<u>Geometria 2</u>

13 Settembre 2016

Prova scritta

A1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbf{K}$ e sia f un suo endomorfismo diagonalizzabile avente come soli autovalori 0, 1 e -1. Dimostrare che $f^3 = f$.

A2. Si considerino lo spazio vettoriale $W = M(2, \mathbf{R})$ delle matrici reali 2×2 e l'applicazione $\varphi \colon W \times W \to \mathbf{R}$ definita ponendo $\varphi(X, Y) = \mathrm{Tr}(X_T \, H \, Y)$, per ogni $X, Y \in W$, dove H è la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 0 & h \\ k & 0 \end{bmatrix},$$

con h e k parametri reali non nulli.

(a) Stabilire per quali valori di h e k la φ è una forma bilineare simmetrica.

(b) Per questi stessi valori, determinare la segnatura della forma quadratica associata a φ.

(c) Per questi stessi valori, determinare una base φ-coniugata di W.

G1. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^5$ sono dati i sottospazi lineari Λ_1 e Λ_2 di equazioni rispettive:

$$\Lambda_1 : \quad x_2 - x_4 = x_3 = x_5 = 0, \qquad \Lambda_2 : \quad x_2 - x_3 = x_4 - x_5 = 0.$$

(a) Considerati i sottospazi lineari $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ e $\Lambda_1 + \Lambda_2$, determinarne le dimensioni e descrivere il primo mediante equazioni parametriche omogenee e il secondo mediante equazioni cartesiane omogenee.

(b) Detto Π l'iperpiano di equazione $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, verificare che esso non contiene né Λ_1 né Λ_2.

(c) Considerato lo spazio affine complementare

$$\mathcal{A} := \mathbf{P}^5 \setminus \Pi,$$

e in esso le tracce affini L_1 e L_2 di Λ_1 e Λ_2 rispettivamente, stabilire se L_1 è parallelo a L_2.

G2. Nello spazio affine euclideo $\mathbf{E}^3$ si consideri la superficie quadrica Q descritta dall'equazione

$$4x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 8 = 0.$$

(a) Si riconosca Q, si mostri che è di rotazione e se ne determini l'asse.

(b) Si riconosca la conica tagliata da Q sul piano di equazione $y + z - 2 = 0$.

(c) Sia Q' una quadrica di $\mathbf{E}^3$ la cui sezione col piano $x = 0$ è la conica Γ di equazioni

$$y^2 + 4yz + 4z^2 - 4y - 2z = x = 0.$$

Si studi la conica Γ e si stabilisca se esiste una affinità di $\mathbf{E}^3$ che trasforma Q in Q'.

N.B. *Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.*