RELAZIONE SULL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA SVOLTA NEL TRIENNIO 2009–2011

dal Prof. Antonio Lanteri

Il sottoscritto Antonio Lanteri è professore ordinario del settore scientifico disciplinare MAT/03–Geometria presso la Facoltà di Scienze M.F.N. della Università degli Studi di Milano (straord. dal 9/3/1987) ed afferisce al Dipartimento di Matematica "F. Enriques". Dal 1993 è responsabile di vari progetti di ricerca facenti capo al settore MAT/03; è membro del Seminario Matematico e Fisico di Milano dal 1987 e Membro Effettivo dell'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere dal 2010 (Socio Corrispondente dal 1998). Dal 1996 al 2004 è stato membro del Consiglio Scientifico della "Revista Matemática Complutense".

Gli interessi di ricerca coltivati nel triennio 2009–2011 rientrano nell'ambito della geometria algebrica classica e riguardano la geometria e la classificazione delle varietà proiettive complesse di dimensione ≥ 2, con particolare riferimento ai sistemi lineari, alle varietà speciali e alla teoria dei fibrati vettoriali ampi.

L'attività di ricerca svolta si è concretizzata nei lavori elencati qui di seguito. Nell'elenco 0 sono riportate pubblicazioni posteriori al 2008, ma relative a ricerche condotte precedentemente. Nell'elenco 1 sono indicati invece quei lavori relativi a ricerche sviluppate nel corso del triennio in esame, ancorchè non tutti pubblicati alla data odierna.

Elenco 0.

[1] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, *Osculating properties of decomposable scrolls*, Math. Nachr. **282** (2009), 1548–1566.

[2] A. Lanteri, R. Muñoz, *Low dimensional discriminant loci and scrolls*, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), 2205–2225.

[3] A. Lanteri, H. Maeda, *Double covers of Del Pezzo manifolds and bielliptic curve sections*, Interactions of Classical and Numerical Algebraic Geometry, G. M. Besana, S. Di Rocco, D. Bates, and C. Wampler eds, Contemp. Math., vol. 496, Amer. Math. Soc., Providence, 2009, pp. 265–281.

[4] A. Lanteri, C. Novelli, *Ample vector bundles of small Δ-genera*, J. Algebra **323** (2010), 671-697.

[5] M. C. Beltrametti, A. Lanteri, A. J. Sommese, *Hilbert curves of polarized varieties*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 461–479.

Elenco 1.

[1] A. Lanteri, V. Nannola, *Remarks on the Bordiga scrolls of degree ten*, JP J. Alg. Numb. Theory Appl. **13** (2009), 209–219.

[2] L. Benzo, A. Lanteri, *Ample vector bundles and polarized manifolds of sectional genus three*, Adv. Geom **11** (2011), 623–636.

[3] M. C. Beltrametti, A. Knutsen, A. Lanteri, C. Novelli, *Geometry of rays-positive manifolds*, Collect. Math., Publ. on line June 26, 2011. (to appear).

[4] A. Lanteri, R. Mallavibarrena, R. Piene, *Inflectional loci of scrolls over smooth, projective varieties*, Indiana Univ. Math. J. (to appear).

[5] E. Arrondo, A. Lanteri, C. Novelli, *A notion of Δ-multigenus for certain rank two ample vector bundles*, (Preprint, 2011).

[6] G.M. Besana, S. Di Rocco, A. Lanteri, *The variety of bad zero-schemes*, J. Pure Appl. Algebra (to appear).

In relazione al tema dominante i lavori dell'elenco 1 possono raggrupparsi in modo schematico come segue.

a) Sistemi lineari: aggiunzione per fibrati lineari nef e big e classificazione di varietà con proprietà particolari, bad 0-schemi (lavori [3], [6]).
b) Fibrati vettoriali ampi e varietà speciali: risultati di classificazione e individuazione di nuovi invarianti (lavori [1], [2], [5]).
c) Geometria proiettiva differenziale: osculazione e varietà duali di ordine superiore (lavoro [4]).

Segue un breve cenno di descrizione dei lavori, gruppo per gruppo. Per varietà si intende sempre una varietà proiettiva complessa n-dimensionale, non singolare a meno che non sia fatto esplicito riferimento a singolarità.

a) Sia M una varietà proiettiva complessa con fibrato canonico K_M non numericamente effettivo di dimension $n \geq 2$ e sia L un fibrato lineare su M. Nella teoria della aggiunzione classica si assume che L sia ampio: in tal caso, per il teorema di razionalità di Kawamata l'invariante $\tau = \tau(M, L) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid K_M + tL$ è nef $\}$ è un numero razionale positivo, detto *nefvalue* di (M, L). L'approccio classico della teoria dell'aggiunzione alla classificazione delle varietà polarizzate (M, L) si fonda proprio sullo studio della struttura del morfismo associato al sistema lineare $|K_M + \tau L|$. Una delle maggiori ostruzioni che si incontrano nell'estendere questo studio al caso in cui il fibrato L sia soltanto nef (numericamente effettivo) è la possibile esistenza di cicli $Z \in \overline{NE}(M)$ tali che $K_M \cdot Z < 0$ e $L \cdot Z = 0$. In questo caso, infatti, l'invariante τ non è definito. Per superare questo problema, in [3] si considerano i raggi estremali L-positivi di M, cioè quelli della forma $R = \mathbb{R}_+[C]$, dove C è una curva razionale minimale tale che $L \cdot C > 0$ e per ciascuno di essi si definisce l'invariante $\tau_L(R) := \frac{-K_M \cdot C}{L \cdot C}$. Questo non richiede neppure che L sia nef, e si può quindi lavorare supponendo che (M, L) sia una qualunque varietà pre-polarizzata. Sia $\varphi\colon M \to Y$ la contrazione associata ad un raggio estremale L-positivo, R. Dato che L è φ-ampio, esiste un fibrato lineare ampio A su Y per il quale $L + \varphi^* A$ è ampio su M. Chiaramente $\tau_L(R) = \tau_{L+\varphi^* A}(R)$, e l'invariante $\tau_L(R)$ risulta perciò essere esattamente il nefvalue della varietà polarizzata $(M, L + \varphi^* A)$. Questo permette, attraverso la classificazione dei raggi estremali e delle contrazioni di Fano-Mori, nota nel contesto delle varietà polarizzate, di riprodurre risultati di struttura sulle coppie (M, L) che ammettono un raggio estremale L-positivo e un'applicazione iterata di questi porta ad una nozione naturale di mappa di prima riduzione nel contesto delle varietà pre-polarizzate. Questa è la base per lo studio della geometria delle varietà dette *rays-positive* (cioè delle coppie (M, L) con L nef e tale che $L \cdot R > 0$ per ogni raggio estremale R) che viene effettuato in [3]. In sostanza, quella delle varietà *rays-positive* (M, L) si rivela essere la più larga classe di varietà pre-polarizzate per le quali la teoria dell'aggiunzione funziona ancora, nel senso che $K_M + kL$ risulta essere nef (e quindi semi-ampio qualora L sia anche big) per valori alti di k, ad eccezione di casi dettagliatamente descritti. Nel lavoro sono presentati diversi esempi significativi ed applicazioni. In particolare, generalizzando un risultato di Ionescu degli anni '80, vengono classificate le varietà proiettive con singolarità crepanti aventi grado piccolo rispetto alla codimensione. Inoltre, in consonanza con una congettura di Fujita, si dimostra la non-negatività del genere sezionale $g(M, L)$ nel contesto delle varietà *rays-positive* e si descrivono le coppie con $g(M, L) = 0$ e 1.

Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare su una varietà proiettiva X di dimensione $n \geq 2$. Un *bad* zero-schema per $\mathcal{S}$ è uno zero-schema il cui contenimento forza gli elementi di $\mathcal{S}$ ad essere riducibili o non ridotti. I *bad* zero-schemi sono stati introdotti e studiati diffusamente in lavori precedenti. Se $\mathcal{S}$ è in qualche modo positivo, ad esempio ampio e privo di punti base, è noto che il luogo dei *bad* zero-schemi di lunghezza 1 è semplicemente un insieme finito, se non vuoto. Ma questo luogo diventa un interssante oggetto di studio per *bad* zero-schemi di lunghezza maggiore. Per esempio, se $\mathcal{S}$ è un sistema lineare molto ampio su X ed esistono *bad* zero-schemi di lunghezza due, allora X risulta essere necessariamente una superficie contenente delle rette e il luogo descritto da tali zero-schemi è l'unione dei secondi prodotti simmetrici delle rette contenute in X. In particolare, quando X è uno scroll, questo luogo ha codimensione uno nello schema di Hilbert degli zero-schemi di lunghezza due. Scopo del lavoro [6] è quello di definire in modo appropriato il luogo dei *bad* zero-schemi di lunghezza minima per un sistema lineare ampio e privo di punti base e studiare il caso in cui tale luogo ha dimensione massima, cioè ha codimensione uno nello schema di Hilbert degli zero-schemi di data lunghezza. Dato che lo schema di Hilbert dei punti su varietà di dimensione $n \geq 3$ è un oggetto ancora lontano dall'essere ben compreso, per prima cosa si definisce $\mathfrak{B}_0$, il luogo dei *bad* zero-schemi ridotti, nella chiusura della componente aperta dello schma di Hilbert che parametrizza gli zero-schemi ridotti. Si dimostra che se $\mathfrak{B}_0$ ha dimensione massima, allora si ha $n = 2$, i *bad* zero-schemi di lunghezza minima impongono il massimo numero di condizioni independenti su $\mathcal{S}$, il luogo degli elementi reducibili di $\mathcal{S}$ ha codimensione 1 e quindi risulta essere unione di componenti del luogo discriminante. Inoltre, il sistema lineare dei membri di $\mathcal{S}$ contenenti un generico *bad* zero-schema di lunghezza minima ha una componente fissa. Quando il sistema lineare $\mathcal{S}$ è molto ampio, l'irriducibilità del luogo discriminante mostra quanto sia circoscritta la situazione in cui $\mathfrak{B}_0$ ha dimensione massima. Infatti, in queste condizioni si hanno due soli casi possibili: $n = 2$ e $(X, \mathcal{S})$ è la superficie di Veronese (o una sua proiezione isomorfa) o uno scroll. Invece, quando $\mathcal{S}$ è soltanto ampio e privo di punti base la gamma di situazione possibili risulta molto varia, come mostrano svariati esempi di superfici con $\mathfrak{B}_0$ di dimensione massima. Ciò sembra indicare che una classificazione sia ancora fuori portata. D'altra parte, lo schema di Hilbert dei punti su una superficie è ben conosciuto; perciò per $n = 2$ si affronta anche lo studio del luogo $\mathfrak{B}$ dei *bad* zero-schemi di lunghezza minima (non necessariamente ridotti). In particolare, risulta che la caratterizzazione fornita per sistemi lineari molto ampi continua a valere anche nel caso non ridotto. A complemento di quanto sopra, in [6] si introduce anche un nuovo invariante (*spread*) che misura i gradi di libertà nella costruzione dei *bad* zero-schemi. Si collega infine la proprietà di avere $\mathfrak{B}_0$ di massima dimensione con il fatto che lo spread raggiunga il valore massimo consentito dalle ipotesi su $\mathcal{S}$.

b) L'interesse per questo tipo di ricerche risale ad un programma sui fibrati vettoriali ampi, intrapreso e sviluppato con Maeda a partire dagli anni '90. Oggetto di studio sono varietà X di dimensione $n \geq 3$, dotate di un fibrato vettoriale ampio $\mathcal{E}$ di rango r, $2 \leq r \leq n-1$, con una sezione che si annulla su una sottovarietà liscia Z, della dimensione attesa $n-r$, che sia speciale, in un senso da precisare volta per volta. Lo scopo è quello di classificare le coppie $(X, \mathcal{E})$ coinvolte, o, in subordine, fornire dei teoremi di struttura significativi. Risultati in questa direzione hanno portato a generalizzare diversi teoremi sulle varietà speciali contenute in un'altra varietà come divisori ampi (Mori, Sommese, Fujita, Bădescu). I risultati così ottenuti hanno consentito a loro volta di rivisitare con successo diverse tematiche classiche di geometria delle varietà proiettive nel contesto più generale dei fibrati vettoriali ampi.

Ad esempio, al quadro già descritto si può aggiungere la richiesta che su X esista un fibrato lineare ampio H la cui restrizione $H|_Z$ alla sottovarietà Z rende $(Z, H|_Z)$ una varietà polarizzata di genere sezionale g piccolo. La classificazione delle terne $(X, \mathcal{E}, H)$ siffatte è nota per $g \leq 1$ (Maeda), per $g = 2$ supponendo che $H|_Z$ sia globalmente generato (Gaiera e Lanteri) e per $g = 3$ supponendo che $H|_Z$ sia molto ampio (Lanteri e Maeda). Ispirati dai lavori precedenti, in [2] si studia il caso $g = 3$ assumendo $n-r \geq 3$ e che il fibrato lineare $H|_Z$ sia globalmente generato. Lo studio parallelo effettuato nel caso in cui $H|_Z$ è molto ampio si basa sulla classificazione delle varietà proiettive di genere sezionale 3 dovuta a Ionescu. In [2] invece, il punto di partenza è un lavoro di Fukuma e Ishihara in cui vengono classificate le varietà di dimensione ≥ 3 polarizzate da un fibrato lineare ampio e globalmente generato di genere 3. Ovviamente la lista offerta da questa classificazione include delle nuove coppie rispetto a quella di Ionescu e l'analisi per stabilire quali tra queste si possa effettivamente sollevare al contesto dei fibrati vettoriali dando luogo ad una terna $(X, \mathcal{E}, H)$ come sopra richiede in alcuni casi delle argomentazioni sottili.

Le superfici razionali polarizzate da un fibrato lineare molto ampio che ammettono $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))$ come riduzione nel senso della teoria dell'aggiunzione sono note come superfici di Bordiga. Esse hanno genere sezionale tre e grado d, con $6 \leq d \leq 16$. Ionescu ha mostrato che per $7 \leq d \leq 10$ tali superfici si presentano come sezioni iperpiane di varietà tridimensionali che sono scroll su $\mathbb{P}^2$, detti *scroll di Bordiga*. Se (X, H) è un tale scroll, allora $X = \mathbb{P}(\mathcal{U})$ è il proiettivizzato di un fibrato vettoriale molto ampio $\mathcal{U}$ di rango 2 su $\mathbb{P}^2$ e H ne è il fibrato lineare tautologico. Le classi di Chern di $\mathcal{U}$ sono $c_1 = 4$, $c_2 = 16 - d$. Recentemente, Maeda ha mostrato che per $d = 10$ una varietà X siffatta è isomorfa allo spazio proiettivo tridimensionale $\mathbb{P}^3$ scoppiato lungo una cubica sghemba C. Questa scoperta suggerisce in maniera inattesa la possibilità di collegare proprietà geometriche delle cubiche sghembe $C \subset \mathbb{P}^3$ a quelle dei fibrati vettoriali molto ampi $\mathcal{U}$ di rango 2 su $\mathbb{P}^2$ con $(c_1, c_2) = (4, 6)$. Questo è esattamente lo scopo del lavoro [1], nel quale si riesce a descrivere le rette di salto e le coniche di salto di $\mathcal{U}$ attraverso la geometria di C, coinvolgendo le superfici quadriche passanti per C e le superfici quartiche aventi C come luogo doppio.

Come osservato da Fujita, la nozione di Δ-genere, da lui introdotta per lo studio delle varietà polarizzate, non ha trovato ancora un corrispettivo soddisfacente per fibrati vettoriali ampi $\mathcal{E}$ su una varietà X. In un precedente lavoro si è adottata per $(X, \mathcal{E})$ una definizione di Δ-genere strettamente legata al Δ-genere dello scroll $(\mathbb{P}_X(\mathcal{E}), \xi_{\mathcal{E}})$ associato ad $(X, \mathcal{E})$ e si sono ottenuti dei risultati di classificazione per le coppie $(X, \mathcal{E})$ con Δ-genere piccolo. In [5] si introduce una nuova nozione di Δ-multigenere per fibrati vettoriali ampi $\mathcal{E}$ di rango 2 su una varietà tridimensionale X. Per una coppia $(X, \mathcal{E})$ siffatta, il Δ-multigenere viene definito come una coppia di interi (δ_1, δ_2), dove $\delta_1 = \Delta(\mathbb{P}_X(\mathcal{E}), \xi_{\mathcal{E}})$, mentre δ_2 tiene conto degli endomorfismi di $\mathcal{E}$. Il significato di δ_2 diventa geometricamente evidente quando $\mathcal{E}$ ammette una sezione che si annulla lungo una curva liscia Z: in tal caso infatti si dimostra che $\delta_2 = \Delta(\mathbb{P}_Z(\mathcal{E}|_Z), \xi_{\mathcal{E}|_Z})$. Nel lavoro si studiano le coppie $(X, \mathcal{E})$ per le quali δ_1 e δ_2 hanno valori piccoli. Naturalmente, più forti sono le proprietà del fibrato $\mathcal{E}$ più elevati sono i valori di δ_1 e δ_2 che è possibile raggiungere nella classificazione.

c) Nello studio delle varietà duali di ordine superiore, rivestono particolare interesse con riferimento all'osculazione quelle varietà che presentano un comportamento patologico. Tra queste, le più indagate in letteratura sono gli scroll. Sia $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(V)$ uno scroll n-dimensionale su una varietà Y di dimensione m e sia $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$ il suo fibrato iperpiano. Per la particolare struttura di X, l'omomorfismo di fasci j_k che ad ogni sezione σ di $V \otimes \mathcal{O}_X$ associa il suo k-esimo getto $j_{k,x}(\sigma)$ in x, per ogni $x \in X$, per $k \geq 2$ risulta avere nel punto generico un rango, s_k, inferiore a quello che ci si può attendere su una generica varietà n-dimensionale (ad es. non contenente rette ed immersa con codimensione alta); ad es., per $m = 1$ il rango generico di j_k è solo $kn + 1$ per ogni k tale che $kn \leq N$. In un precedente lavoro dedicato al caso $m = 1$, si è ottenuta, per il massimo intero k siffatto, una formula esplicita per la classe di coomologia intera del k-mo luogo inflessionale $\Phi_k(X)$ di X (luogo dei punti $x \in X$ in cui il rango di $j_{k,x}$ cala ulteriormente). In particolare, ciò ha permesso di contare i flessi di X, quando essi sono in numero finito e di caratterizzare gli scroll privi di flessi, in un *range* appropriato, estendendo a dimensione arbitraria risultati ottenuti per superfici da Shifrin e da Piene e Tai negli anni '80. Il lavoro [4] è dedicato allo studio del caso $m > 1$ e qui la situazione diventa molto più difficile per diverse ragioni. Innazitutto, pur assumendo come punto di partenza lo stesso quadro di riferimento adottato nel lavoro precedente, la costruzione di fibrati adeguati a trattare il fenomeno dell'osculazione si presenta più complessa e richiede la definizione di un nuovo fibrato per poter ripristinare dei diagrammi esatti convenienti. Inoltre, al crescere di m diventa sempre più difficile ottenere delle espressioni esplicite per la classe di coomologia di $\Phi_k(X)$, ricorrendo alla formula di Porteous. Infine, come nel caso degli scroll su una curva, si deve imporre che k renda s_k il massimo valore ammissibile per uno scroll di dimensione n su Y in $\mathbb{P}^N$. Esplicitando l'espressione di s_k, questa condizione si riflette su m, n e N, fissando il *range* di validità dei risultati che possono essere stabiliti. Si riscontra che diversi esempi interessanti sfuggono alla trattazione condotta con i metodi adottati e di essi si deve fornire perciò una discussione separata. Proseguendo nella descrizione del contesto generale, da un appropriato diagramma si riesce comunque ad estrarre un'espressione formale per la classe di coomologia di $\Phi_k(X)$: essa risulta essere il prodotto di $k+1$ inversi delle classi di Chern totali di certi fibrati vettoriali che coinvolgono potenze simmetriche del fibrato tangente T_Y, il fibrato vettoriale $\pi_*\mathcal{L}$, dove $\pi : X \to Y$ è la proiezione dello scroll, e lo stesso $\mathcal{L}$. Per esplicitare questa formula è necessario o semplificare i fibrati vettoriali coinvolti oppure ridurre il numero dei fattori. Nella prima direzione si colloca lo studio del caso in cui Y è una varietà abeliana: qui la complessità del calcolo è rappresentata soltanto dalla dimensione m e per $m = 2$ e 3 si riesce a fornire delle formule esplicite per la classe di $\Phi_k(X)$. Andando nella seconda direzione si può invece studiare il caso $k = 2$ in generale, e qui la complessità dipende dalla codimensione ℓ di $\Phi_2(X)$. Per $\ell = 1$ si ottengono: una formula esplicita per $\Phi_2(X)$ valida per ogni m e n, una limitazione inferiore per il suo grado ed anche un suo miglioramento nell'ipotsi che un opportuno fibrato aggiunto su Y sia nef. Questa situazione viene poi ulteriormente approfondita per $(n, m) = (3, 2)$ e per scroll tridimensionali in $\mathbb{P}^8$, si ottiene la limitazione inferiore $\deg \Phi_2(X) \geq 3d$, dove d è il grado di X, a meno di eccezioni precisamente descritte. Per quanto riguarda il caso $\ell \geq 2$ si rende esplicita l'espressione di $\Phi_2(X)$ per $(n, m) = (3, 2)$ e si discute l'assenza di flessi per X quando Y appartiene a varie classi di superfici. Inoltre vengono calcolate formule esplicite per $\Phi_2(X)$ per i vari ℓ quando X è uno scroll 4-dimensionale su una varietà tridimensionale Y e si dimostra che per $Y = \mathbb{P}^3$ o $\mathbb{Q}^3$ ogni siffatto scroll ammette dei flessi.

Ulteriori ricerche negli ambiti a), b) e c) sono tuttora in corso e si ritiene che potranno portare a qualche risultato significativo.

Nel corso del triennio in esame il sottoscritto ha mantenuto ed ampliato i contatti scientifici con varie istituzioni estere già stabiliti in anni precedenti e, in particolare, ha sviluppato o contribuito a sviluppare rapporti di collaborazione scientifica con:

- la *University of Notre Dame*, Indiana (U.S.A.), Prof. Andrew J. Sommese;

- la *De Paul University* di Chicago (U.S.A.), Prof. Gian Mario Besana;

- la *University of Utah*, Salt Lake City (U.S.A.), Prof. Tommaso de Fernex;

- la *Universidad Complutense* di Madrid (Spagna), Prof. Enrique Arrondo, Prof. Raquel Mallavibarrena, Dott. José Carlos Sierra;

- la *Universidad Rey Juan Carlos*, Mostoles-Madrid(Spagna), Prof. Roberto Muñoz;

- il *Royal Institute of Technology* di Stoccolma (Svezia), Prof. Sandra Di Rocco;

- la *University of Oslo* (Norvegia), Prof. Ragni Piene;

- la *University of Bergen* (Norvegia), Prof. Andreas Knutsen;

- la *Universidad de Conception* (Chile), Prof. Andrea L. Tironi.

Per quanto riguarda le attività di ricerca inquadrate nell'ambito di progetti locali, nazionali, o internazionali, ed il loro coordinamento, il sottoscritto è stato:

- membro di EAGER (network europeo di ricerca: European Algebraic Geometry Education and Research);

- membro dell'unità operativa di Milano afferente al PRIN cofinanziato dal MIUR (Cofin 2008) "Geometria algebrica e aritmetica, teorie coomologiche e teoria dei motivi" coordinato dal Prof. C. Pedrini;

- membro del GNSAGA (Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e le loro Applicazioni) dell'INdAM;

- responsabile dei gruppi locali di ricerca: "Questioni di Geometria algebrica e aritmetica, di Topologia e di Algebra" (PUR 2008); "Questioni di Geometria algebrica e temi correlati" (PUR 2009).

- responsabile di un assegno per la collaborazione alla ricerca nel campo della classificazione delle varietà proiettive e varietà speciali (Dott. Andrea L. Tironi dal 1/11/2007, con assegno rinnovato per il periodo 1/11/2009–31/01/2011).

Nel periodo in esame, il sottoscritto ha partecipato ai seguenti eventi scientifici:

1. "Giornata INdAM 2009", Torino, 5/6/2009.

2. "Projective Algebraic Geometry in Milano", Milano 11–12/6/2009.

3. "Aspects of Convexity", Firenze, 27–28/11/2009.

4. "Workshop on Algebraic Geometry", Madrid, 17–19/12/2009.

5. "Classical and Recent Aspects in the Study of Projective Varieties", Genova, 21–22/1/2010.

6. "After Carnival: An Algebraic Geometry Party at Turin", Torino, 18–19/2/2010.

7. "Giornate di Geometria Algebrica ed Argomenti Correlati, X", Gargnano del Garda, 25–29/5/2010.

8. "Minimal Model Program and Shokurov's ACC Conjecture" (School), Trento, 5–9/7/2010.

9. "Perspectives on Algebraic Varieties", Levico, 5–8/9/2010.

10. "Some Topics in Commutative Algebra and Algebraic Geometry", GTM Seminar, Genova 24-25/2/2011.

11. "Some Topics in Commutative Algebra and Algebraic Geometry", GTM Seminar, Milano 17-18/11/2011.

In relazione agli eventi suddetti è stato coorganizzatore di 5 e 7. Ha tenuto inoltre la seguente conferenza su invito:

- *Projective manifolds of sectional genus three and ample vector bundles*, Univ. Complutense, Madrid, 27/1/2009,

Ha effettuato alcune missioni di breve periodo in Italia e all'estero per svolgere attività di ricerca in collaborazione (Genova, 16–17/1/2009, 30/4–2/5/2009, 30/6–4/7/2009, 30/12/2009, 4–5/1/2010, 20–22/1/2010, 28–30/6/2010: Prof. M. Beltrametti; Madrid, 25/1–1/2/2009, 26–29/5/2009, 30/11–8/12/2009, 25/11–7/12/2010, 28/11–10/12/2011: Prof. E. Arrondo, Prof. R. Mallavibarrena, Prof. R. Muñoz; Notre Dame, Indiana, 26/7–6/8/2011: Prof. A. J. Sommese). Nell'ambito delle attività previste dai vari progetti di cui sopra, ha ricevuto visite di diversi colleghi italiani e stranieri; tra questi:

Prof. A. J. Sommese (Univ. of Notre Dame, Indiana), 10–20/6/2009;

Prof. M. Beltrametti (Univ. di Genova), 10–19/6/2009, 18–20/7/2009, 22–24/11/2009, 12–14/7/2010;

Prof. G. M. Besana (De Paul Univ., Chicago, Illinois), 7–11/6/2010, 22–23/12/2010;

Prof. T. de Fernex (Univ. of Utah, Salt Lake City), 18–20/7/2009, 12–14/7/2010;

Prof. S. Di Rocco (Royal Institute of Technology, Stockhom), 8–11/6/2010;

Prof. R. Mallavibarrena (Univ. Complut. Madrid), 11–16/2/2009, 21–27/10/2009, 11–18/10/2010, 7-13/7/2011;

Dott. J. C. Sierra (Univ. Complut. Madrid e CSICYT), 3/3–30/6/2010;

Prof. A. Noma (Yokohama Univ., Tokyo), 12–14/9/2010

Infine, nel triennio in esame, è stato autore di varie recensioni: 5 per "Mathematical Reviews" e 10 per "Zentralblatt für Mathematik") e *referee* di 7 lavori per le riviste "Journal of Pure and Applied Algebra" (2), "Beiträge zur Algebra und Geometrie", "Le Matematiche", "Proceedings of the R.I.M.S. Kyoto", "Rend. Circ. Matem. Palermo", "Comm. Algebra".

È membro del Collegio dei Docenti del Dottorato in Matematica e ha fatto parte del Comitato Direttivo della Scuola di Dottorato in Scienze Matematiche sino al 30/9/2011.

Nell'ambito del Dottorato, ha tenuto un corso avanzato su "Superfici algebriche" (a.a. 2008-2009). Inoltre ha promossso un accordo di cotutela con l'Univ. Complutense di Madrid finalizzata alla tesi di dottorato del dott. S. Marchesi (ciclo XXIV), codiretta con il Prof. E. Arrondo.

Per quanto attiene all'attività didattica svolta nell'ambito dei Corsi di Laurea, il sottoscritto ha tenuto il corso di "Geometria II" presso il Corso di Laurea triennale in Matematica (e quello in Matematica per le Applicazioni) nell'a.a. 2008-2009, il corso di "Geometria 2" nel Corso di Laurea triennale riformato in Matematica, negli a.a. 2009-2010 e 2010-2011, nonché il corso di "Superfici algebriche", presso il Corso di Laurea magistrale in Matematica, per tutto il triennio in esame.

Oltre a partecipare agli esami dei corsi suddetti, in diverse occasioni è stato membro e presidente della commissione per gli esami di laurea in Matematica.

Nel triennio in esame è stato altresì relatore di tre tesi di laurea magistrale in Matematica su argomenti di ricerca o di attualità nel campo della geometria algebrica (L. Benzo, 2009; L. Ronchi, 2010; C. Orrieri, 2011) e di 5 elaborati finali per la laura triennale in Matematica.

Di alcuni giovani studiosi ha continuato a seguire il lavoro scientifico post laurea, durante e dopo gli studi di Dottorato in Italia o all'estero. In particolare, ricerche che si sono avvalse di questa attività si sono poi concretizzate nei lavori seguenti:

D. Fusi, A. L. Tironi, *On rational elliptic surfaces with Mordell–Weil group of rank five*, Boll. Unione Mat. Ital. (9) **3** (2010), 363379.

A. L. Tironi, *Ample normal crossing divisors consisting of two Del Pezzo manifolds*, Forum Math. **22** (2010), 667–682.

Per quanto attiene alle attività organizzative, il sottoscritto è, o è stato:

- direttore del Dipartimento di Matematica, dal 15/6/2005 al 30/9/2011;

- referente per il costituendo nuovo Dipartimento di Matematica ai sensi della Legge 240, dal 10/6/2011;

- membro della Giunta di Facoltà quale rappresentante dell'Area MAT, dal 6/10/2005, rieletto nel 2008 e prorogato nel 2011;

- membro della Commissione piani di studio della laurea triennale e della laurea magistrale in Matematica.

Infine, nel corso del triennio in esame egli è stato:

- presidente della commissione per la conferma in ruolo di professori associati del s. s. d. MAT/03–Geometria (10/2009–4/2010);

- membro di commissione ai colloqui per l'attribuzione di assegni di ricerca Post Doc di tipo A per l'area delle Scienze Matematiche nella Università di Milano (2/2011).

In fede,

Milano, 22 dicembre 2011