exprimer l'équivalence de deux faisceaux, où le système complet des invariants d'un faisceau donné (^{c'est-à-dire la} méthode que dont vous avez fait usage, à ce que vous me dites, dans votre cours de l'été 1882), à celle qui faisait usage de

L17(3)

la considération des faisceaux élémentaires. Je sais bien qu'au fond les résultats sont les mêmes, mais j'aime à éviter l'usage de formes particulières ~~d'équations~~, c'est-à-dire de formes ^{formes canoniques} pour l'étude de formes générales. ~~des équations canoniques~~ Si parfois ω ne possède pas une analyse si puissante qu'on ne puisse éviter ces ^{formes canoniques} ~~équations~~ dans une ^{recherche} ~~transformation~~, il faut du moins qu'elles ne paraissent plus dans les résultats. En me rappelant ce que vous avez écrit à propos des ~~me~~ recherches ^{sur les formes bilinéaires} de M. Jordan, je crois que vous pensez aussi comme moi.

Et à ce propos je ne sais si vous avez remarqué ~~que la~~ ~~les~~ ~~sont~~ ~~les~~ ~~équations~~ plus grande partie des écrivains paraissent au contraire s'occupent plutôt des ~~équations~~ ^{formes} canoniques que de la condition générale d'équivalence établie par le moyen du système complet des invariants. Dans ma thèse pour le doctorat (qui paraîtra bientôt dans les mémoires de l'Académie de Turin) je me suis occupé précisément, entre autres choses, de l'interprétation géométrique du théorème de M. Weierstrass sur le système des invariants ~~de~~ d'un faisceau de formes quadratiques dont le déterminant ne soit pas ~~pas~~ identiquement nul (le cas d'un faisceau de formes bilinéaires est traité dans un mémoire présenté à la R. Académie des Lincei), et j'ai remarqué précisément que ~~plusieurs~~ plusieurs géomètres ayant voulu appliquer ces recherches à différents sujets de géométrie (et on peut en faire effectivement des applications géométriques très importantes) avaient toujours fait usage, non pas de ce théorème même, mais des équations canoniques ^{dont M. Weierstrass avait écrit vers} que M. Weierstrass avait écrit pour établir son théorème, ~~mais qui n'ont certainement pas l'importance (ni analytique ni géométrique) de celui-ci : de~~ qui est bien étrange cette manière on était contraint à changer la forme des équations quadratiques pour chaque système de degrés des diverses éléments !

Maintenant,

L 17 (3)

à la suite de votre lettre je m'occupe de l'interprétation géométrique de vos résultats sur les faisceaux dont le déterminant est nul. (avec les subdivisions d'un certain ordre) La considération d'un espace (Mannigfaltigkeit) linéaire à n dimensions nous permet de représenter par un point chaque système de valeurs des n variables x_i ; de sorte qu'un faisceau de formes quadratiques est représenté par un faisceau de surfaces du 2^e ordre. Si le déterminant de ces formes est nul, ces surfaces sont toutes des cônes. Quel est le lieu des sommets de ces cônes? Supposons qu'entre les dérivées partielles de la forme générale des faisceaux passe une seule équation linéaire, dont le degré par rapport à u, v soit m : alors le lieu des sommets des cônes du faisceau est une courbe (Normalcurve) de l'ordre m , qui est contenue dans un espace linéaire à n dimensions. C'est ainsi que dans l'espace ordinaire à 3 dimensions il y a deux espèces de faisceaux de cônes: les faisceaux de cônes ayant le même sommet ($m=0$) et ceux des cônes dans lesquels les sommets ont pour lieu une droite ($m=1$), dans l'espace à 4 dimensions il y a encore, outre ces deux espèces de faisceaux une espèce composée de faisceaux dont les sommets des cônes forment une conique ($m=2$). Cette interprétation géométrique du degré de la relation qui lie les dérivées de $u^p + v^q$ ne paraît remarquable. Les relations entre ces dérivées, c'est-à-dire si les surfaces du 2^e ordre du faisceau ont, non pas seulement un point, mais une droite, un plan, etc.. double, alors les degrés en u, v de ces relations dépendent des degrés des lieux géométriques de ces espaces doubles; mais je n'ai pas encore fini ces recherches. — lorsque je les aurai finies et complétées j'en ferai une note "Sur les faisceaux de cônes quadratiques", si vous demanderai la permission de vous envoyer, pour qu'il

L 17 (a)

soit publié dans votre "Journal für Mathematik."

Quant à la dernière demande que j'avois faite, j'attends impatiemment que vous puissiez nous en occuper. Il me semble que le ~~question~~ ~~est~~ les particularités que vous avez trouvées pour les systèmes des invariants d'un système de deux formes singulières (f, f'), ^{entre lesquels il est présent} c'est à dire si étant donné un tel système d'invariants on puisse trouver les formes correspondantes f, f' , ne peut être résolu qu'avec difficulté en composition additivement ces formes par l'addition des formes élémentaires qui correspondent à ces invariants.

En attendant, je vous remercie encore, Monsieur, de votre courtoisie envers moi et vous envoie mes salutations les plus respectueuses.

Votre très-dévoué
Corrado Segre.

Al Prof.L.Kronecker

Berlino, Bellevuestrsse 13

Torino, 10 Dicembre 1883

Signore,

Vi ringrazio vivamente sia per le spiegazioni che avete voluto darmi sulle questioni che vi avevo posto, sia per il dono, che avete avuto la bontà di farmi, della vostra memoria "Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen"(^o), che conservò con cura. Ho ritardato a scrivervi per studiare le vostre memorie di Gennaio, Febbraio e Marzo 1874 (*); memorie che non conoscevo ancora e che, con i nuovi dettagli contenuti nella vostra cartolina postale, mi hanno perfettamente chiarito la questione fondamentale delle condizioni per l'equivalenza di due fasci qualsiasi di forme quadratiche. Ero arrivato con le mie ricerche ad un sistema di invarianti di un tal fascio, ma non avevo ancora visto l'importanza di quest'altro sistema di invarianti che mi avete introdotto: i gradi di equazioni che legano le derivate parziali della forma generale del fascio. Preferisco, addir la verità, quest'ultimo metodo che avete adottato per esprimere l'equivalenza di due fasci o il sistema completo di invarianti d'un fascio dato (cioè il metodo di cui avete fatto uso, stando a ciò che mi dite, nel vostro corso dell'estate '82), a quello che faceva uso della considerazione dei fasci elementari. So bene che in fondo i risultati sono gli stessi, ma preferisco evitare l'uso di forme particolari cioè di forme canoniche per lo studio di forme generali. Se non si possiede magari una analisi così potente da non poter evitare queste forme canoniche in una ricerca, bisogna almeno che esse non compaiano più nei

risultati. Ricordandomi ciò che mi avete scritto a proposito delle ricerche sulle forme bilineari del signor Jordan, credo che la pensiate abbastanza come me. E a questo proposito non so se avete notato che la maggior parte degli studiosi sembrerebbe, al contrario, che si occupi piuttosto di forme canoniche che della condizione generale di equivalenza, stabilità per mezzo di un sistema completo di invarianti. Nella mia tesi per il Dottorato (che comparirà presto nelle memorie dell'Accademia Reale di Torino) mi sono occupato precisamente, tra le altre cose, dell'interpretazione geometrica del teorema di Weierstrass sul sistema di invarianti di un fascio di forme quadratiche, il cui determinante non sia identicamente nullo (il caso di un fascio di forme bilineari è trattato in una memoria presentata alla Reale Accademia dei Lincei (")), e ho sottolineato precisamente che parecchi geometri, avendo voluto applicare queste ricerche a differenti soggetti di geometria (e si possono fare effettivamente delle applicazioni geometriche molto importanti), avevano sempre fatto uso non di questo stesso teorema, ma di equazioni canoniche di cui il signor Weierstrass si era servito per stabilire il suo teorema, ma che non hanno di certo l'importanza (né analitica né geometrica) di questo: in questo modo si era obbligati a cambiare la forma delle equazioni quadratiche per ciascun sistema di gradi dei divisori elementari! Ora, in seguito alla vostra lettera, mi occupo dell'interpretazione geometrica dei vostri risultati sui fasci il cui determinante è nullo (con i suoi subdeterminanti di un certo ordine). La considerazione di uno spazio (Mannigfaltigkeit) lineare a $(n-1)$ dimensioni permette di rappresentare, tramite un punto, ciascun sistema di valori di n variabili x_i , di modo che un fascio di forme quadratiche $u.F+v.G$ sia rappresentato da un fascio di superfici di secondo ordine. Se il determinante di tutte queste forme è nullo, queste superfici sono tutte dei coni. Qual è il luogo dei vertici di questi coni? Supponiamo

mo che tra le derivate parziali di $u.F+v.G$ passi una sola equazione lineare, il cui grado in rapporto a u,v sia m : allora il luogo dei vertici dei coni del fascio è una curva (Normalcurve) di ordine m che è contenuta in uno spazio lineare a m dimensioni. È così che nello spazio ordinario a tre dimensioni ci sono due specie di fasci di coni: i fasci di coni aventi lo stesso vertice ($m=0$) e i fasci dentro cui i vertici hanno per luogo una retta ($m=1$); nello spazio a quattro dimensioni c'è ancora, tra queste due specie di fasci, una specie composta di fasci i cui vertici dei coni formano una conica ($m=2$) ecc. Quest'interpretazione geometrica del grado m della relazione, che lega le derivate di $u.F+v.G$, mi sembrava da rimarcare; se ci sono più relazioni tra queste derivate, cioè se le superfici di secondo ordine del fascio non hanno un solo punto, ma una retta, un piano, ecc. doppio, allora i gradi di u,v di queste relazioni dipendono dai gradi dei luoghi geometrici di questi spazi doppi; ma non ho ancora finito queste ricerche. Quando le avrò finite e completate ne farò una nota "Sur les faisceaux de cônes quadriques", che cui chiederò il permesso di spedirvi, affinchè sia pubblicato sul vostro "Journal für Mathematik". In attesa vi ringrazio ancora per la vostra cortesia nei miei confronti e vi invio i miei saluti più rispettosi.

Vostro devotissimo
Corrado Segre

(°) Berl. Monatsber., 397-447, 1874

(*) "Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen" Berl. Monats., 17, 7 e 26 p., 1874

"Congruente Transformatione der bilinearen Formen" Berl. Monats., 50 p., 1874 •

(") "SULLA TEORIA E SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE OMOGRAFIE IN UNO SPAZIO LINEARE AD UN NUMERO QUALUNQUE DI DIMENSIONI" Mem. Acc. LINCEI, (3), 19, 127-148, APRILE 1884

• "FAISCEAUX DE FORMES QUADRATIQUES UND BILINEAREN" C. R. 78, 2p., 1874

N° 208

L 18 (1)

Mess Prof. Dr L Kronecker

Berlin, W
Belleruststrasse 13

Berlin, le 25 Décembre 1883

Monsieur,

Vous me ferez beaucoup de plaisir en continuant à m'écrire dans votre langue maternelle, que je comprends parfaitement. Mais permettez-moi de ne pas vous écrire en italien, car, comme cette langue vous est probablement moins familière que la langue française, mes lettres pourraient vous fatiguer et je crains qu'elles ne vous ennuient déjà que trop. ~~Mais comme je n'en Il n'y a que quelques mois que j'ai cessé d'être étudiant pour devenir professeur, mais je suis encore~~

A peine avais-je fini d'écrire ma dernière lettre, je pensai que probablement peut-être j'avais fait confusion en considérant vos faisceaux élémentaires de formes quadratiques comme n'ayant autre importance que celle des formes canoniques et votre lettre ~~me confirme dans cette~~ m'a montré qu'effectivement il n'y a pas de relation nécessaire entre l'une chose et l'autre, que l'on peut, il est vrai, donner aux faisceaux élémentaires des représentations plus simples ou canoniques, mais que le concept l'idée des faisceaux élémentaires est indépendante de ces représentations particulières.

J'ai vu aussi par votre lettre que je ne m'étais pas expliqué clairement à propos de l'interprétation géométrique de vos recherches et de celles de M. Weierstrass sur la théorie des formes bilinéaires et quadratiques. Peut-être ne devrais-je pas dire "interprétation géométrique", car alors ces mots font penser (^{à ce que je vois}) à un travail qui consiste uniquement seulement dans des changements de mots, que je considérerais comme

L18 (2)

ridicule un savant qui ne s'occupait que de changer les mots analytiques en mots géométriques dans des résultats analytiques connus. Mais ce n'est pas là ce que j'entendais dire dans ma dernière lettre. Pour m'aider pour m'expliquer plus de clarté, prenons les théorèmes de M. Weierstrass et de ceux sur les conditions afin que deux formes quadratiques puissent se transformer dans deux autres formes quadratiques. En mettant des mots géométriques, on peut dire que ces théorèmes donnent les conditions pour que deux couples de surfaces du 2^e degré (dans un espace à n dimensions) soient identiques du point de vue de la géométrie projective. Mais ces conditions restent analytiques, car il y entre des diviseurs élémentaires, etc.; quelle est donc, par exemple, la signification géométrique des diviseurs élémentaires? Si à un couple de surfaces du 2^e degré correspondent une racine double, triple, etc. du déterminant de leur faisceau, où sont ces deux surfaces se toucheront mutuellement en un ou plusieurs points, mais quelle différence y aura-t-il entre ces contacts suivant les divers degrés des diviseurs élémentaires, c'est-à-dire quelles singularités aura l'intersection de ces deux surfaces pour un système donné de diviseurs élémentaires? Voilà l'une des questions que j'ai bâché de résoudre et qui n'a pas laissé de me présenter au premier abord des difficultés. C'est ainsi que j'ai pu établir une classification géométrique des intersections de deux surfaces du 2^e degré. — De même les résultats analytiques sur les formes bilinéaires m'ont donné par une étude géométrique la classification des homographies ou collinearités dans un espace linéaire quelconque; — Et votre théorème que "la condition afin qu'une forme bilinéaire f puisse être transformée dans une autre f' par des substitutions congruentes est que les deux formes conjuguées f, f' puissent se transformer dans les deux autres formes conjuguées,

14/183

L 18 (3)

"J. G." me donnerait la classification des corrélations ou transformations correspondantes dualistiques. Mais, je vous le répète et j'espère vous en convaincre à peine mes travaux seront imprimés, ce n'est pas un simple changement de mots qui donne ces résultats géométriques mais bien une suite de raisonnements plus ou moins difficiles.

— J'ai vu avec plaisir soit par votre lettre soit par quelques travaux où vous parlez de géométrie à n dimensions, que vous n'êtes pas de ces savants (et il y en a beaucoup) qui n'attachent d'importance à cette science qu'au contraire (comme toutes les branches des mathématiques, si abstraites qu'elles soient) qui s'appliquent à l'espace ordinaire : la géométrie à n dimensions à le droit d'être étudiée en dehors de ses applications. Cependant lorsque on peut en faire des applications il est bon de les faire : ~~on ne peut pas sans~~ ^{on ne peut pas sans} figurer combien d'applications on peut faire de la classification ^{géométrique} de l'intersection de deux surfaces du 2^e degré. Toute la classification des complexes du 2^e degré et celle des congruences ^{de droites} plusieurs dimensions. celle du 2^e degré en dégoulet immédiatement ; la classification des surfaces du 4^e ordre (et en conséquence aussi des surfaces de Kummer, 16 racines) à conique double et ~~des surfaces du 3^e ordre~~, puis (comme je m'en suis aperçu seulement hier) il y a deux ou trois jours) la classification des surfaces du 4^e ordre ayant au moins deux points doubles et un point uniplexaire ou bien une droite double. Cette méthode donne lieu à des rapprochements curieux entre ces différentes surfaces, qui viennent à être représentées les unes sur les autres d'une manière fort intéressante.

— Est-ce que vous, Monsieur, ~~avez~~ n'avez jamais ^{abordé} le problème sur la condition pour l'équivalence de deux systèmes de plus que deux formes quadratiques, de 3, de 4, de 10 formes quadratiques ? Vous me ferez plaisir en faisant aussi la même demande à M. Weierstrass : il me semble improbable que vous ne votiez ainsi n'y ayez pas pensé et ne l'ayez pas résolue. Probablement

L(18)4

12
c'est encore la considération des déterminants de $\lambda\varphi + \mu\psi + vX + \dots$ et des plus diviseurs communs à ces subdeterminants qui donneront les systèmes des invariants du système des formes $\varphi, \psi, \chi, \dots$. Et est-ce que vous n'avez pas pensé à étendre cette même méthode au cas de plusieurs formes d'un même degré quelconque en considérant encore le discriminant de leurs séries et les invariants ou covariants qui en s'assimilant indiquent que les formes à plusieurs points singuliers ? Je suis bien indiscret en vous faisant toutes ces demandes, mais vous avez répondu si obligamment aux premières que je vous ai faites que je me sens entraîné à vous en faire des autres. Le système des invariants de deux formes quadratiques est établi d'une manière satisfaisante par les recherches de M. Weierstrass et de vous, qu'il me semble très-désirable d'étendre la même méthode à des cas plus généraux.

Quant à la note dont je vous avais parlé sur les faisceaux de surfaces du 2^e degré à points singuliers (ou cônes) je ne l'ai pas encore écrite, et si mes recherches ne me conduisent pas à en faire un travail assez bon je ne vous l'enverrai certainement pas, car je connais trop bien le respect que l'on doit à votre journal ^{à l'ancien} "Journal de l'École". Cependant, même dans ce cas, je vous remercie de l'avoir acceptée ~~soit réservée~~.

Et je vous remercie aussi de la bonté avec laquelle vous voulez bien répondre à mes lettres. Je suis jeune, et j'ai beaucoup de besoin et d'envie d'apprendre : je suis donc bien reconnaissant aux savants qui veulent pour quelques moments être mes maîtres. — George - mri

Bonne très-devouée
Carlo Legre

Al Prof. L.Kronecker

Berlino, Bellevuestrasse 13

Torino, 25 Dicembre 1883

Signore,

Mi farete molto piacere continuando a scrivermi nella vostra madre lingua, che comprendo perfettamente. Ma permettetemi di non scrivervi in Italiano, perché, dal momento che questa lingua vi é meno familiare di quella francese, le mie lettere potrebbero affaticarvi e spero che già non vi annoino troppo. Avevo appena finito di scrivere l'ultima lettera, pensavo che forse avevo fatto confusione considerando i vostri fasci elementari di forme quadratiche come non averti altra importanza che quella delle forme canoniche e la vostra lettera mi ha mostrato che effettivamente non c'è relazione necessaria tra l'una e l'altra cosa, cioè che si può, é vero, dare ai fasci elementari delle rappresentazioni semplici o canoniche, ma che l'idea dei fasci elementari é indipendente da queste rappresentazioni particolari.

Ho anche visto nella vostra lettera che non mi sono spiegato chiaramente a proposito dell'interpretazione geometrica delle vostre ricerche e di quelle del signor Weierstrass sulla teoria delle forme bilineari e quadratiche. Forse non dovrei dire "interpretazione geometrica", perché queste parole fanno pensare (e vi hanno fatto pensare da ciò che vedo) ad un lavoro che consiste solo in un cambio di parole. Considererei ridicolo uno studioso che non si occupasse di cambiare le parole analitiche in parole geometriche nei risultati analitici già conosciuti. Non é comunque ciò che intendeva nella mia ultima lettera. Per esprimermi con più chiarezza prendiamo i teoremi sulle condizioni per cui due forme quadratiche possano trasformarsi in altre due forme quadratiche. Mettendo delle parole geometriche, si

può dire che questi teoremi danno le condizioni per cui due copie di superfici di secondo grado (in uno spazio a N dimensioni) siano identiche dal punto di vista della geometria proiettiva.

Queste condizioni però restano analitiche, perchè entrano dei divisor^{PER ESEMPIO} elementari, ecc. ; qual è dunque il significato geometrico dei divisor elementari? Se a una coppia di superfici di secondo grado corrisponde una radice doppia, tripla, ecc. del determinante del loro fascio, queste due superfici si toccheran^{no} mutualmente in uno o più punti, ma quale differenza ci sarà tra questi contatti, secondo i diversi gradi dei divisor elementari, cioè quali singolarità avrà l'intersezione di queste due superfici per un sistema dato di divisor elementari ?

Ecco una delle domande che ho cercato di risolvere e che mi ha creato molte difficoltà. È così che ho potuto stabilire una classificazione geometrica di due superfici di secondo grado.

Allo stesso tempo i risultati analitici sulle forme bilineari mi hanno dato, per mezzo di uno studio geometrico, la classificazione delle omografie o collineazioni in uno spazio lineare qualunque. E il vostro teorema secondo cui "la condizione affinchè una forma bilineare f possa essere trasformata in un'altra f' tramite una sostituzione congruente, è che le due forme coincidate $f.f'$ ", mi darà la classificazione delle correlazioni o corrispondenze dualistiche. Ma, ve lo ripeto, spero di convincervi non appena i miei lavori saranno pubblicati; questo non è un semplice cambiamento di parole che dà questi risultati geometrici , ma una serie di ragionamenti più o meno difficili.

Ho visto con piacere, sia dalla vostra lettera che da qualche lavoro, dove voi parlate di geometria a N dimensioni, che non siete tra quegli studiosi (e ce ne sono molti) che non danno importanza a questa scienza, se non quella che può applicarsi applicarsi allo spazio ordinario: la geometria a N dimensioni

ha il diritto di essere studiata al di fuori delle sue applicazioni (come tutte le branche della matematica così astratta per quello che possa essere). Tuttavia, quando si possono fare delle applicazioni allo spazio ordinario, è bene farle; altrimenti non si può vedere quante applicazioni si possano fare della classificazione geometrica dell'intersezione di due superfici di secondo grado a più dimensioni. Tutta la classificazione dei complessi di rette di secondo ordine e quella delle congruenze di secondo grado ne derivano direttamente (e, di conseguenza, anche delle superfici di Kummer a 16 nodi); la classificazione delle superfici di terzo ordine, quella delle superfici di quarto ordine a conica doppia e poi anche (come mi sono accorto solo da due o tre giorni) la classificazione delle superfici di quarto ordine, aventi almeno due punti doppi e un punto uniplanare o una retta doppia. Questo metodo dà luogo a dei confronti curiosi tra queste differenti superfici, che vengono ad essere rappresentate le une sulle altre in un modo interessante. Sono sicuro che ci sono ancora altre applicazioni da fare. Non avete mai affrontato il problema sulla condizione per l'equivalenza di due sistemi di tre, quattro, più forme quadratiche? Mi fareste un piacere facendo la stessa domanda a Weierstrass: mi sembra improbabile che nè voi nè il vostro amico non lo abbiate mai pensato e risolto. Probabilmente ancora la considerazione del determinante di $r.X+s.Y+t.Z+\dots$ e dei divisori comuni ai suoi subdeterminanti, darà tutti gli invarianti del sistema di forme $X,Y,Z\dots$ Non avete pensato ad estendere questo stesso metodo in caso di più forme di uno stesso grado qualunque, considerando ancora il discriminante della loro serie e gli invarianti o le covarianti che si annullandosi indicano che la forma ha più punti singolari? Sono abbastanza indiscreto facendovi tutte queste domande, ma avete risposto così gentilmente alle prime che vi ho fatto, che mi sento spinto a farvene altre. Il sistema di inva-

rianti di due forme quadratiche è stabilito in maniera così soddisfacente dalle ricerche di Waierstrass e vostre, che mi sembra molto auspicabile estendere lo stesso metodo a dei casi più generali. Quanto alla nota, di cui vi avevo già parlato, sui fasci di superfici di secondo grado a punti singolari (o coni), non l'ho ancora scritta (°) e se le mie ricerche non mi condurranno a fare un lavoro abbastanza buono, certamente non ve lo spedirò, perchè conosco troppo bene il rispetto che si deve al vostro giornale, l'antico "Giornale di Crelle". Tuttavia anche in questo caso vi ringrazio per averlo accettato. Vi ringrazio anche della bontà con cui vorrete rispondere alle mie lettere. Sono giovane e ho molto bisogno e molta voglia di apprendere: sono dunque riconoscente agli studiosi che vogliono essere per qualche momento miei maestri. Credetemi.

Vostro devotissimo

Corrado Segre

(°) Si riferisce all'articolo successivamente pubblicato con il titolo "Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque" (Atti Acc.Torino 19,878-896, 18 Maggio 1884).

Heer Prof. L. Kronecker
(cartolina postale)

Berlin W
Bellevuestr. 13

Turin le 18 Février 1884

Monsieur

Je prends la permission de vous envoyer en un pli chargé un manuscrit d'une note que je désirerais voir imprimée dans votre Journal für Mathematik. Cette note regarde la géométrie de la droite : j'y étudie d'une façon assez élémentaire quelques complexes quadratiques dont les propriétés me semblent assez remarquables pour mériter d'être étudiées à part. Bien que ce travail puisse se rattacher à un autre imprimé dans les Mathematische Annalen (dont ~~j'espérais vous envoier~~ ^{j'espère que vous aurez reçu une copie.} me suis empressé à vous faire hommage d'une copie), cependant j'ai fait en manière ~~que ce petit travail~~ ^{qui il} suffit à lui-même, de sorte qu'il n'est pas besoin d'avoir lu l'autre pour le comprendre.

Je vous remercie ~~en~~ avance de la publication et en attendant votre réponse
~~je attends encore avec impatience~~ ^{(dans laquelle j'espère trouver} les explications sur la théorie des formes bilinéaires que je vous avais demandées dans ma dernière lettre, et que ^{vous} ~~vous~~ ^{avez donc} occupations vous empêchent de me donner). — ~~En vous remerciant par~~
~~anticipation des deux faveurs~~ croirez-moi croirez-moi.

Votre très-dévoué

D^r Corrado Segre

(Turin, via Bonafous, 3)

Al Prof.Kronecker
Berlin W
Bellevuestr.13

TORINO, 18 Febbraio 1884

Signore,

Mi permetto di spedirvi un manoscritto d'una nota che desideravo farvi pubblicare sul vostro "Journal für Mathematik"^(°).

Questa nota riguarda la geometria della retta: ho studiato da un punto di vista elementare alcuni complessi quadratici le cui proprietà mi sembrano piuttosto rimarchevoli da meritare di essere studiati a parte.

É buona cosa che questo lavoro possa aggiungersi ad un altro pubblicato sui "Mathematische Annalen" (di cui spero abbiate ricevuto una copia) (*) tuttavia ho fatto in modo che sia autosufficiente nel senso che non c'è bisogno di aver letto l'altro per capirlo. Vi ringrazio anticipatamente per la pubblicazione e attendendo la vostra risposta (nella quale spero di trovare le spiegazioni sulla teoria delle forme bilineari che vi avevo chiesto nell'ultima lettera e che senza dubbio i vostri impegni vi hanno impedito fino ad ora di farmi avere).

Vostro devotissimo

Dott.Corrado Segre

(Torino, Via Bonafons, 3)

(°)"Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes"(Journ.für Math., 97, 95-110, 1884).

(*)"Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulièrre est une surface du 2° degré double"(Math. Ann. 23, 235-243, 1883)

7 Aprile 89

Caro Professore,

Complimenti oggi ~~per il~~ ~~21° anniversario~~ 21 anni che un po' di laurea, al
 non è questo e non trascorsi 25 anni dal ~~dal giorno in cui~~ nel quale ~~istituita~~
 decreto ministeriale conferì, a titolo d'onore, la laurea in matematiche. Ed è come ricorda
 tale ~~quest'~~ occasione che noi Le presentiamo questo piccolo omaggio. ~~(a capo)~~ ~~Avremmo~~ ~~tanto~~
 seguire la consuetudini si sarebbe dovuto aspettare il 25° anniversario; ma
 e vuole? sortaci l'idea, non abbiamo ~~mai~~ saputo attendere 6 anni! ~~Tutto che~~
~~Lei~~ ~~premeva~~ ~~vorresto~~ esprimere ~~tutto l'affetto~~, tutta la gratitudine, e tutto l'affetto
 che noi sentiamo per Lei, ~~che i suoi messi di lavoro~~ fare i ~~lavori~~
~~che qui vede riuniti~~ ed in cui La preghiamo di non ~~vedere~~ badare
 d altro che a questo: che furono scritti pensando a Lei.

Averemo potuto darle dei nostri sentimenti ~~sia da qualche dimostrazione~~
 più clamorosa. Ma ~~che gli ammaestramenti~~ noi sappiamo quanto
 Ella rifugga dal rumore (~~che~~ ed anche in questo Ella è ammaestrata);
~~quindi~~ siamo certi che per quanto modesta, sia per quanto fatta
 all'intimità, ~~ma forse~~ Ella vorrà accogliere questa prova

e che in noi

~~che furono scritti pensando a Lei~~ ~~con caldo affetto~~ gratitudine ed affetto che
 formarono ~~in~~ sia per gli ammaestramenti nelle varie discipline e nella arte dell'esempio offerto da Lei
~~che furono scritti solo dall'uno~~ ~~separato~~ ~~da ogni legge~~ ~~ad ogni esempio~~
 isuole e fuori di ruole, sia per lo contenuto dei tuoi scritti, sia
 messo in mondo, ~~che furono scritti con~~ ~~amorevolezza e bontà~~ cui Ella ci fu sempre
 larga ~~di consigli ammaestramenti d'ogni specie~~, di ottimi consigli e di
 validi aiuti, ~~e ci diede esempio ed~~ esempi agli studi. Ad attestare questi
~~ad attestare~~ ~~ad attestare tutto a questi nostri sentimenti, abbiamo~~
~~rivissimi abbia~~ colto quest'occasione
~~scritte~~ ~~scritte~~ ed abbiamo scritto i lavori che qui ^{sopra} vede riuniti, ed
 ed in cui La preghiamo di non ~~veder~~ altro che questo: che furono
 scritti pensando a Lei. Darle una dimostrazione più clamorosa avremmo
 potuto, ma non abbiamo voluto: ~~rischiò di perdersi con Ella~~ ~~rischiò di perdersi con Ella~~
~~crediamo di copiare le sue idee, in questo~~ ~~che~~ ~~rischiò di perdersi con Ella~~
~~saperne~~ ~~che ben~~ ~~crediamo di farlo~~ ~~rischiò di perdersi con Ella~~
 anche potuto trovarsi un gran numero di
 rifugio dai rumori. Averemo cercato e trovato un gran numero di
 suoi discepoli che avrebbero collaborato con noi, se il tempo non ci avesse
 tolte tanto. ~~Ella voglia accogliere altri collaboratori fra gli~~ ~~che~~ ~~trovato molti~~
 suoi antichi discepoli; ~~ma~~ ~~il tempo non ci ha~~ ~~che~~ ~~trovato molti~~
 noi speriamo che semplice e modesta qual è, questa manifestazione

del nostro animo ~~che~~ sarà da Lei accolta ~~bene~~ con la Sua
solita bontà e che Ella vi leggerà tutta la ~~piena~~ profondità del
nostro affetto.

Accolga, caro Professore, i più vivissimi auguri che noi in
questa ~~occasione~~ vogliamo esprimere; e ci conservi sempre la Sua
benevolenza, che ci è tanto preziosa).

Lei devoti ed affettuosi

Castelnovo

Gerbaldi

Loria

Maglioli

Morera

Novarese

Piano

Segre

Valle

Al Prof. Enrico D'Ovidio

in segno di vivissimo affetto

~~Torino~~
7 aprile 1889

Ad affiarissimo Professore
Enrico D'Ovidio

in segno
di profondo affetto

7 Aprile 1889

L 20 (2)