Geometria 2

19 giugno 2018

Prova scritta

A1. Dato uno spazio vettoriale reale V di dimensione 4 ed una sua base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, sia $f : V \to V$ un endomorfismo tale che $f^3 = 0$ ed inoltre

$$f(v_1) = f(v_2) = v_3, \quad f(v_3) = kv_4 \quad \text{e} \quad f(v_4) \in \langle v_1, v_4 \rangle$$

dove k è un parametro reale. In dipendenza da k e da $f(v_4)$ determinare:

(a) il polinomio caratteristico di f;

(b) il polinomio minimo e la forma canonica di Jordan di f.

A2. Si consideri la forma bilineare simmetrica $\varphi_{a,b} : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

con a e b parametri reali.

(a) Stabilire per quali valori di a e b la forma quadratica associata a $\varphi_{a,b}$ è definita positiva.

(b) Posto $(a, b) = (-2, 1)$, determinare una matrice $R \in \mathrm{SO}(4)$ tale che la matrice $R_T AR$ sia diagonale.

G1. In $\mathbf{P}^5$ si considerino il sottospazio lineare Λ generato dai punti $A \equiv (1 : 1 : 0 : 0 : 1 : 1)$, $B \equiv (1 : 0 : 1 : 1 : 0 : 1)$, $C \equiv (0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 0)$ ed il sottospazio lineare Σ di equazioni $x_1 + 2x_4 - x_6 = 2x_1 - x_4 - 2x_6 = 0$.

(a) Determinare le dimensioni dei sottospazi lineari $\Lambda \cap \Sigma$ e $\Lambda + \Sigma$ e descrivere entrambi mediante equazioni cartesiane omogenee.

(b) Stabilire sotto quali condizioni esiste un iperpiano $H \subset \mathbf{P}^5$ tale che nello spazio affine $\mathcal{A} := \mathbf{P}^5 \setminus H$ le tracce affini L ed S di Λ e Σ rispettivamente siano parallele.

(c) Stabilire se per l'iperpiano di $\mathbf{P}^5$ di equazione $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0$ la circostanza di cui al punto precedente è verificata.

G2. Nello spazio affine reale $\mathbf{A}^3$ si consideri la quadrica Q di equazione

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 2yz + z^2 = 0.$$

(a) Si riconosca Q.

(b) Detta Γ la conica intersezione di Q con il piano di equazione $x = 1$, se ne determini l'eventuale centro e si stabilisca se Γ è equivalente per affinità alla conica G, intersezione di Q con il piano di equazione $2x + 2y - z = 0$.

(c) Detta $\overline{Q}$ la chiusura proiettiva di Q nello spazio proiettivo reale $\mathbf{P}^3$, si determini un piano $\Pi \subset \mathbf{P}^3$ tale che $\overline{Q}$ abbia come traccia nello spazio affine $\mathbf{P}^3 \setminus \Pi$ un cilindro parabolico.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*