GEOMETRIA 2 (Corso di Laurea in Matematica)

Test sugli spazi proiettivi

1. In uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ si considerino tre rette. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

   a) se esiste un punto comune alle tre rette allora esse sono complanari;

   b) se $n = 3$, almeno due delle tre rette si intersecano;

   c) se $n = 6$, può accadere che il sottospazio lineare generato dalle tre rette sia un iperpiano;

   d) se due delle tre rette si intersecano e le tre rette generano $\mathbb{P}^n$, allora $n \leq 4$.

2. In $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ sono dati quattro punti A, B, C, D. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

   a) I quattro punti sono linearmente indipendenti se e solo se non stanno su uno stesso piano;

   b) Detto H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ che non contiene nessuno di essi, i quattro punti dati sono linearmente indipendenti se e solo se nello spazio affine $\mathcal{A} := \mathbb{P}^n \setminus H$ sono linearmente indipendenti i tre vettori $B - A, C - A, D - A$.

   c) I quattro punti dati sono linearmente dipendenti se e solo se le rette $< A, B >$ e $< C, D >$ sono incidenti.

   d) se i quattro punti non stanno tutti su una stessa retta, allora esiste almeno una omografia ω di $\mathbb{P}^n$ che li permuta circolarmente, i.e., tale che

   $$\omega(A) = B, \quad \omega(B) = C, \quad \omega(C) = D, \quad \omega(D) = A.$$

3. In $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ sono dati una retta λ ed un piano π che non la contiene. Sia $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano e si consideri lo spazio affine $\mathcal{A} := \mathbb{P}^n \setminus H$. Supposto che H non contenga né λ né π, si denotino con ℓ e p le tracce affini in $\mathcal{A}$ di λ e di π rispettivamente. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

   a) se $n \geq 4$, ℓ non è parallela a p;

   b) se λ e π sono sghembi, ℓ non è parallela a p;

   c) se $n = 3$, ℓ è parallela a p;

   d) se $n = 3$, ℓ può essere parallela a p.

Geometria 2

Test sugli spazi proiettivi

1. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le tre rette.

a) Falso. Sia $A = \lambda_1 \cap \lambda_2$ e sia C un punto fuori del piano $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$. Allora la retta $\lambda_3 := \langle A, C \rangle$ non è complanare a λ_1 e λ_2.

b) Falso. Sia $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \emptyset$ e sia A un punto generico su una retta incidente λ_1 e λ_2. Le rette per A formano una stella in $\mathbb{P}^3$, mentre quelle per A e incidenti λ_i formano un fascio ($i=1,2$). Allora la retta generica, λ_3, per A non incide né λ_1 né λ_2.

c) Vero. Siano $A, B \in \lambda_1$, $C, D \in \lambda_2$, $E, F \in \lambda_3$. Se i 6 punti sono linearmente indipendenti, allora $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ generano un $\mathbb{P}^5$.

d) Vero. Se $\lambda_1 \cap \lambda_2 = A$, allora $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \pi$ è un piano, e $\dim(\lambda_3 \cap \pi) \geq -1$. Allora, $n = \dim \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle = \dim \langle \pi, \lambda_3 \rangle = 2+1-\dim(\pi \cap \lambda_3) \leq 4$ (per Grassmann).

2. a) Vero. I 4 punti sono complanari se e solo se i vettori che ne sono rappresentanti omogenei generano un sottospazio vettoriale cui dim ≤ 3, cioè sono linearmente dipendenti.

b) Vero. $B-A, C-A, D-A$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sottospazio lineare affine per A di cui essi generano il sottospazio direzione è un piano; tale è quindi anche la sua chiusura proiettiva.

c) Vero. A, B, C, D sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari (per a) e quindi se e solo se le rette $\langle A, B \rangle$ e $\langle C, D \rangle$ che sono contenute in tale piano, hanno un punto in comune.

d) Falso. Se A, B, C stanno su una retta tali devono essere anche B, C, D, dato che ω porta rette in rette. Dunque A, B, C, D sono tutti allineati, contraddizione.

3. Sappiamo che $\ell \parallel p$ se

(*) $\lambda \cap H \subset \pi \cap H$,

dove $\lambda \cap H$ è un punto e $\pi \cap H$ è una retta (per Grassmann e le ipotesi su H). La (*) comporta

$$\lambda \cap \pi \cap H \neq \emptyset \quad \text{e quindi } \lambda \cap \pi \neq \emptyset.$$

Dunque $\ell \parallel p$ implica $\lambda \cap \pi = A$ (un punto), con $A \in H$. In particolare, per Grassmann, si ha $\langle \lambda, \pi \rangle = \mathbb{P}^3 \subseteq \mathbb{P}^n$, con $=$ se e solo se $n = 3$. Ne viene:

a) Falso. Se $n \geq 4$ può essere $\lambda \cap \pi = \emptyset$.

b) Vero. Ovvio, in quanto $\lambda \cap \pi = \emptyset$.

c) Falso. È vero che $\lambda \cap \pi$ è un punto, ma non è detto che stia su H.

d) Vero. Ovvio.