RELAZIONE SULL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA SVOLTA NEL TRIENNIO 2015–2017

dal Prof. Antonio Lanteri

Il sottoscritto Antonio Lanteri è professore ordinario nel s.s.d. MAT/03 – Geometria presso la Facoltà di Scienze e Tecnologie (già Facoltà di Scienze M.F.N.) della Università degli Studi di Milano (straord. dal 9/3/1987) e afferisce al Dipartimento di Matematica "F. Enriques". Dal 1993 è stato responsabile di vari progetti di ricerca facenti capo al s.s.d. MAT/03 – Geometria. È socio dell'Unione Matematica Italiana dal 1975, membro della American Mathematical Society dal 1980, afferisce al Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e le loro Applicazioni dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica (già del Consiglio Nazionale delle Ricerche) dal 1975, è membro del Seminario Matematico e Fisico di Milano dal 1987 e Membro Effettivo dell'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere dal 2010 (Socio Corrispondente dal 1998). Dal 1996 al 2004 è stato membro del Consiglio Scientifico della "Revista Matemática Complutense".

Gli interessi di ricerca coltivati nel triennio 2015–2017 rientrano nell'ambito della geometria algebrica classica e riguardano la geometria e la classificazione delle varietà proiettive complesse di dimensione ≥ 2, con particolare riferimento ai sistemi lineari, alle varietà speciali e alla teoria dei fibrati vettoriali ampi.

L'attività scientifica svolta nel triennio in esame si è concretizzata nei lavori elencati qui di seguito. Nell'elenco 0 sono riportate pubblicazioni posteriori al 2014, ma relative a ricerche condotte precedentemente. Nell'elenco 1 sono indicati invece quei lavori relativi a ricerche sviluppate nel corso del triennio in esame, ancorchè non tutti pubblicati alla data odierna.

Elenco 0.

[1] M.C. Beltrametti, A. Lanteri, A.J. Sommese, *Adjunction and singular loci of hyperplane sections*, J. Math. Soc. Japan **. 67** (2015), 861–875.

[2] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, R. Piene, *Inflectional loci of quadric fibrations*, J. Algebra **441** (2015), 363–397.

Elenco 1.

[1] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, *Osculation for conic fibrations*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 2852–2878.

[2] M.C. Beltrametti, A. Lanteri, M. Lavaggi, *Hilbert surfaces of bipolarized varieties*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **60** (2015), no. 3, 281–319.

[3] A. Lanteri, HC-*equivalence vs numerical equivalence for ample line bundles on surfaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II ser. **66** (2017), 113–123.

[4] A. Lanteri, A. L. Tironi, *Generalized polarized manifolds with low second class*, sottomesso, Preprint, 2016.

[5] A. Lanteri, *Hilbert curves of* 3*-dimensional scrolls over surfaces*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), 139–154.

[6] A. Lanteri, *Hilbert curves of quadric fibrations*, sottomesso, Preprint, 2017.

[7] A. Lanteri, *A property of Hilbert curves of scrolls over surfaces*, sottomesso, Preprint, 2017.

[8] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, R. Piene,, *Corrigendum to "Inflectional loci of quadric fibrations" [J. Algebra, 441 (2015), 363–397]*, suttomesso, Preprint, 2017.

In relazione al tema dominante i lavori dell'elenco 1 possono raggrupparsi in modo schematico come segue.

a) Sistemi lineari: aggiunzione e classificazione di varietà con proprietà particolari, (lavori [2], [3], [5], [6], [7]).
b) Fibrati vettoriali ampi e varietà speciali: individuazione di nuovi invarianti e classificazione (lavoro [4]).
c) Geometria proiettiva differenziale: osculazione e varietà duali di ordine superiore per varietà speciali (lavori [1], [8]).

Segue una breve descrizione dei lavori, gruppo per gruppo. Per varietà si intende sempre una varietà proiettiva complessa n-dimensionale, non singolare a meno che non sia fatto esplicito riferimento a singolarità; K_X ne denota il fibrato canonico.

a) Ad ogni varietà polarizzata (X, L), di dimensione n si può associare una curva algebrica piana affine Γ di grado n, detta curva di Hilbert di (X, L), definita dal complessificato del polinomio fornito dal teorema di Riemann–Roch per la caratteristica di Eulero–Poincaré $\chi(xK_X + yL)$, guardando x ed y come delle variabili complesse. Dato che i coefficienti del polinomio sono numeri razionali, Γ può essere considerata anche nel piano affine reale. Come mostrato in un precedente lavoro con Beltrametti e Sommese, la curva Γ riflette diverse proprietà interessanti della coppia (X, L) e in alcuni casi si congettura che la forma speciale di Γ possa caratterizzare la struttura di (X, L).

In [2] si compie un ulteriore naturale passo, studiando il caso delle varietà bi-polarizzate (X, L_1, L_2). Per un tale oggetto si introduce una superficie, detta superficie di Hilbert, in analogia con la curva di Hilbert di cui sopra e si studia in particolare il caso delle varietà tridimensionali. Il punto fondamentale è costituito dall'espressione particolarmente efficace che la formula di Riemann–Roch per $\chi(D)$ assume, quando si scriva il divisore D nella forma $D = E + \frac{1}{2}K_X$. Naturalmente, nel caso (non degenere) delle varietà bipolarizzate, si ha $D = xK_X + yL_1 + zL_2$, dove x, y, z sono interpretate come coordinate nello spazio affine complesso tridimensionale $\mathbb{C}^3 = \langle K_X, L_1, L_2\rangle \otimes \mathbb{C}$. Tra le proprietà della corrispondente superficie cubica (di Hilbert) che emergono menzioniamo ad esempio che essa contiene il centro della involuzione di Serre indotta dalla mappa $D \mapsto K_X - D$, e che questo risulta essere un punto di Eckardt. Viene anche effettuato uno studio approfondito dei punti singolari all'infinito di tale superficie. Un punto fondamentale è l'interpretazione di una sezione piana della superficie di Hilbert di (X, L_1, L_2) come curva di Hilbert della varietà stessa polarizzata da una opportuna combinazione lineare di L_1 e L_2. Nel lavoro si torna anche allo studio delle curve di Hilbert nel caso di varietà polarizzate (X, L) 4-dimensionali e si mostra con esempi espliciti che il genere di queste quartiche può assumere tutti i valori ammissibili. Ulteriori argomenti sviluppati nel lavoro riguardano: 1) lo studio dei quozienti della chiusura proiettiva di una superficie di Hilbert rispetto all'estensione naturale della involuzione di Serre; tali quozienti ammettono una mappa in $\mathbb{P}^6$ e per un'opportuna sezione piana della superficie, risulta che la sua immagine nel quoziente è una curva di Castelnuovo in $\mathbb{P}^3$; 2) la caratterizzazione delle superfici dello spazio tridimensionale che sono invarianti rispetto all'involuzione di Serre, che rappresentano il contesto naturale nel quale si inseriscono le superfici di Hilbert. Molti calcoli necessari nel lavoro sono stati sviluppati con Maple.

In [3] si tenta di comprendere meglio la corrispondenza tra una varietà polarizzata e la sua curva di Hilbert nel contesto delle superfici. Si tratta del caso più semplice, dato che qui Γ è una conica. Semplici esempi mostrano che superfici polarizzate distinte posso avere la stessa curva di Hilbert. Più in generale, se (S, L) è una superficie polarizzata e $p : Y \to S$ è un rivestimento étale di grado r, la superficie polarizzata (Y, p^*L) risulta avere la stessa curva df Hilbert di (S, L). Ma la situazione è interessante da studiare anche limitandosi al caso di una stessa superficie soggiacente alle polarizzazioni. Poichè l'equazione della curva di Hilbert di (S, L) coinvolge solo caratteri numerici di S e di L, è evidente che polarizzazioni numericamente equivalenti determinano la stessa curva di Hilbert. Tuttavia, l'aspettativa che valga anche il viceversa è ingenua. Ad esempio, se S è una superficie abeliana (anche se questo è un caso degenere dal punto di vista della curva di Hilbert), Γ è una retta con molteplicità 2 per ogni fibrato ampio L, e quindi indipendentemente dalla sua classe di equivalenza numerica. In [3] si introduce la nozione di HC equivalenza e se ne studia la relazione con quella di equivalenza numerica. Risulta che per $\mathbb{P}^1$-bundles o su $\mathbb{P}^1$ oppure su una curva liscia di genere ≥ 2, le due nozioni di equivalenza coincidono, tranne che per due casi speciali: $\mathbb{F}_0$ ed $\mathbb{F}_1$, dove per un certo fibrato ampio M esiste un unico fibrato ampio L non numericamente equivalente ma HC equivalente ad M. Più in generale, dati due fibrati ampi L e M su una superficie S che non siano numericamente equivalenti, si mostra, sotto una opportuna condizione tecnica sul fibrato canonico, che esse non sono nemmeno HC-equivalenti. In particolare ne viene che su una superficie con numero di Picard 2 e $K_S^2 < 0$ due fibrati ampi sono HC-equivalenti se e solo se essi sono numericamente equivalenti. Le superfici con $K_S^2 = \chi(\mathcal{O}_S) = 0$ sfuggono a questa analisi. Questo è in particolare il caso dei $\mathbb{P}^1$-bundles su una curva ellittica e in tal caso si mostra che dato un fibrato ampio, esistono molti altri fibrati ampi ad esso HC-equivalenti ma non numericamente equivalenti. Lo stesso accade anche per le superfici propriamente ellittiche minimali che sono dei quasi-bundles nel senso di Serrano.

Come dimostrato in lavori precedenti, una proprietà rilevante della curva di Hilbert è la presenza di componenti irriducibili lineari quando sia posssibile fibrare la la varietà su una varietà di dimensione inferiore per mezzo di un opportuno sistema lineare aggiunto. Il caso dei fibrati proiettivi su una curva, con particolare enfasi sugli scroll è stato trattato in precedenza [Lanteri, *Internat. J. Math.* **25** (2014)]. In [5] si discute il caso, non ancora trattato in letteratura, delle varietà tridimensionali che sono scroll su una superficie. Si ottiene un parallelo interessante con il caso, già studiato, delle varietrà tridimensionli fibrate in quadriche su una curva. In particolare, si ottiene una parziale risposta ad un problema posto in un lavoro con Beltrametti e Sommese. Sia (X, L) uno scroll 3-dimensionale su una superficie Y, e si consideri il fibrato vettoriale ampio di rango 2 dato da $\mathcal{E} = \pi_* L$, dove $\pi : X \to Y$ denota la proiezione dello scroll. Per la proprietà sopra menzionata, la curva di Hilbert $\Gamma_{(X,L)}$ of (X, L) è riducibile in una data retta ℓ e una conica, diciamo G. In [5] si esplicita l'equazione di G. Il problema di stabilire se G risulti essere essa stessa la curva di Hilbert di una qualche superficie polarizzata, o anche solo $\mathbb{Q}$-polarizzata, non sembra di possibile soluzione in generale, a causa del grande numero di variabili in gioco. Tuttavia, confinandosi alla superficie Y, base dello scroll, si possono fornire delle condizioni necessarie, esprimibili in termini di K_Y e del numero di Bogomolov di $\mathcal{E}$. In particolare, riferendosi ad Y con la $\mathbb{Q}$-polarizzazione naturale indotta da $\det \mathcal{E}$, si dimostra che G è, a meno di HC-equivalenza, la curva di Hilbert di $(Y, \frac{1}{2} \det \mathcal{E})$ se e soltanto se il fibrato $\mathcal{E}$ è propriamente semistabile nel senso di Bogomolov.

In [6] traendo spunto dallo studio della curva di Hilbert di un fibrato proiettivo su una curva [Lanteri, *Internat. J. Math.* **25** (2014)], si considera il caso in cui (X, L) è una fibrazione in quadriche su una curva. Anche in questo caso si determina l'espressione esplicita del polinomio che definisce la corrispondente curva di Hilbert Γ. Risulta che Γ consiste di una conica G nel piano (x, y) con centro in $C = (\frac{1}{2}, 0)$ e di $n - 2$ rette parallele $\ell_1, \ldots, \ell_{n-2}$ con pendenza $n - 1$, equidistanziate, e che danno luogo ad una configurazione simmetrica rispetto a C. Si mostra che la conica G è riducibile in due rette ℓ e λ se e solo se la fibrazione in quadriche non ha fibre singolari. Inoltre, in questo caso, una delle due rette, diciamo ℓ, ha anch'essa pendenza $n - 1$. In particolare, se n è pari, ℓ risulta coincidere con ℓ_1 (a meno di un riordino), e quindi Γ è addirittura non ridotta. Inoltre, assumendo che le classi di K_X e di L in $\mathrm{Num}(X)$ siano linearmente independenti e $K_X + (n-1)L$ nef, si mostra che l'equazione ottenuta per Γ caratterizza il fatto che (X, L) è una fibrazione in quadriche su una curva. Questo, che è il risultato principale del lavoro, si può riguardare come un analogo per le fibrazioni in quadriche di quanto provato nel lavoro sopra citato per gli scroll su una curva liscia. Una ulteriore questione, stimolata da un problema posto nel lavoro con Beltrametti e Sommese già ricordato, riguarda la conica G. Ovviamente G è invariante per l'involuzione $(x, y) \mapsto (1 - x, -y)$ indotta dalla dualità di Serre. Non è ovvio invece capire se G stessa possa essere la curva di Hilbert di qualche superficie polarizzata. Anche restringendosi alle fibrazioni in quadriche senza fibre singolari, si mostra che se $n \geq 3$ la risposta è positiva solo per $n = 3$. D' altro cando, per $n = 2$, caso in cui $\Gamma = G$, si analizza se Γ possa essere la curve di Hilbert di altre superfici polarizzate, distinte dal conic bundle (X, L), e in tal caso si fornisce una risposta completa alla questione.

In [7] si generalizza il risultato principale dimostrato in [5] al caso in cui (X, L) è uno scroll di dimensione arbitraria su una superficie. Anche in questa situazione, la curva di Hilbert Γ di (X, L) consiste di $n - 2$ rette paralelle con data pendenza, equidistanziate, e di una conica G. In generale non esiste alcuna superficie $\mathbb{Q}$-polarizzata avente G come curva di Hilbert. Tuttavia, si prova che G è la curva di Hilbert della superficie $\mathbb{Q}$-polarizzata $(S, \frac{1}{n-1}\det\mathcal{E})$, dove $\mathcal{E}$ è il fibrato di rango $(n-1)$ dato dal push down di L via la proiezione dello scroll, se e soltanto se $\mathcal{E}$ è propriamente semistabile nel senso di Bogomolov. Viene anche esplorato il caso in cui $\mathcal{E}$ non è propriamente semistabile e questo porta ad una serie di condizioni affinchè G possa essere la curva di Hilbert della superficie base S rispetto ad una qualche $\mathbb{Q}$-polarizzazione.

b) Tra gli invarianti proiettivi di una superficie algebrica S immersa in $\mathbb{P}^N$ da un fibrato lineare molto ampio L, occupa un ruolo significativo la classe m: quando la varietà duale $\mathcal{D}(S)$ di S (cioé il sottoinsieme di $|L|$ che parametrizza gli iperpiani di $\mathbb{P}^N$ tangenti ad S) è una ipersuperficie nello spazio proiettivo duale $\mathbb{P}^{N\vee}$, il che accade sempre, purché $(S, L) \neq (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, m ne rappresenta il grado. Dato che $m = c_2(J_1(L))$, la seconda classe di Chern del primo jet bundle di L, in anni recenti, lo studio classico delle superfici con classe piccola è stato ripreso e trapiantato nel contesto più generale dei fibrati ampi. In particolare, Palleschi e Turrini hanno contribuito alla classificazione delle superfici polarizzate (S, H) ove H è soltanto un fibrato lineare ampio su S, studiando i valori piccoli di $c_2(J_1(H))$ e di $c_2(J_1(H)) - H^2$, ispirati da lavori classici di Marchionna e Gallarati. In questo contesto, $m := c_2(J_1(H))$ è chiamata classe generalizzata della superficie polarizzata (S, H). Scopo del lavoro [4] è rivisitare lo studio di questo carattere nel contesto dei fibrati vettoriali ampi. Su una varietà proiettiva complessa non singolare X, di dimensione n, si considerano un fibrato vettoriale ampio $\mathcal{E}$ di rango r, con $2 \leq r \leq n-2$ e un fibrato lineare ampio H. Guardando alla terna $(X, \mathcal{E}, H)$ e al fibrato vettoriale ampio di rango $n-2$ su X dato da $\mathcal{F} := \mathcal{E} \oplus H^{\oplus(n-r-2)}$, in [4] si definisce la classe generalizzata $m_2 = m_2(X, \mathcal{E}, H)$ di $(X, \mathcal{E}, H)$ come

$$m_2 := \left[c_2(\Omega_X \oplus \det\mathcal{F}) + c_1^2 - c_2 + H^2\right] \cdot c_{n-2} + 4(g-1),$$

dove Ω_X è il fibrato cotangente di X, $c_i := c_i(\mathcal{F})$ per $i = 1, 2, \ldots, n-2$, e $g := 1 + \frac{1}{2}(K_X + c_1 + H) \cdot H \cdot c_{n-2}$. Se $\mathcal{F}$ ammette una sezione che si annulla su una superficie liscia S, si ha che $m_2 = c_2(J_1(H_S))$, la classe generalizzata della superficie polarizzata (S, H_S). Inoltre, se H è molto ampio e si pone $\mathcal{E} = H^{\oplus(n-2)}$, allora m_2 risulta essere la seconda classe della varietà proiettiva X immersa in $\mathbb{P}^N$ via $|H|$ (carattere classico, già considerato da Severi). Questa definizione permette di rivisitare e di estendere diversi risultati di classificazione delle supefici con classe piccola al contesto dei fibrati vettoriali ampi. In particolare, se $\mathcal{F}$ soddisfa l'ipotesi di cui sopra, si mostra che $m_2 \geq d$, dove $d := c_{n-2}(\mathcal{F}) \cdot H^2$, eccetto che per $(X, \mathcal{E}, H) = \left(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus r}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\right)$, o $\left(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n-2)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2)\right)$, e le terne per cui vale l'uguaglianza vengono completamente descritte. Inoltre, in linea con il caso classico vengono studiate le terne per cui è piccola la differenza $\delta := m_2 - d$. Si mostra che $\delta \geq 6$, eccetto che per poche terne $(X, \mathcal{E}, H)$, di cui si fornisce una descrizione precisa. Come conseguenza si ottiene la descrizione di tutte le terne possibili $(X, \mathcal{E}, H)$ con $m_2 \leq 6$. Questa analisi viene anche portata avanti per mostrare che se $m_2 > 6$, allora $m_2 \geq 10$, purché S abbia dimensione di Kodaira

$\kappa(S) \geq 0$. Includendo nel quadro anche g, che rappresenta il genere sezionale di (S, H_S), vengono poi caratterizzate le terne per cui $\delta \leq 2g+2$, e si mostra che $\delta \geq 2g+d$ se $\kappa(S) \geq 0$. Come è naturale attendersi, più forti sono le proprietà del fibrato lineare H_S (esistenza di una curva liscia nel sistema lineare $|H_S|$, generazione globale, molto ampiezza), più alti sono i valori di m_2 che si possono raggiungere con questi risultati. In particolare, supponendo che H_S sia globalmente generato, si classificano le terne per cui $m_2 \leq 11$, quelle con $\delta \leq 2g+2$, come pure quelle per cui $\delta \leq 2g+5$ assumendo che sia $\kappa(S) \geq 0$. D'altra parte, sotto l'ipotesi che H_S sia molto ampio, vengono rivisitati tutti i risultati precedenti e si dimostra che $\delta \geq 2g+11$ se $\kappa(S) \geq 0$. In tutta l'analisi diversi risultati sui fibrati vettoriali ampi con una sezione che si annulla lungo una superficie di qualche tipo speciale, dimostrati con Maeda alcuni anni fa, si rivelano di grande aiuto. La strategia, infatti, è la seguente: innanzitutto, si guarda alla differenza δ, che risulta esprimibile in termini di caratteri geometrici e topologici. Estendendo o raffinando alcuni risultati noti, questo permette di inserire la superficie polarizzata (S, H_S) in una precisa lista di possibiltà. A questo punto, applicando i risultati sui fibrati vettoriali ampi di cui sopra, si riesce a ridurre queste liste, talvolta anche drasticamente, ad un numero molto esiguo di casi, per i quali si ottiene una descrizione precisa di $\mathcal{E}$ e di H in base alla struttura ammissibile di X. Ad esempio, in certi casi S potrebbe essere "a priori" una superficie ellittica minimale, la cui fibrazione è dotata di qualche fibra multipla, ma questa possibilità viene esclusa in base a un risultato di Lanteri e Maeda. Ne viene dunque che questi casi non si sollevano al contesto dei fibrati vettoriali.

c) Sia $X \subset \mathbb{P}^N$ una qualunque superficie liscia e sia k un intero positivo. Il comportamento k-osculatorio di X è determinato dal rango della mappa dei k-getti in ogni punto di X. Questo non può eccedere $\min\{\binom{k+2}{2}, N+1\}$, il primo dei due interi rappresentando il rango del fibrato delle k-sime parti principali di X. Se X ha qualche struttura speciale, il massimo di tali ranghi per $x \in X$, s_k, può anche risultare inferiore (come accade ad esempio per gli scroll). In particolare, se X è una fibrazione in coniche, da un risultato di Lanteri, Mallavibarrena e Piene (lavoro [2] dell'elenco 0) si ha che $s_k \leq \min\{3k, N+1\}$. Per $k=2$ le due limitazioni superiori coincidono, fornendo: $s_2 \leq 6$ se $N \geq 5$. Questo significa che, limitandosi allo studio della 2-osculazione, le fibrazioni in coniche su una curva non rivestono alcun ruolo speciale tra le superfici. La situazione è ben diversa invece per $k \geq 3$. Ad esempio, per $N \geq 9$ si ha $s_3 \leq 10$ per una generica superficie, mentre $s_3 \leq 9$ per una fibrazione in coniche.

Questa è l'osservazione fondamentale che ha dato origine al lavoro [1]. In esso, continuando studi precedenti, si fornisce il primo contributo allo studio della osculazione per superfici con $k > 2$, fatta eccezione per gli scroll. Ad esempio, con riferimento al caso $k=3$, è naturale osservare che ogni superficie si può immergere in $\mathbb{P}^5$ e che ogni fibrazione in coniche in $\mathbb{P}^N$ $(N \geq 8)$ si può proiettare isomorficamente in $\mathbb{P}^8$ senza modificare il valore di s_3. Questo suggerisce un parallelo tra lo studio della 2-osculazione per ogni superficie in $\mathbb{P}^5$ effettuato da Shifrin e quello della 3-osculazione per le fibrazioni in coniche in $\mathbb{P}^8$. Un risultato inatteso che si ottiene in questo contesto è che ogni fibrazione in coniche in $\mathbb{P}^8$ o risulta ipoosculante oppure il suo luogo inflessionale $\Phi_3(X)$ ha dimensione 1. Più in generale, si considerano fibrazioni in coniche $X \subset \mathbb{P}^N$ il cui k-esimo luogo inflessionale ha la codimensione attesa (k essendo il più grande intero per cui $3k \leq N+1$), e in questo contesto si generalizzano alcuni risultati del lavoro [2] dell'elenco 0. In particolare, per mezzo della formula di Porteous, si forniscono espressioni esplicite per le classi di coomologia dei luoghi $\Phi_k(X)$. Da ciò si deduce il numero e la descrizione precisa dei flessi delle due fibrazioni razionali in coniche di $\mathbb{P}^4$: la superficie quartica di del Pezzo e la superficie quintica di Castelnuovo. Per determinare il luogo inflessionale di X occorre calcolare il rango della mappa dei k-getti in ogni punto di X e questo si traduce nel calcolo della codimensione in $|V|$ (sistema lineare delle sezioni iperpiane di $X \subset \mathbb{P}^N$) del sottosistema lineare $|V-(k+1)x|$ delle sezioni iperpiane di X aventi in x un punto singolare di moltiplicità $\geq k+1$. Il fatto cruciale è che se $k \geq 2$, per ogni fibrazione in coniche, il sistema $|V-(k+1)x|$ ha delle componenti fisse, che occorre individuare per calcolare la dimensione. Ad esempio, la fibra per x, se liscia, è una componente fissa di $|V-3x|$. Questo fatto è ovvio, ma in aggiunta a quelle ovvie, possono capitare ulteriori componenti fisse in $|V-(k+1)x|$, talvolta inattese. Ciò porta, già per $k=2$, ad un certo numero di casi possibili, a seconda che X contenga o meno delle curve liscie di grado piccolo passanti per x. Come conseguenza di ciò, in alcune situazioni, anche nella descrizione del secondo luogo inflessionale $\Phi_2(X)$ intervengono i luoghi di salto di certi sistemi lineari. Una cura particolare è riservata al caso delle fibrazioni in coniche contenenti una retta o una conica trasversa alle fibre, che vengono caratterizzate. Il lavoro contiene anche una estesa galleria di esempi ad illustrazione dei vari fenomeni che capitano per $k=2,3$ e talvolta 4. Infine vengono studiati i luoghi inflessionali delle superfici di Castelnuovo, superfici razionali fibrate in coniche, di genere sezionale 2, il cui modello piano è descritto da un opportuno sistema lineare di quartiche nodate.

In [8], infine, si correggono due affermazioni contenute nel lavoro [2] dell'elenco 0. In particolare, tramite un appropriato controesempio si mostra che una supposta uguaglianza tra le dimensioni degli spazi osculatori di una fibrazione in quadriche e del fibrato proiettivo che essa genera è una disuguaglianza, l'uguaglianza non valendo in ogni punto, ma soltanto nel punto generico.

Ulteriori ricerche negli ambiti a), e c) sono tuttora in corso e si ritiene che porteranno a qualche risultato significativo. In particolare è già in corso di redazione un lavoro con A. L. Tironi in cui si fornisce una caratterizzazione delle varietà speciali che intervengono nell'aggiunzione tramite le corrispondenti curve di Hilbert.

Nel corso del triennio in esame il sottoscritto ha mantenuto i contatti scientifici con varie istituzioni estere già stabiliti in anni precedenti, in particolare:

- la *University of Notre Dame*, Indiana (U.S.A.), Prof. Andrew J. Sommese;

- la *De Paul University* di Chicago (U.S.A.), Prof. Gian Mario Besana;

- la *University of Utah*, Salt Lake City (U.S.A.), Prof. Tommaso de Fernex;

- la *Universidad Complutense* di Madrid (Spagna), Prof. Enrique Arrondo, Prof. Raquel Mallavibarrena,

- la *Universidad Rey Juan Carlos*, Mostoles-Madrid(Spagna), Prof. Roberto Muñoz;

- il *Royal Institute of Technology* di Stoccolma (Svezia), Prof. Sandra Di Rocco;

- la *University of Oslo* (Norvegia), Prof. Ragni Piene;

- la *University of Bergen* (Norvegia), Prof. Andreas L. Knutsen;

- la *Universidad de Concepcion* (Chile), Prof. Andrea L. Tironi.

Per quanto riguarda le attività di ricerca inquadrate nell'ambito di progetti nazionali o locali, il sottoscritto è stato:

- membro dell'unità operativa di Milano afferente al PRIN 2015 cofinanziato dal MIUR "Geometria delle varietá algebriche" coordinato dal Prof. S. Verra;

- membro del GNSAGA (Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e le loro Applicazioni) dell'INdAM;

- membro del progetto di ricerca interdipartimentale di UniMi "Geometria delle varietà proiettive e sue applicazioni", coordinato dalla prof.ssa C. Turrini.

Nel periodo in esame, il sottoscritto ha partecipato ai seguenti eventi scientifici:

1. "Séminaire Grothendieck", evento in memoria di A. Grothendieck, Univ. di Milano, 23/3/2015

2. Genova–Torino–Milano Seminar: some topics in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Univ. di Milano, 24–25/9/2015

3. "L'eredità culturale e morale di Carlo Felice Manara nel centenario della nascita", Univ. di Milano, 18/5/2016

4. "Algebra and Geometry in Catania", workshop in honor of Alfio Ragusa's 70th birthday, Univ. di Catania, 21–23/9/2016

5. "Ideas on Geometry and Science, in memory of Federigo Enriques (1871-1946)", Centro Interdisciplinare Linceo, Roma 14/10/2016

6. "Pomeriggio di seminari di geometria algebrica in onore di Maurizio Cornalba", Univ. di Pavia, 24/5/2017

7. "Modern Algebra and Classical Geometry: Together with Edoardo Sernesi", Trento, Italy, 21–24/6/2017

8. "A day to remember Aldo Biancofiore", L'Aquila, 8/9/2017.

Dell'evento 3 è stato l'organizzatore. Nell'ambito di 4 ha tenuto la conferenza "On the Hilbert curves of some special varieties". Sullo stesso tema ha tenuto inoltre una conferenza per il Seminario de Geometria Algebraica presso l'Univ. Complutense di Madrid, il 20/10/2016, e in occasione di 8 ha tenuto la conferenza "The Hilbert curve of a polarized manifold: a new entry in adjunction theory ?"

Ha partecipato inoltre a vari seminari e corsi avanzati attinenti alla geometria algebrica tenuti presso il Dipartimento di Matematica.

Ha effettuato alcune missioni di breve periodo in Italia e all'estero per svolgere attività di ricerca in collaborazione: Genova, 23–24/2/2015 (Prof. M. Beltrametti); Madrid, 30/1–7/2/2015, 20–29/10/2016, 18–28/10/2017 (Prof. R. Mallavibarrena).

Nell'ambito delle attività previste dai vari progetti di cui sopra, ha ricevuto visite di colleghi italiani e stranieri; tra questi:

Prof. R. Mallavibarrena (Univ. Complut. Madrid), 16–23/7/2015;

Prof. A. L. Tironi (Univ. de Concepción, Chile), 16/2–6/3/2015, 15–30/7/2015, 1–12 e 22–27/2/2016, 11–29/7/2016, 15/12/2016–5/1/2017, 15–28/2/2017, 17/7–5/8/2017, 18/12/2017–6/1/2018.

Infine, nel triennio in esame, è stato autore di varie recensioni:

8 per "Mathematical Reviews",

11 per "Zentralblatt für Mathematik",

e *referee* di 4 lavori per riviste internazionali, tra cui, Hiroshima Mathematical Journal, Annali di Matematica Pura e Applicata, Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliqueés,

È stato membro del Collegio dei Docenti del Dottorato in Scienze Matematiche, ed inoltre,

- Presidente della Commissione d'esame finale per la tesi di dottorato in Matematica (settore geometria algebrica) del dott. Francesco Amodeo (XXVII ciclo), presso l'Univ. di Milano, gen. 2015;

Per quanto attiene all'attività didattica svolta nell'ambito dei Corsi di Laurea, in tutto il periodo in esame il sottoscritto ha tenuto il corso di "Geometria 2" (9 cfu) per la LT in Matematica, nonché il corso di "Superfici algebriche" (6 cfu), per la LM in Matematica. A tale corso hanno partecipato diversi studenti del Programma ALGANT, nonchè studenti di dottorato delle Università di Milano, di Genova e di Pavia. In tutti e tre gli anni accademici ha tenuto inoltre una parte (3 cfu) del corso di Metodi Matematici per la Comunicazione digitale (un corso di Matematica discreta), per la LT in Informatica per la Comunicazione Digitale (Collegio Didattico di Informatica).

Oltre a partecipare agli esami dei corsi suddetti, in diverse occasioni è stato membro o presidente di commissione per gli esami di laurea triennale e magistrale in Matematica e in un'occasione anche per gli esami di laurea triennale in Comunicazione Digitale.

Nel 2015 e 2016 è stato altresì relatore della tesi di laurea magistrale in Matematica del dott. E. Fossati "On the Novikov conjecture" (in collaborazione con il prof. W. Lück, Univ. di Bonn). Il dott. Fossati è attualmente studente di dottorato presso l'Università di Pisa) Nel corso del 2017 ha diretto la tesi di laurea magistrale del dott. M. Orsini su argomenti inerenti l'osculazione per superfici di genere sezionale due, la cui discussione è prevista per l'estate del 2018.

Per qualche tempo ha continuato a seguire la ricerca svolta dal dott. Roberto Laface per la sua tesi di laurea magistrale, prima del suo inserimento nel Dottorato presso la Leibnitz Universität di Hannover. I risultati hanno portato alla pubblicazione:

R. Laface, *On Zariski decomposition with and without support*, Taiwanese J. Math. **20** (2016), 755–767.

Per quanto attiene alle attività organizzative, il sottoscritto è, o è stato:

- membro della Commissione Scientifica del Dipartimento di Matematica. fin dalla sua istituzione e membro della Commissione Valutazione, sino al 9/2017;

- decano del Dipartimento di Matematica da apr./2014 e in tale veste ha attivato le procedure per l'elezione del Direttore (triennio acc- 2014-17 e triennio acc. 2017-2020), per quella del Presidente del Collegio Didattico (triennio acc. 2015-2018); come decano del Collegio dei Docenti del Dottorato in Scienze Matematiche quella per l'elezione del Coordinatore (triennio accad. 2015-18).

- presidente della Commissione per l'ammissione alla Laurea Magistrale in Matematica istituita dal Collegio Didattico di Matematica (dal 2013).

Infine, nel corso del triennio in esame egli è stato:

- membro della Commissione di Concorso per l'attribuzione di un posto di prima fascia del s. s. d. MAT/03–Geometria presso l'Univ. di Catania (set. 2015–gen. 2016);

- membro della Commissione per il rinnovo di un contratto di ricercatore a tempo determinato di tipo B del s. s. d. MAT/03–Geometria presso l'Univ. di Palermo (nov.–dic. 2015);

- presidente della Commissione di Concorso per l'attribuzione di un posto di ricercatore a tempo determinato di tipo B del s. s. d. MAT/03–Geometria presso l'Univ. di Milano (gen.–apr. 2016);

- membro della Commissione di Concorso per l'attribuzione di un posto di professore di seconda fascia del s. s. d. MAT/02–Algebra presso l'Univ. di Cagliari (lug.–set. 2016);

- presidente della Commissione di Concorso per l'attribuzione di un posto di professore di seconda fascia del s. s. d. MAT/03–Geometria presso l'Univ. di Milano (giu. 2017);

In fede,

Milano, 31 Dicembre 2017