Geometria 2

15 Settembre 2017

Prova scritta

A1. Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

(a) Determinare eventuali valori di h per i quali la matrice A_h sia diagonalizzabile sul campo reale.

(b) In dipendenza da h determinare il polinomio minimo di A_h.

A2. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbf{R}^n$ munito del prodotto interno standard $(\ , \ )$, sia f un suo endomorfismo e sia $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita ponendo

$$\varphi(x, y) = (f(x), f(y)), \qquad \text{per ogni } x, y \in V.$$

(a) Verificare che φ è una forma bilineare simmetrica per ogni $f \in \mathrm{End}(V)$.

(b) Stabilire sotto quali condizioni per f la φ definisce un prodotto interno.

(c) Stabilire sotto quali condizioni per f risulta $\varphi = (\ , \ )$.

G1. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^4$ si considerino due piani distinti π_1, π_2 ed un punto A.

(a) Descrivere tutte le configurazioni proiettivamente non equivalenti a cui tali enti possono dare luogo.

(b) Considerati i piani π_1 e π_2 di equazioni rispettive

$$\pi_1 : \quad x_1 - x_3 + x_5 = 2x_2 - 3x_4 = 0, \qquad \pi_2 : \quad 3x_1 - x_2 = 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0,$$

ed il punto $A \equiv (1 : 3 : 2 : 2 : 1)$, stabilire a quale configurazione essi danno luogo tra quelle descritte al punto (a).

(c) Considerato infine l'iperpiano H di equazione $3x_1 - x_3 - x_5 = 0$ e verificato che esso non contiene né π_1 né π_2, stabilire se nello spazio affine

$$\mathcal{A} := \mathbf{P}^4 \setminus H$$

le tracce affini dei due piani π_1, π_2 risultano paralelle.

G2. Nello spazio affine euclideo $\mathbf{E}^3$ si consideri la superficie quadrica Q di equazione

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 8x - 8 = 0.$$

(a) Si riconosca Q, si mostri che è di rotazione e se ne determini l'asse.

(b) Si riconosca la conica tagliata da Q sul piano di equazione $2x + 2y - 4 = 0$.

(c) Sia Q' una quadrica di $\mathbf{E}^3$ la cui sezione col piano $y = 0$ è la conica Γ di equazioni

$$2x^2 + 4xz - 2z^2 - 8x = y = 0.$$

Si descrivano le proprietà della conica Γ dal punto di vista euclideo metrico e si stabilisca se esiste una affinità di $\mathbf{E}^3$ che trasforma Q in Q'.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*