**Geometria 2**

Prof. Antonio Lanteri  
Anno accademico 2016-2017, secondo semestre

Obiettivo del corso è completare il background di algebra lineare presentando alcuni concetti fondamentali di questa teoria, nonché introdurre alla geometria degli spazi proiettivi da un lato e quella degli spazi affini euclidei dall’altro, sviluppando la capacità di trattare problemi geometrici nel contesto più adeguato.

Il corso consiste di due parti. Nella prima si continuerà lo studio dell’algebra lineare, iniziato nel corso di Geometria 1, sviluppando diversi argomenti che, nella seconda parte, verranno utilizzati per fondare la teoria degli spazi affini euclidei e degli spazi proiettivi, in ogni dimensione, e per studiare la geometria degli enti lineari e quadratici nei vari ambienti.

**1. Endomorfismi di spazi vettoriali e loro forme canoniche**

Autospazi e sottospazi invarianti di un endomorfismo (o di una matrice quadrata). Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili e di quelli triangolarizzabili. Forma canonica di Jordan. Polinomi e autovalori. Teorema di Cayley-Hamilton. Polinomio minimo.

**2. Spazi vettoriali euclidei**

Prodotti interni in spazi vettoriali reali e complessi. Norma; angoli; ortogonalità; basi ortonormali; procedimento di Gram-Schmidt. Isometrie e gruppo ortogonale. Endomorfismi simmetrici e loro ortodiagonalizzazione (teorema spettrale reale). Cenno al caso complesso.

**3. Forme bilineari e quadratiche**

Forme multilineari. Forme bilineari; matrici congruenti. Forma quadratica associata ad una forma bilineare simmetrica. Basi coniugate; riduzione a forma canonica di una forma quadratica. Forme quadratiche reali. Teorema di Sylvester. Forme definite, semidefinite, indefinite. Spazi vettoriali pseudoeuclidei. Forme quadratiche complesse.

**4. Geometria in spazi *n*-dimensionali su un campo arbitrario**

Spazi affini euclidei. Riferimenti ortonormali. Sottospazi lineari e loro rappresentazioni. Distanze, angoli, ipervolumi. Cambiamenti di coordinate e trasformazioni. Teorema di Eulero e forma canonica delle rotazioni.

Spazi proiettivi. Motivazioni. Coordinate proiettive omogenee. Sottospazi lineari proiettivi e loro rappresentazioni. Formula di Grassmann. Teorema fondamentale della geometria proiettiva. Lo spazio affine complementare di un iperpiano. Proiettività e affinità. Concetto di geometria secondo F. Klein.

**5. Quadriche e coniche**

Le coniche nel piano euclideo, affine e proiettivo. Quadriche e iperquadriche dal punto di vista proiettivo reale/complesso: punti singolari; riducibilità; spazi lineari; polarità; natura dei punti di una superficie quadrica; classificazioni. Iperquadriche nello spazio affine. Chiusura proiettiva. Comportamento rispetto all'iperpiano improprio. Classificazione affine reale e complessa. Iperquadriche nello spazio euclideo. Invarianti ortogonali. Classificazione euclidea-metrica di coniche e quadriche.

**6. La dualità**

Duale di uno spazio vettoriale. Base duale. Omomorfismo trasposto. Sottospazi annullatori e loro proprietà. Principio di dualità in geometria proiettiva e sua illustrazione attraverso esempi elementari. Inviluppi aderenti.

**--------------------**

The course aims at completing the linear algebra background and introducing to *n*-dimensional geometry in affine-euclidean spaces and projective spaces. Then conics and quadric (hyper)surfaces will be discussed in this framework.

**1. Vector space endomorphisms and canonical forms**

Eigenspaces and invariant subspaces of an endomorphism (of a square matrix). Characterization of diagonalizable and triangulable endomorphisms. Jordan's canonical form. Polynomials and eigenvalues. Cayley-Hamilton's theorem. Minimal polinomial.

**2. Euclidean vector spaces**

Inner products in real and complex vector spaces. Norm; angles; orthogonality; orthonormal bases; Gram-Schmidt process. Isometries and the orthogonal group. Symmetric endomorphisms and their properties (the real spectral theorem). A look at the complex case.

**3. Bilinear and quadratic forms**

Multilinear forms. Bilinear forms; congruent matrices. The quadratic form associated to a symmetric bilinear form. Conjugate bases; reducing a quadratic form to canonical form. Real quadratic forms. Sylvester's theorem. Definite, semi-definite, indefinite real quadratic forms. Pseudo-euclidean vector spaces. Complex quadratic forms.

**4. Geometry in *n*-dimensional spaces over an arbitrary field**

Euclidean affine spaces. Orthonormal frames. Linear varieties and their analytic representations. Distances, angles, hypervolumes. Changes of coordinates and transformations. Euler's theorem and canonical form of rotations.

Projective spaces. Motivations. Homogeneous projective coordinates. Projective linear varieties and their representations. Grassmann's formula. The main theorem of projective geometry. The affine space complementing a hyperplane. Projective transformations and affine transformations. Idea of geometry according to F. Klein.

**5. Quadrics e conics**

Conics in the Euclidean, affine, and projective planes. Quadric hypersurfaces from the real/complex projective point of view: singular points; reducibility; linear spaces; polarity; the nature of points of a real quadric surface; classifications. Quadric hypersurfaces in affine space. Projective closure. Behavior with respect to the hyperplane at infinity. Affine classification from the real and complex point of view. Quadric hypersurfaces in the Euclidean space. Orthogonal invariants. Classification of conics and quadric surfaces from the euclidean-metric point of view.

**6. Duality**

Dual of a vector space. Dual basis. Transpose of a linear map. Annihilators and their properties. The duality principle in projective geometry illustrated through elementary examples. Envelopes.

**------------------------**

**Propedeuticità consigliate**

Geometria 1

**Materiale di riferimento**

E. Sernesi, Geometria I, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

M.I. Stoka, Corso di Geometria (Terza Ediz.), Cedam, Padova, 1995.

**Prerequisiti**

Gli argomenti di Matematica presentati nel precorso e nei corsi del primo semestre

**Pagina web del corso**

cf. la voce Didattica 2016-17 sulla pagina web del docente

**Altre informazioni**

L'esame consiste in una prova scritta (esercizi) e una prova orale, da sostenere nello stesso appello della prova scritta. Nel mese di aprile è prevista una prova in itinere sulla parte di programma svolta sino a quel momento. L'esito positivo riportato in tale prova comporterà un bonus agli effetti della prova scritta d'esame, limitatamente alla parte di programma coinvolta. Il bonus resterà valido fino all’appello di febbraio 2018 incluso.

N.B. La prova in itinere è riservata esclusivamente agli studenti immatricolati nell’a.a. 2016/17