Giochi matematici 2008/2009
Gara del 5 Marzo 2009

Tempo concesso: 3 ore

Il concorrente non è tenuto a rispondere ad ogni quesito, né, per i quesiti che prevedono più risposte, a fornirle tutte. Le risposte ai singoli quesiti, corredate da giustificazioni concise ed esaurienti, vanno fornite su fogli separati, ciascuno intestato con cognome, nome e numero del quesito cui si riferisce. I fogli vanno raccolti in un unico foglio doppio, con l'indicazione di cognome e nome del concorrente e dell'elenco dei quesiti cui è stata data risposta (anche solo parziale).

I punteggi riportati accanto ad ogni singolo quesito hanno lo scopo di indicare il criterio in base al quale verrà stilata la graduatoria, riflettendo la valutazione di difficoltà formulata dalla commissione. Il tempo di consegna risulterà discriminante solo a parità di punteggio.

Quesiti proposti

Quesito 1 Determinare il minimo intero $n \geq 1$ tale che i numeri $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ siano tutti interi. (*3 punti*)

Quesito 2 Determinare tutti i numeri reali x tali che

$$\frac{[x]}{x} = \frac{1}{x - [x]},$$

dove $[x]$ denota "la parte intera inferiore" del numero reale x, cioè il più grande intero che non superi x. (*4 punti*)

Quesito 3 Per ogni intero $n \geq 3$, consideriamo una scacchiera $n \times n$ (con le caselle bianche e nere "a scacchiera", appunto) tale che almeno una casella d'angolo sia nera, e coloriamo di nero, in passi successivi, alcune delle sue caselle bianche: ad ogni passo, scegliamo un rettangolo 2×3 o 3×2 avente almeno tre caselle bianche e coloriamo di nero tre delle sue caselle bianche. Per quali n è possibile, con un certo numero di tali passi, rendere nere tutte le caselle della scacchiera? (*6 punti*)

Quesito 4 Ogni triangolo rettangolo può essere decomposto in due triangoli isosceli, unendo il punto medio della ipotenusa con il vertice opposto. Anche i triangoli aventi angoli che misurano 15°, 30° e 135° gradi e quelli aventi angoli 15°, 45°, 120° sono decomponibili in due triangoli isosceli.
Mostrare che ogni triangolo che sia decomponibile in due triangoli isosceli soddisfa sempre almeno una delle seguenti tre proprietà:
a) è rettangolo
b) ha un angolo doppio di un altro
c) ha un angolo triplo di un altro. (*7 punti*)

Quesito 5 Le due equazioni $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 - 5x - 6 = 0$ hanno la proprietà che le loro soluzioni sono numeri interi, rispettivamente $x = 2$, 3 e $x = -1$, 6.
Determinare tutte le equazioni aventi questa proprietà, con coefficienti minori di 60, cioè determinare le coppie di interi positivi $(b,\ c)$ con $b,\ c < 60$ tali che le due equazioni

$$x^2 - bx \pm c = 0$$

abbiano come soluzioni quattro numeri interi. (*10 punti*)

Quesito 6 Diremo che le lancette di un orologio (a quadro circolare) sono in *posizione perfetta* se la punta della lancetta grande, la punta della lancetta piccola e un opportuno punto sul perimetro del quadro formano un triangolo equilatero. Determinare la massima distanza di tempo possibile fra due posizioni perfette consecutive, sapendo che il raggio del quadro coincide con la lunghezza della lancetta grande e che il rapporto delle lunghezze delle due lancette è 3/2. (*10 punti*)

Quesito 7 Consideriamo un triangolo ABC rettangolo in A, sia D un punto della ipotenusa BC e siano E, F due punti del cateto AC (disposti in modo che A, E, F, C risultino ordinati).
Supponiamo inoltre che
a) $\widehat{ADF}$ sia retto,
b) $AB = AD = 1$,
c) $AE = ED = x$.
Trovare la lunghezza di CF in termini di x. (*10 punti*)

http://www.mat.unimi.it/users/giochi