<u>**Geometria 2**</u>

20 Novembre 2015

Prova scritta

A1. Sono date le matrici

$$A_{h,k} = \begin{bmatrix} h & h & k \\ 0 & h & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{h,k} = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \text{ con } h, k \in \mathbf{R}.$$

(a) Stabilire per quali valori di h e k le due matrici risultano simili.

(b) Posto $h = 0$, stabilire se per qualche valore di k le due matrici sono equivalenti.

A2. Sia $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base di $\mathbf{R}^4$ costituita dai vettori unitari fondamentali, sia g l'automorfismo definito ponendo

$$g(e_i) = e_{i+1}\ (i = 1, 2, 3) \quad \text{e} \quad g(e_4) = e_1,$$

e sia $f = g + g^{-1}$.

(a) Considerato $\mathbf{R}^4$ come spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto interno standard, si mostri che f è un endomorfismo simmetrico.

(b) Si determini quindi una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$, costituita da autovettori di f.

(c) Si determini la segnatura della forma quadratica su $\mathbf{R}^4$ associata alla matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{E}$.

G1. In $\mathbf{P}^4$ sono dati la retta λ di equazioni $x_1 - x_2 + x_3 = x_1 - x_5 = x_2 - x_4 = 0$ e il sottospazio lineare Λ, generato dai punti $A \equiv (1:1:0:1:1)$, $B \equiv (1:0:0:0:1)$ e $C \equiv (1:2:1:1:0)$.

(a) Si descrivano, mediante equazioni cartesiane omogenee, i sottospazi $\Lambda, \lambda \cap \Lambda$ e $\lambda + \Lambda$.

(b) Considerato l'iperpiano H di equazione $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$, si verifichi che H non contiene né λ né Λ.

(c) Nello spazio affine $\mathcal{A} := \mathbf{P}^4 \setminus H$, si stabilisca se la traccia affine di λ è parallela o no a quella di Λ.

G2. Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$ si consideri la superficie S generata dalla rotazione della retta r di equazioni $2x - y = x - z = 0$ attorno alla retta s di equazioni $x - z + 1 = y = 0$.

(a) Osservato che S è una quadrica, la si riconosca e se ne determini il centro.

(b) Si stabilisca se esiste una similitudine di $\mathbf{E}^3$ che trasforma S nella quadrica S' di equazione $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz - 6 = 0$.

(c) Indicata con $\mathcal{Q}$ la chiusura proiettiva di S in $\mathbf{P}^3$, si determini un piano H di $\mathbf{P}^3$ tale che nello spazio affine $\mathcal{A} := \mathbf{P}^3 \setminus H$, la traccia affine di $\mathcal{Q}$ sia un paraboloide.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*